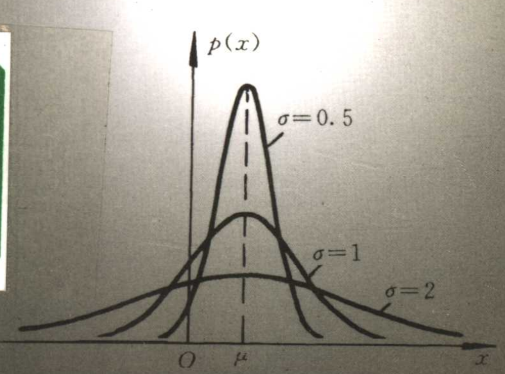
主编 张文忠 秦昌明

概率论与数理统计 习题指导

GAILüLUN YU SHULI TONGJI
◎ XITI ZHIDAO



西南交通大学出版社
SWJUP
Http://press.swjtu.edu.cn

概率论与数理统计
习题指导

主编　张文忠　秦昌明

西南交通大学出版社
·成　都·

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计习题指导/张文忠，秦昌明主编.
成都:西南交通大学出版社,2005.8
ISBN 7-81104-096-4

Ⅰ.概... Ⅱ.①张... ②秦... Ⅲ.①概率论—高等学校—习题②数理统计—高等学校—习题
Ⅳ.021-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 057896 号

概率论与数理统计习题指导

主编 张文忠 秦昌明

责任编辑	刘娉婷
责任校对	韩松云
封面设计	何东琳设计工作室
出版发行	西南交通大学出版社出版发行 成都二环路北一段 111 号
邮编	610031
发行部电话	(028)87600564
网址	http://press.swjtu.edu.cn
电子邮箱	cbsxx@swjtu.edu.cn
印刷	成都蜀通印务有限责任公司
成品尺寸	140 mm×203 mm
印张	10.625
字数	327 千字
印数	1—3 000 册
版次	2005 年 8 月第 1 版
印次	2005 年 8 月第 1 次印刷
书号	ISBN 7-81104-096-4/O·011
定价	13.80 元

图书如有印装问题,本社负责退换

前　言

这本《概率论与数理统计习题指导》是我校使用的数学系列教材之一——《概率论与数理统计》(张文忠主编,西南交通大学出版社 2004 年出版)的配套教材。全书与该教材相对应地分为八章,主要内容包括随机事件与概率、随机变量及其概率分布、二维随机向量、随机变量的数字特征、数理统计的基本概念、参数的估计、假设检验、方差分析与回归分析等。

书中每章包含三个部分:基础知识提要、典型例题分析、习题分析解答。在典型例题分析中,重点考虑到工科类和经管类的教学实际,着力于解题的思维分析和能力训练,并尽力配置与教材要求相适应的各种常见题型。此外,还适量地列举了一些可供不同专业选用、有利于活跃思维、开阔视野的例题,以便有兴趣的读者阅读与思考。

对于相应教材中各章节的习题,本书都全部给出了分析解答。有不只一种解法的,也一一作了介绍与说明,以利于初学者解答习题后对照与思考。

本书由张文忠、秦昌明两位教授主编,由伊良忠教授主审。

已出版的还有由秦昌明、张文忠两位教授主编,由伊良忠教授主审的《高等数学简明教程习题指导》[《高等数学简明教程》(秦昌明主编,西南交通大学出版社 2002 年出版)的配套教材]和《线性代数简明教程习题指导》[《线性代数简明教程》(伊良忠主编,西南

交通大学出版社2003年出版)的配套教材]。

本书在编写过程中得到了西华大学数学老师们的热忱帮助，特别是在例题和习题的选择上，凝聚着广大同仁的教学心得。本书能顺利出版，更得力于西华大学教务处、数学与计算机学院、管理学院各级领导的大力支持，在此一并致谢！

限于编者水平，书中难免有不足之处，希望读者批评指正。

编者于西华大学

2005年5月

目　　录

第一章　随机事件与概率

第二章　随机变量及其概率分布

第三章　二维随机向量

第四章　随机变量的数字特征

第五章　数理统计的基本概念

第六章　参数的估计

第七章　假设检验

第八章　方差分析与回归分析

第一章　随机事件与概率

● 本章知识网络图

- 事件与概率
  - 事件
    - 样本空间
    - 事件的关系与运算
    - 完全事件组
  - 概率
    - 概率的定义
      - 统计定义
      - 古典概型
      - 几何概型
    - 概率的基本性质
  - 条件概率与事件的独立性
    - 条件概率与乘法公式
    - 全概率公式与逆概率公式
    - 事件的独立性
    - 贝努里概型

第一节　随机事件

一、基础知识提要

1. 随机试验与样本空间

随机试验：试验可以在相同条件下重复进行;每次试验的所有可能的结果是事先知道的,且结果不止一个;每次试验前不能确定哪个结果会出现.

样本空间：随机试验的所有可能结果的集合 Ω 称为样本空间,试验的每一个可能结果 ω 称为样本点或基本事件.

随机事件：随机试验的某种结果(即样本空间的某种子集)称为随机事

件,简称事件,以字母 $A,B,C,\cdots$ 表示.随机事件分为简单事件与复杂事件.而必然事件 Ω 和不可能事件 $\varnothing$ 可看成随机事件的两种极端情况.

2. 事件的关系与运算

(1) 事件之间的关系.

包含: $A\subset B$,称事件 B 包含事件 A,即事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

相等: $A\subset B$ 且 $B\subset A$,称事件 A 与事件 B 相等.

(2) 事件之间的运算.

和: $A\cup B$ 或 $A+B$,表示 A、B 二事件中至少有一个发生;$\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$,表示 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生.

积: $A\cap B$ 或 AB,表示 A,B 二事件同时发生;$\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$,表示 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生.

差: $A-B$,表示事件 A 发生而 B 不发生.

(3) 互不相容事件与对立事件.

互不相容(互斥):$AB=\varnothing$,即事件 A 与 B 不能同时发生

对立(互逆):若 $A+B=\Omega$,且 $AB=\varnothing$,则 A 与 B 二事件互为对立事件,记为 $B=\overline{A}$,即有

$$A+\overline{A}=\Omega,\quad A\overline{A}=\varnothing.$$

对立事件 A,B 一定互不相容,反之不成立.

完全事件组:若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots$ 两两互不相容,且 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k=\Omega$,则称 $A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots$ 为一个完全事件组.

(4) 事件的运算规律.

交换律:$A+B=B+A,\quad AB=BA.$

结合律:$(A+B)+C=A+(B+C),\quad (AB)C=A(BC).$

分配律:$(A+B)C=AC+BC,\quad AB+C=(A+C)(B+C).$

对偶律:$\overline{A+B}=\overline{A}\overline{B},\quad \overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}.$

对于有限个或可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的对偶律可简写为

$$\overline{\bigcup_k A_k}=\bigcap_k\overline{A_k},\quad \overline{\bigcap_k A_k}=\bigcup_k\overline{A_k}.$$

二、典型例题分析

例 1 写出下列随机试验的样本空间:

(1) 将一枚硬币连掷三次,观察其正反面出现的情况;

(2) 将一枚硬币连掷三次,记录总共出现正面的次数.

解: (1) 因每掷一次硬币都有出现正面或反面这 2 种可能的结果,故连掷三次共有 $2^3=8$ 种不同的结果.

若用"正反正"表示"第一次出现正面,第二次出现反面,第三次出现正面"的基本事件,类此则所求样本空间为

$\Omega=\{$正反正,正正反,正反反,正正正,反正反,反反正,反正正,反反反$\}$.

(2) 掷三次硬币,正面出现的总次数显然只能是 0,1,2,3 中的一个.若记基本事件

$$i=\{\text{共出现 } i \text{ 次正面}\},\quad i=0,1,2,3.$$

则
$$\Omega=\{0,1,2,3\}.$$

注: 样本空间又称为基本事件空间.由本例可见,Ω 所含基本事件将随试验的目的与要求不同而改变.

例 2 设 A,B,C 为 Ω 中的三个随机事件,试用 A,B,C 的运算关系表示下列事件:

(1) A,B,C 都不发生;

(2) A,B,C 不多于两个发生.

解: 事件的表示方法常常不是唯一的.

(1) **方法一**: 因 $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 分别表示 A 不发生,B 不发生,C 不发生,故"A,B,C 都不发生"可表示成$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

方法二: 因 $A+B+C$ 表示"A,B,C 中至少发生一个",故"A,B,C 都不发生"是它的逆事件,可表示成 $\overline{A+B+C}$.由方法一的$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ 按对偶律也可得到表达式 $\overline{A+B+C}$.

方法三: "A,B,C 都不发生"可看作是完全事件 Ω 与事件 $A+B+C$ 的差,即可表示成 $\Omega-(A+B+C)$.

(2) **方法一**: 事件"A,B,C 不多于两个发生"是"三个都发生"(即 ABC)的逆事件,即为 $\overline{ABC}$ 或 $\Omega-ABC$.

方法二：它也相当于 A,B,C 中至少有一个不发生，即 $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 中至少有一个发生，故可表示为 $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$.

方法三：它还可表示为"三个都不发生"，"仅发生其中一个"，"仅发生其中两个"这三个互不相容事件的和，即可表示为

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC.$$

例 3 试证下列各式：

(1) $(A+B)(A+\overline{B})=A$； (2) $(A+C)(B+C)=AB+C$.

证：利用事件的运算规律，可得

(1) $(A+B)(A+\overline{B})=(A+B)A+(A+B)\overline{B}$

$=A+BA+A\overline{B}+\varnothing=A+A(B+\overline{B})=A+A=A.$

其中用到 $AA=A,A\Omega=A$.

(2) $(A+C)(B+C)=(A+C)B+(A+C)C$

$=AB+CB+AC+C=AB+C(A+B+\Omega)$

$=AB+C\Omega=AB+C.$

最后的结论也可由 $CB+AC\subset C$ 推出. 本小题即是事件的分配律的第二个关系式.

例 4 判定下列关于事件 A,B 的结论是否成立：

(1) 若 $B-A=B$，则有 $AB=\varnothing$； (2) $(A+B)-B=A$.

解：(1) 由 $B-A=B$ 知 B 发生时 A 一定不发生，即 A,B 互不相容，故 $AB=\varnothing$成立.

(2) 因$(A+B)-B=A-B\neq A$，故结论不成立. 由(1)小题知，仅当 A,B 互不相容时结论才成立.

三、习题分析解答(习题 1-1)

1. 写出下列随机试验的样本空间：

(1) 将一枚硬币连掷两次，观察正、反面出现的情况；

(2) 10 只同样的产品中有 3 只是次品，每次从中任取 1 只，取出后不放回，直到将 3 只次品都取出，记录抽取的次数；

(3) 一射手向一目标射击，直到命中为止，记录射击的次数；

(4) 将长为 l 的一条线段随意地截为两段，测量较长一段的长度.

解：(1) 因掷一次只有出现正面或出现反面这 2 种可能的结果，故连掷两次共有 $2^2=4$ 种可能的结果. 从而试验的样本空间为

$$\Omega = \{正正, 正反, 反正, 反反\}.$$

(2) 每次取一只后不放回，显然至少取 3 次，至多取 10 次即可将 3 只次品都取出，即取产品的次数只能是 3,4,…,10 这 8 个结果之一，若记

$$i = \{共取产品\ i\ 次\}, \quad i = 3,4,\cdots,10,$$

则
$$\Omega=\{3,4,5,\cdots,10\}.$$

(3) 因射击的次数可以是 1,2,3,…中的任何一个，若记

$$i = \{第\ i\ 次才命中目标\}, \quad i = 1,2,3,\cdots,$$

则
$$\Omega=\{1,2,3,\cdots\}.$$

(4) 记 $x=\{较长一段的长度为\ x\}$，显然 x 可以取区间 $[l/2, l)$ 上的一切值. 故有

$$\Omega = \{x \mid l/2 \leqslant x < l\}.$$

2. 设 A,B,C 为 Ω 中的三个事件，试用 A,B,C 的运算关系表示下列事件：

(1) $D=\{A\ 与\ B\ 都发生而\ C\ 不发生\}$；

(2) $E=\{A,B,C\ 中至少有一个发生\}$.

解：(1) 事件 D="A,B 都发生而 C 不发生"可表示为 AB 与 $\bar{C}$ 之积或 AB 与 C 之差，即

$$D = AB\bar{C} \quad 或 \quad AB-C \quad 或 \quad AB-ABC.$$

(2) 事件 E="A,B,C 中至少有一个发生"，按事件之和的定义可表示为 $A+B+C$；又 $\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}$ 表示 A,B,C 都不发生，故其逆事件 $\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$ 表示 A,B, C 中至少发生一个；还可将 E 表示为 A,B,C 恰有一个、恰有二个、恰有三个发生的互不相容事件之和. 综上有

$$E = A+B+C, \quad 或 \quad \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}},$$

或
$$A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC+ABC.$$

3. 向指定目标射击 3 次，记事件

$$A_i=\{第\ i\ 次击中目标\}, \quad i=1,2,3,$$

试用 A_1,A_2,A_3 表示下列事件：

(1) $A=\{$仅有一次击中目标$\}$；　　(2) $B=\{$仅有两次击中目标$\}$.

解：因为 $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$ 表示"仅第一次击中目标"，$A_1A_2\bar{A}_3$ 表示"仅第一、二两次击中目标"，故可类似将 A,B 分别表示为三个互不相容的事件之和：

(1) $A=A_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$；

(2) $B=A_1A_2\bar{A}_3+A_1\bar{A}_2A_3+\bar{A}_1A_2A_3$.

4. 试回答下列问题：

(1) A,B 两事件对立与互不相容有何异同？

(2) A,B,C 三事件互不相容是否等同于 $ABC=\varnothing$？

解：(1) 相同的是 A,B 不含有公共的样本点，即 $AB=\varnothing$；不同的是，若 A,B 是对立事件，还应满足 $A+B=\Omega$.

(2) 不相同. 如掷一个骰子，记录出现的点数，设事件

$$A=\{2,4,6\},\quad B=\{1,4,6\},\quad C=\{3,5\},$$

则显然有 $ABC=\varnothing$，但此时 $AB=\{4,6\}\neq\varnothing$，$AC=\varnothing$，$BC=\varnothing$，即 A,B,C 不是两两互不相容的.

5. 图 1-1 中两个电路都有 4 个开关和 1 个灯，设事件

$$A_i=\{\text{第 } i \text{ 个开关闭合}\},\quad i=1,2,3,4,$$

试用 A_1,A_2,A_3,A_4 的运算关系表示出事件 $B=\{$灯亮$\}$.

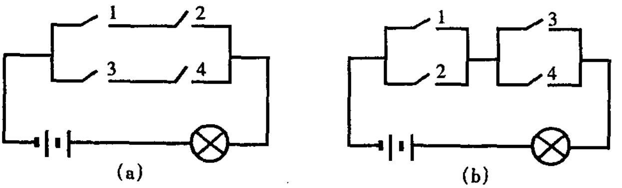


图 1-1

解：(1) 因 A_1A_2 表示图(a)中开关 1、2 同时闭合，A_3A_4 表示开关 3、4 同时闭合，要灯亮必须 A_1A_2 与 A_3A_4 至少有一个发生，故

$$B=A_1A_2+A_3A_4.$$

(2) 因 A_1+A_2 表示图(b)中左面一组并联线路连通，A_3+A_4 表示右面一组并联线路连通，要灯亮必须 A_1+A_2 与 A_3+A_4 都发生，故

$$B=(A_1+A_2)(A_3+A_4).$$

第二节　事件的概率

一、基础知识提要

1. 概率的定义

一个随机事件 A 发生的可能性的大小,记为 $P(A)$,这个数称为事件 A 发生的概率或事件 A 的概率.

(1) 概率的统计定义: 在一个随机试验中,若事件 A 出现的频率 n_A/n 随着重复试验次数 n 的增大而稳定于某个常数 p,则称这常数 p 为事件 A 发生的概率,即

$$P(A) = p.$$

(2) 概率的古典定义: 若一个随机试验的样本空间 Ω 共含有 n 个等可能的基本事件,Ω 中的事件 A 包含有 m 个基本事件,则事件 A 发生的概率为

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{A\text{ 中所含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}.$$

(3) 概率的几何定义: 若向一个区域 G 内随机投点,点落在 G 内任意位置是等可能的,则点落入 G 中的小区域 A 内的概率为

$$P(A) = \frac{S_A}{S_G} = \frac{\text{区域 } A \text{ 的测度}}{\text{区域 } G \text{ 的测度}}.$$

(4) 概率的公理化定义 * :设 A 为随机事件,$P(A)$为定义在所有随机事件组成的集合上的实函数且满足下列三条公理:

公理 1(非负性): 对任意事件 A,有 $P(A) \geqslant 0$;

公理 2(规范性): $P(\Omega)=1$;

公理 3(可列可加性): 对于两两互不相容的事件 $A_1, A_2, A_3, \cdots$,有

$$P(A_1 + A_2 + \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots,$$

则称函数 $P(A)$为事件 A 的概率.

---

* 概率的公理化定义仅列在此供对照参考,这里不拟对它作更严格的表述与讨论.

2. 概率的基本性质

性质 1 对任意事件 A,有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

性质 2 $P(\Omega)=1, P(\varnothing)=0$;

性质 3(有限可加性):若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容,则有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

概率还具有公理化定义中所述的可列可加性.

性质 4 $P(\bar{A})=1-P(A)$.

性质 5 若 $A\subset B$,则 $P(A)\leqslant P(B)$,且

$$P(B-A)=P(B)-P(A).$$

性质 6(加法公式): 对任意二事件 A, B 有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

对任意三事件 A_1, A_2, A_3,有

$$P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_2A_3)-P(A_1A_3)+P(A_1A_2A_3).$$

对更多个事件和的概率亦有类似的公式.

二、典型例题分析

例 1 掷两颗骰子,它们出现的点数之和等于 7 的概率是多少?

解: 因每颗骰子都可能出现 1,2,…,6 这 6 种点数,且出现每种点数是等可能的,故掷两颗骰子有 $6^2=36$ 种等可能的结果. 而事件

$$A=\{两颗骰子点数之和等于 7\}$$

所包含的结果只有(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)共 6 种,故按古典概型知

$$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$$

注: 不能误认为点数之和有 2,3,…,12 这 11 种结果,而 A 只含其中一种结果,从而推出 $P(A)=1/11$. 因为这 11 种结果不是等可能的,故此时不能按古典概型计算.