教育数学探索

JIAOYUSHUXUETANSHO

教育数学丛书

张景中 著

面积公式$\triangle=\frac{1}{2}ab\sin C$——解题利器

$$|S_n|=|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\leqslant\frac{d_1+d_2+\cdots+d_n}{n}$$

$$\leqslant\frac{d_1+d_2+\cdots+d_m}{n}+\frac{(n-m)d_{m+1}}{n}$$

关于实数的
连续归纳法

设 P_x 是涉及一个实数 x 的命题：

……………………………………

关于自然数的
数学归纳法

设 P_n 是涉及一个自然数 n 的命题：

……………………………………

教育数学丛书

教育数学探索

张景中 著

四川教育出版社
一九九四年·成都

（川）新登字005号

责任编辑：冉崇玉
封面设计：何一兵　刘　红
版面设计：顾求实

教育数学探索　　张景中　著

四川教育出版社出版　（成都盐道街三号）
四川教育出版社发行　四川新华印刷厂印刷

开本787×1092毫米　1/32　印张6.875　插页5　字数146千
1994年8月第一版　1994年8月第一次印刷
印数：1—2800册

ISBN7—5408—0924—8/G·916　定价：6.15元

内容简介

本书浅近地介绍了作者自 1975 年以来在数学教育领域进行的探索. 作者认为，为了成功地进行数学教育改革，要根据教育的规律，对教材施以数学上的再创造. 这种再创造，已超出了“教学法加工”的范围，形成了“教育数学”的研究领域.

用这一想法看待数学教育改革中被认为“最复杂的”、“引起世界性争论的”几何教学问题，以及广泛关心的微积分入门教学问题，作者大胆地提出了独具特色的新颖见解.

读者将看到：古老的面积解题技巧，在这里焕发青春，扩展成了通用的工具，而且演化为平面几何的新体系. 使很多学生头痛的“ε—”极限语言，被自然平易的同样严格的定义所取代. 熟知的数学归纳法移植到了实数系，化出了被古典分析大师漏掉了的“连续归纳法”，用统一的模式导出了关于实数及连续函数性质的一连串定理. 丰富的例题，有说服力地表明：新观点既提供了较简明的逻辑结构，也提供了更便利的解题方法.

中学生能看懂本书的大部分内容，并能由之开眼界、广思路，增强解几何题的能力. 对于数学教师，这是一本别具一格的教学参考书. 对具有大专水平的读者、研究生，甚至数学工作者，书中的许多内容也并非平淡无奇的老生常谈. 对数学教育研究工作者，书中还提供了一些值得进一步探讨的课题.

前　言

教育数学，作为一门学科，尚待承认．但教育数学的活动，则早已存在．

两千多年前的欧几里德，对当时的几何学研究成果进行再创造，写成了《几何原本》这一有深远影响的教程．这是教育数学活动的第一个光辉典范．

一百多年前的法国数学家柯西，对牛顿、莱布尼兹以来微积分的研究成果进行再创造，写出了至今还在影响着大学讲坛的《分析教程》，成为高等数学教育发展途中的一座里程碑．这是教育数学的又一杰出贡献．

当代的布尔巴基学派，把浩繁的现代数学纳入“结构”的框架，出版了已达四十余卷的百科全书似的巨著《数学原理》，“对数学从头探讨，并给予完全的证明”．这是为数学家准备的高级教程．应当说，布尔巴基是当代的教育数学大师．

为什么是教育数学而不是数学教育？

数学教育要靠数学科学提供材料．对材料进行教学法的加工使之形成教材，是数学教育的任务．但是，数学教育不承担数学上的创造工作．

为了教育的需要，对数学研究成果进行再创造式的整理，提供适于教学法加工的材料，往往需要数学上的创新．这属于教育数学的任务．

因此，我们认为，欧几里德、柯西以及布尔巴基们，是教育数学家. 他们的工作成果，一次又一次地被数学教育家加工，成为各式各样的课本，直到今天.

从欧几里德到布尔巴基，他们是站在数学发展前沿从事再创造活动的. 到了今天，在中小学和大学课堂上，面对着欧几里德、柯西这些大师们留下的珍贵遗产，我们似乎是在数学的大后方. 在大后方，除了"教学法加工"之外，是不是无事可做了呢？如果无事可做，"教育数学"在中小学到大学这一广阔领域，岂不是没有立足之地了吗？

事实并非如此. 前辈大师们留下的珍贵遗产，并非尽善尽美. 在中学到大学的数学课程中，存在着公认的难点. 如何处理这些难点，一直被认为是数学教育的任务. 这些难点，说明了前辈大师们的工作尚有缺陷. 指出这些缺陷，从数学上而不是从教育学上加以再创造，正是当前教育数学的任务之一.

可以提出新的定义、新的定理、新的方法、新的公理体系. 这本小册子里在三个具体问题上介绍了作者从 1975 年以来进行的探讨. 这三个问题是：平面几何的新体系与新方法，极限概念的非 ε—语言定义法，以及实数理论中的连续归纳法.

我们希望读者在阅读这本小册子之后，能够有这样的印象：教育数学是具体的、切切实实的数学，不是空泛的讨论.

但是，作为一门学科，它仍然是一株幼苗，甚至是一粒刚刚萌发的种子.

作者

1988 年夏于成都

目　录

§1 珍贵的遗产
——沉重的负担

1. 从方块字谈起

方块汉字，是祖宗给我们留下的一份珍贵的文化遗产. 龙飞凤舞的书法、古朴雅致的篆刻、铿锵上口的律诗、妙夺天工的楹联……这些艺术明珠，无不和方块汉字息息相关. 如果有一天，汉字真的被二十多个字母的各种排列组合所代替，这些艺术明珠也就只能跻身于研究室和博物馆了. 这多少还是令人惋惜的.

但是，正象鲁迅早就指出的那样，方块汉字，是我们民族身上的一个沉重负担. 它是一种“不象形的象形字，不谐声的谐声字”. 要一个一个地凭空记住，又要把十几画甚至二十多画妥妥贴贴地安排在一个不到一厘米见方的小格子里，确实不容易. 鲁迅认为，汉字的难写难认，是阻挡人们学习文化知识的一条“高门槛”，“单是这条门槛，倘若不费他十来年工夫，就不容易跨过.”这话一点不假，在一所著名的综合大学的校园里，我不止一次地看见大学生写的寻物启“示”. 我们的电视台，也曾经开辟过“容易读错的字”的专题节目. 这些，不都是表明了中国语言文字难学吗？

在电子计算机向各个领域渗透的今天，方块字这个包袱，

显得更加沉重．计算机用拉丁字母的组合和人交流信息，极其方便．计算机的汉字系统呢，却成了热门的研究课题．虽然有一个一个巧妙的方案脱颖而出，但实际上都要占用宝贵的内存．

方块字还阻碍了炎黄子孙与世界上许多国家的文化交流．中国有不少好的文学作品，但诺贝尔文学奖金，至今榜上无名．据说，这和汉字之难大有关系．

祖宗给我们留下这份宝贵的文化遗产，是应当感谢的．但是，为了继承它，中国人却虚掷了多少光阴，耗费了多少金钱！看来，使用汉语拼音文字极为困难，仿佛是遥遥无期．来日方长，我们的子孙后代，又将在方块字上比人家多付出多少劳动啊！

珍贵的遗产，同时又是沉重的负担．

2．十个指头不如八个指头

珍贵的遗产，同时又是沉重的负担．这种现象不仅仅表现在方块汉字上．

比如，美国的一位著名科普作家阿西莫夫，曾经写过一篇文章，论述英语中许多单词造得不合理、不方便的现象．

为了减轻语言文字现状带给人类的沉重负担，有识之士在提倡一种“世界语”．这种更方便、更科学的新造语种，一百年来，得到了越来越多的支持．

为了使珍贵的遗产传到下一代手里时变得更为丰富和精美，人们进行着巨大的努力，这种文化改造工作是艰难的．因为当人们发现“遗产”应当加以改造时，往往已经晚了．

这些珍贵的遗产当中，最基本的部分，除了语言文字之

外，要算数学了.

我们要教给小孩子的两门主要的功课是语文和算术.

看看十进记数法吧，这可是全世界人民的共同财富.

这又是一份珍贵的遗产，它比起古埃及或古罗马的记数法来，不知道要高明多少倍. 但是，它是不是已经尽善尽美了呢?

早就有人感叹过，要是人有八个手指而不是十个手指就好啦!因为八进制对于电子计算机来说要比十进制方便得多. 电子计算机要用二进制数码进行实际的运算，这在今天已是人们的常识了. 而八进制与二进制之间的相互转换，真是易如反掌. 这里有一张表，它是把八进制数译成二进制数，或把二进制数译成八进制数的通用字典:

八进制	二进制
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

用这本字典，我们可以方便地把八进制的一个数，例如 317 (相当于 10 进制下的 $3\times64+8+7=207$)，直译作 011，001，111. 丢掉最左边的 0，就是 11001111. 反过来，二进制下的 1010110，自右向左，三个码一组，看成 001，010，110，便能直译成八进制下的 126.

可是，你把十进制下的数 207 译成二进位，试试看，麻烦得多．你要反复用 2 来除．

2 | 207……余 1
2 | 103……余 1
2 | 51……余 1
2 | 25……余 1
2 | 12……余 0
2 | 6……余 0
2 | 3……余 1
1……余 1

把余数自下而上写出来：11001111．而从八进制下的 317 得到它，就容易得多．

3. 更先进的数制

不过，不同数制的转换不是什么了不起的困难．计算机里，只是添加不多的线路与元件，就能解决十进制到二进制的转换问题．其所以说，十所制并非尽善尽美，还有更有力的理由：因为还有比目前的十进制记数法更优越的方法．

两只手有十个指头，一只手可只有五个指头．中国算盘里上珠以一代五，大大方便了运算．充分利用这五个指头，能造出更好的记数法．

比方说，我们满可以删除 6、7、8、9 这四个数码，只留下 0、1、2、3、4、5（要知道，关于 7、8、9 的加减乘除，正是一年级小学生觉得最难的）．仍然是十进制，但记数时加减并用．一个数码顶上划一杠表示减去它．具体说来，0、1、2、3、4、5 的写法不变．数码 6 没有了，但因为 6＝10－4，所

以 6 可以写成 $1\bar{4}$——十位上的 1 代表 10，个位上的 $\bar{4}$ 代表负 4．照此办理，7 写成 $1\bar{3}$，8 写成 $1\bar{2}$，9 写成 $1\bar{1}$，而 10 还是 10．从 11 到 15 照旧，而 16 到 19 则变成了 $2\bar{4}$、$2\bar{3}$、$2\bar{2}$、$2\bar{1}$．类似地，27 是 $3\bar{3}$，81 是 $1\bar{2}1$．97 是 $10\bar{3}$，104 仍是 104，7267 则变成 $1\bar{3}3\bar{3}\bar{3}$．

这种记数法的好处，不仅在于少用了 6、7、8、9 这四个数码，更重要的是，运算起来也方便得多．

有人详细总结了这种记数法的好处，大致有：

（1）基本的加减法容易多了．因为只剩下 5 以内的加减法要学了．

（2）乘法表的内容大大减少．如果不算 1 的乘法，就只有十句．

（3）学会加法也就学会了减法．例如：

$$5\bar{2}4-2\bar{3}3=5\bar{2}4+\bar{2}3\bar{3}$$

这样，代数里的正负数加减法就溶化在算术运算里了．

（4）由于正负抵销，连续相加变得容易一些．比较一下这两个算式，就略见一斑：

$$\begin{array}{rcr}
198 & —— & 20\bar{2} \\
245 & —— & 245 \\
739 & —— & 1\bar{3}4\bar{1} \\
+682 & & +1\bar{3}\bar{2}2 \\
\hline
1864 & = & 2\bar{1}\bar{4}4
\end{array}$$

左边的老式算法，由于不能正负相消，每一竖列相加时都涉及较多的运算：

（5）加减混合运算可以在一个竖式里进行．

（6）四舍五入的规则没有了，代之而兴的是简单的“截

尾”.比方说，3.68在新记数法里是$4.\overline{32}$，截尾之后得到$4.\overline{3}$，恰好是3.7，相当于把3.68最后的8进上去．而3.64是$4.\overline{4}4$，截尾之后是$4.\overline{4}$，即3.6.

想一想，单是简化乘法表，就能使孩子们提前半个学期学会乘法．此外，由于记数法本身和正负号紧密地联系在一起，还可以使代数变得更容易学习.

可见，十进制记数法虽然是一份珍贵的遗产，同时也是沉重的负担．初学算术的孩子，也许会有最深刻的体会吧！

尽管早在1726年已有人提出这种加减记数法(就在这一年，英国人约翰·科尔森向英国皇家学会介绍了这个系统)，也还是太晚了．因为世界上已经有太多的人学会了现在通行的十进制记数法．要改，将涉及整个社会，要遇到不可克服的阻力，要付出巨大的代价.

4. 亡羊补牢，犹未为晚

现在，我们指手划脚地大谈方块汉字的缺点，大谈十进制记数法的不完美之处，除了表示自己比古人高明之外，又有什么用呢？这确实是“马后炮”．然而，古人也确有高明之处，“亡羊补牢，犹未为晚”．这句古训至今还是不错的．既然当不成事先诸葛亮，当一当事后诸葛亮吧！

我们是不是应当仔细查看查看，现在我们千方百计地教给孩子们的许多东西当中，还有没有这样的“珍贵遗产”呢？有朝一日会不会突然发现，可以用更好的东西取代它，对比之下，它又成了沉重的负担，但又为时已晚，又让后人指手划脚地当事后诸葛亮呢？

最基本的两大学科是语言文字和数学．语言文字，我们

除了接受古人遗产之外，办法不多，只有小改小革——比如简化字、汉语拼音．而数学教育的内容如何改革，确是二三十年以来世界各国的数学家和数学教育家十分关心的事．这里不想一一介绍各种方案的基本设想和实践中的优劣成败，我们想从另一个角度提出问题——从系统科学的观点看看，数学教育的内容能不能进一步“优化”呢？

方块汉字的产生，具体因素很复杂．但有一点是可以肯定的，“仓颉”们那时没有系统科学的知识，不懂得信息论，造字时缺乏通盘计划，没有进行“优化”！

十进制的现行记数系统，它的产生，也不是一个完全自觉的过程．没有谁应用系统科学的观点，对它进行优化．

随着科学技术的发展，随着电脑的普及，数学正迅速地向各个学科渗透．数学知识将日益普及．一旦普及得够多，改革起来就会特别困难．就象现在想改革方块字、改革记数系统那样困难了．

抓紧吧，现在还来得及！

§2 国王向欧几里德提出的请求

1. 第一部几何教科书

据说，世界上再版次数最多、流传最广的书，除了圣经之外，就要数欧几里德的《几何原本》了. 圣经的流传靠宗教的力量，而《几何原本》的不胫而走却靠它自己在科学上的出色成就.

《几何原本》把当时人类所掌握的相当丰富但却凌乱无章的几何知识熔于一炉，铸成一个空前严整的科学体系，这在人类认识世界的历史上，实为一大创举. 同时，《几何原本》又以它无可争辩的威望，自然而然地成为几何课程的第一部教材. 它占领中学几何课堂两千年而历久不衰. 至今，初中的几何教本虽已大有删改，但仍不外乎是《原本》的变形或缩影.

事实表明，欧几里德真是一箭双雕. 因为原本不仅在科学上是成功的，在教育上也是成功的. 它把生动直观的图形与严密的论证紧密结合起来，它的出发点简明而令人难以争辩；特别是，它能向学生提供丰富多采而且几乎是具有从易到难的任何一级难度的习题，因而能激起学生的高度兴趣，甚至产生如痴如醉的热情. 在这一方面，任何课程都无与伦比.