GAOZHONGSHUXUEJINGBIAN

高二用

高中数学精编

代 数（下）

浙江教育出版社

高中数学精编

代　　数

下册

浙江教育出版社

高中数学精编

代　数

下册

许纪传　钱孝华　丁宗武

江焕棣　陶敏之　谢玉兰

浙江教育出版社出版　辽宁人民出版社重印

辽宁省新华书店发行　赤峰印刷集团公司印刷

开本 787×1092　1/32　印张 8.5　字数 175,000

1997 年 5 月第 2 版　1997 年 6 月沈阳第 6 次印刷

ISBN 7-5338-2538-1/G·2530

定价:7.10 元

说　明

《高中数学精编》自1981年出版以来，已经成为广大学生十分喜爱的学习辅导用书，同时也是众多教师卷不离手的教学参考资料。

《高中数学精编》之所以倍受读者青睐，一方面因为“典型题型与解题指导”栏目系统地归纳了解题的方法和技巧，为读者指点迷津；另一方面收编的题目新颖、灵活、典型，知识和技能的覆盖面广，对训练思维、提高解题能力很有助益。

此次《高中数学精编》经过重新修订，为了使它更加实用、方便，我们按照“小单元”进行编写，与教材的同步性得到了更加充分的体现，也为教师在教学过程中的选题提供了更多的便利。

本书中所选的题目以A组题、B组题为主，其中A组题属基本要求，B组题略有提高，或有一定的综合性，C组题数量较少，难度较大，可供学有余力的学生选用。

编　者

1997年3月

目　录

第五章 不 等 式

一、不等式的性质

【典型题型和解题技巧】

1. 两数(式)大小的比较

两数(式)大小的比较，最基本和首选的方法当属“求差法”. 此外，也可利用函数(二次函数、幂函数、指数函数和对数函数等)的单调性，并结合不等式性质进行比较.

例 1 当 $a>b>0$ 时，比较$\frac{2a+b}{a+2b}$和$\frac{a}{b}$的大小.

解：当 $a>b>0$ 时，$\because \frac{2a+b}{a+2b}-\frac{a}{b}=\frac{2ab+b^2-a^2-2ab}{(a+2b)b}=\frac{b^2-a^2}{b(a+2b)}=\frac{(b+a)(b-a)}{b(a+2b)}<0$,

$\therefore \frac{2a+b}{a+2b}<\frac{a}{b}$.

注意 在求差的过程中，因式分解始终是相当重要的手段.

例 2 已知 $a>0, a\neq 1, m>n>0$，比较 $A=a^m+\frac{1}{a^m}$和 $B=a^n+\frac{1}{a^n}$的大小.

解：$\because A-B=\left(a^m+\frac{1}{a^m}\right)-\left(a^n+\frac{1}{a^n}\right)=(a^m-a^n)+\left(\frac{1}{a^m}-\frac{1}{a^n}\right)=(a^m-a^n)-\frac{a^m-a^n}{a^{m+n}}=\frac{(a^m-a^n)(a^{m+n}-1)}{a^{m+n}}$,

若 $a>1$，则由 $m>n>0$ 得 $a^m>a^n$，$a^{m+n}>1$，

$\therefore A-B>0$；

若 $0<a<1$，则由 $m>n>0$ 得 $a^m<a^n$，$a^{m+n}<1$，

$\therefore A-B>0$，

故恒有 $A>B$.

2. 不等式性质的正确运用

正确地运用不等式的性质，是学好不等式内容的关键.在进行不等式变形的时候，要注意“理论依据”是什么，切忌“随心所欲”.

(1)乘以“数(式)”时要当心.

性质——若 $a>b$，$c>0$，则 $ac>bc$；若 $a>b$，$c<0$，则 $ac<bc$.

不等式两边乘以一个数(式)时，一定要注意这个数(式)的符号.

例 3 如果 $a>b$，则下列各式中正确的是( )

(A)$a\lg x>b\lg x$，$(x>0)$. (B)$ax^2>bx^2$.

(C)$a^2>b^2$. (D)$2^x\cdot a>2^x\cdot b$.

解：$\because \lg x\in R$，当 $\lg x\leqslant 0$ 时，$a\lg x>b\lg x$ 不成立；

当 $x=0$ 时，$ax^2=bx^2$，$ax^2>bx^2$ 不成立；

又 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$，由 $a>b$ 知 $a-b>0$，但 $a+b$ 的符号不定，故 $a^2>b^2$ 不成立.

由指数函数的性质知，$2^x>0$，故 $2^xa>2^xb$ 成立，因此应选(D).

注意 如果 $a>b$，那么 $a^{2n-1}>b^{2n-1}(n\in N)$ 是成立的，你能证明吗？

(2)在“放、缩”时要当心.

性质——若 $a<b,b<c$，那么 $a<c$；若 $a>b,b>c$，那么 $a>c$.

在运用以上性质时，一定要注意不等式的"同向性".

【训练题】

(A)

1. 设 $ab>0$，且 $\frac{c}{a}>\frac{d}{b}$，则下列各式中，恒成立的是(　)

   (A) $bc<ad$.　　(B) $bc>ad$.

   (C) $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$.　　(D) $\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$.

2. 下列命题中，不正确的一个是(　)

   (A)若 $\sqrt[3]{a}>\sqrt[3]{b}$，则 $a>b$.

   (B)若 $a>b,c>d$，则 $a-d>b-c$.

   (C)若 $a>b>0,c>d>0$，则 $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$.

   (D)若 $a>b>0,ac>bd$，则 $c>d$.

3. 已知 $x<y<0$，则有(　)

   (A) $0<x^2<xy$,　　(B) $y^2<xy<x^2$.

   (C) $xy<y^2<x^2$.　　(D) $y^2>x^2>0$.

4. 若 $a=\log_{0.2}0.3$，$b=\log_{0.3}0.2$，$c=1$，则 a、b、c 的大小关系是(　)

   (A) $a>b>c$.　　(B) $b>a>c$.

   (C) $b>c>a$.　　(D) $c>b>a$.

5. 用不等号("$>$"或"$<$")填空：

   (1)若 $a\neq b$，则 a^2+3b^2 ____ $2b(a+b)$；

   (2)若 $c>1$，则 $\sqrt{c+1}-\sqrt{c}$ ____ $\sqrt{c}-\sqrt{c-1}$；

   (3)若 $a>b,c>d$，且 a 与 d 都是负数，则 ac ____ bd.

6. 已知“$a>b, a-\frac{1}{a}>b-\frac{1}{b}$”同时成立，则 ab 应满足的条件是__________.

7. (1)已知 $a>0, b>0$，且 $a\neq b$，比较 $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}$ 与 $a+b$ 的大小；

(2)已知 $0<\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$，比较 $\frac{b}{a+b}$ 与 $\frac{d}{c+d}$ 的大小.

(B)

8. 若 $x>y>1, 0<a<1$，则下列各式中正确的一个是(　)

(A) $x^{-a}>y^{-a}$.　　(B) $(\sin a)^x>(\sin a)^y$.

(C) $\log_{\frac{1}{a}}x<\log_{\frac{1}{a}}y$.　　(D) $1+a^{x+y}>a^x+a^y$.

9. (1)已知 $a\in R$，比较 $\frac{1}{1+a}$ 与 $1-a$ 的大小.

(2)设 $a>0, a\neq 1, t>0$，比较 $\frac{1}{2}\log_a t$ 和 $\log_a\frac{t+1}{2}$ 的大小.

10. (1)已知 $x>y>0$，比较 $\sqrt{\frac{y^2+1}{x^2+1}}$ 与 $\frac{y}{x}$ 的大小；

(2)已知 a、b、m、n 都是正实数，且 $m+n=1$，比较 $\sqrt{ma+nb}$ 和 $m\sqrt{a}+n\sqrt{b}$ 的大小.

二、不等式的证明

【典型题型和解题技巧】

1. 不等式证明的常用方法

(1)比较法. 比较法有“差值比较”和“商值比较”两种，即若 $a-b>0$，那么 $a>b$；

若 $\begin{cases}\frac{a}{b}>1\\ b>0\end{cases}$，那么 $a>b$.

例 1　已知 $a+b\geqslant 0$，求证：$a^3+b^3\geqslant a^2b+ab^2$.

证明：$\because (a^3+b^3)-(a^2b+ab^2)=a^2(a-b)-b^2(a-b)=(a-b)(a^2-b^2)=(a-b)^2(a+b)$，

又 $(a-b)^2\geqslant 0$，$a+b\geqslant 0$，$\therefore (a-b)^2(a+b)\geqslant 0$，

即 $a^3+b^3\geqslant a^2b+ab^2$.

注意　此例可推广为：若 $a\geqslant b\geqslant 0$，则 $a^n+b^n\geqslant a^{n-1}b+ab^{n-1}\geqslant a^{n-2}b^2+a^2b^{n-2}\geqslant a^{n-3}b^3+a^3b^{n-3}\geqslant\cdots$，$(n\geqslant 2, n\in N)$.

例 2　设 a、$b\in R^+$，且 $a\neq b$，求证 $a^ab^b>a^bb^a$.

证明：由所证的不等式对于 a、b 具有轮换对称性，故不妨可设 $a>b>0$，则

$$\frac{a^ab^b}{a^bb^a}=a^{a-b}\cdot b^{b-a}=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}.$$

$\because a>b>0$，$\therefore \dfrac{a}{b}>1$，$a-b>0$，

于是 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}>\left(\dfrac{a}{b}\right)^0=1$

即 $\dfrac{a^ab^b}{a^bb^a}>1$，又 $a^bb^a>0$，$\therefore a^ab^b>a^bb^a$.

(2)综合法. 本书的所谓“综合法”，是以“基本不等式”为基础，并利用不等式的性质进行证明的一种方法.

基本不等式是：

若 a,b,c 都是正数，则有

$$\frac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

$$\frac{3}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}\leqslant\sqrt[3]{abc}\leqslant\frac{a+b+c}{3}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

以上不等式自左至右分别称为调和平均值(记作 H)、几何平均值(记作 G)、算术平均值(记作 A)和平方平均值(记作 Q),即 $H\leqslant G\leqslant A\leqslant Q$.

例 3 (1)已知 $a,b,c\in R$,求证:$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$;

(2)已知 $a,b,c>0$,求证:①$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant 4$,

②$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 9$.

证明:(1)$\because a^2+b^2\geqslant 2ab,b^2+c^2\geqslant 2bc,c^2+a^2\geqslant 2ca$,三式相加并除以 2,便得 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$;

(2)①$\because a,b,c>0,\therefore a+b\geqslant 2\sqrt{ab}>0,\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{ab}}>0$,两式相乘得

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{\frac{1}{ab}}=4.$$

②$\because a,b,c>0,\therefore a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}>0$,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}>0,$$

两式相乘得

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 3\sqrt[3]{abc}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=9.$$

注意 ①本例的证明中运用了“连加”和“连乘”的技巧,“连加”和“连乘”在不等式的证明中用得较为频繁.

②记住本例的结论和证明方法,将会对你很有助益.

例 4 若正数 a,b 满足 $a+b=1$,求证 $\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}\leqslant 2\sqrt{2}$.

证明:由 $A\leqslant Q$,有

$$\frac{\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}}{2}\leqslant\sqrt{\frac{(2a+1)+(2b+1)}{2}}$$
$$=\sqrt{\frac{2(a+b)+2}{2}}=\sqrt{2}.$$
$\therefore \sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}\leqslant 2\sqrt{2}$.

(3)分析法,所谓分析法,即从命题的结论出发,“逆向”地寻找证明途径的一种解题方法,在分析时要特别注意过程的可逆性.

例 5 已知 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,且 $\alpha\neq\beta$,

求证 $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta>2\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$.

证明:欲证的不等式,即为$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}>\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$,

即需证$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}>\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

$\because \frac{\alpha+\beta}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

$\therefore \sin\frac{\alpha+\beta}{2}>0$,而 $\sin(\alpha+\beta)=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$,

故只需证$\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\alpha\cos\beta}>\frac{1}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

显然,$\cos\alpha\cos\beta>0$,$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}>0$,也就是只需证

$\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}>\cos\alpha\cos\beta$. $\because \cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[1+\cos(\alpha$

$+\beta)]-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]=\frac{1}{2}[1-\cos(\alpha-\beta)]>$

$0,(-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2},\alpha\neq\beta)$,

故 $\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}>\cos\alpha\cos\beta$ 成立，∴原不等式成立.

注意 ①分析法一般在需要去分母、约项或不等式两边平方时采用；②分析法适用于有一定难度的证明题，由于分析法的过程不易写好，因此我们主张此法宜“慎用”.

(4)数学归纳法(见第六章)

(5)反证法　前述几种方法均属直接证法. 当直接证明命题有困难时，或者当命题以“否定”的形式给出时，通常可考虑用反证法.

例 6　记 $f(x)=x^2+ax+b$，求证：$|f(1)|$，$|f(2)|$，$|f(3)|$中至少有一个不小于$\frac{1}{2}$.

证明：假设$|f(1)|<\frac{1}{2}$，$|f(2)|<\frac{1}{2}$，$|f(3)|<\frac{1}{2}$，则

$$\begin{cases}-\frac{1}{2}<1+a+b<\frac{1}{2},\\-\frac{1}{2}<4+2a+b<\frac{1}{2},\\-\frac{1}{2}<9+3a+b<\frac{1}{2};\end{cases}\text{于是有}\begin{cases}-\frac{3}{2}<a+b<-\frac{1}{2},\\-\frac{9}{2}<2a+b<-\frac{7}{2},\\-\frac{19}{2}<3a+b<-\frac{17}{2}.\end{cases}$$

由前两式得 $-4<a<-2$，

由后两式得 $-6<a<-4$.

这两式显然互相矛盾，故假设不成立，

∴原命题正确.

2. 不等式证明的常用技巧

(1)换元技巧

①三角换元，较常用的三角换元有：

若 $0\leqslant x\leqslant 1$，则可令 $x=\sin\alpha\left(0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$或 $x=\sin^2\alpha$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$；

若 $x^2+y^2=1$，则可令 $x=\cos\alpha, y=\sin\alpha(0\leqslant\alpha<2\pi)$；

若 $x^2-y^2=1$，则可令 $x=\sec\alpha, y=\operatorname{tg}\alpha(0\leqslant\alpha<2\pi)$；

若 $x\geqslant 1$，则可令 $x=\sec\alpha\left(0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$；

若 $x\in R$，则可令 $x=\operatorname{tg}\alpha\left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

例 7 已知 $-1\leqslant x\leqslant 1, n\geqslant 2, n\in N$，求证

$$(1-x)^n+(1+x)^n\leqslant 2^n.$$

证明：由题意，令 $x=\cos\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$，则

$1-x=2\sin^2\frac{\alpha}{2}, 1+x=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$，于是，

$$\begin{aligned}(1-x)^n+(1+x)^n&=2^n\left(\sin^{2n}\frac{\alpha}{2}+\cos^{2n}\frac{\alpha}{2}\right)\\&\leqslant 2^n\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)\\&=2^n.\end{aligned}$$

②均值换元.

例 8 已知 $x+2y+3z=12$，

求证 $x^2+2y^2+3z^2\geqslant 24$.

证明：令 $x=2+\alpha, y=2+\beta, z=2+\gamma$，

且 $\alpha+2\beta+3\gamma=0$，

则 $x^2+2y^2+3z^2=(2+\alpha)^2+2(2+\beta)^2+3(2+\gamma)^2=24+4(\alpha+2\beta+3\gamma)+\alpha^2+2\beta^2+3\gamma^2=24+\alpha^2+2\beta^2+3\gamma^2\geqslant 24$.

注意 若 $x_1+x_2+\cdots+x_n=S.(n\in N)$，均值为$\frac{S}{n}$. 特别，若 $a+b=1$，则可令 $a=\frac{1}{2}+t, b=\frac{1}{2}-t$.

③设差换元.

例 9 已知 $a,b,c\in R^+$，求证 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$，(当且仅当 $a=b=c$ 时取等号).

证明:根据给出式子的对称轮换性，不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$，令 $a=b+x, c=b-y$，其中 $x\geqslant 0, y\geqslant 0$. 则 $a^3+b^3+c^3-3abc=(b+x)^3+b^3+(b-y)^3-3b(b+x)(b-y)=(x^2+xy+y^2)(3b+x-y)=(x^2+xy+y^2)(a+b+c)$.

$\because a+b+c>0$，而 $x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2\geqslant 0$，

故 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$，当且仅当 $x=y=0$ 时取等号.

(2)构造技巧

①构造函数. 所谓"构造函数"，即构造一个单调函数，来完成不等式的证明.

例 10 已知 $x>0$，求证 $x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+\frac{1}{x}}\geqslant\frac{5}{2}$.

证明:构造函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$，$(x>0)$，则 $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$. 设 $2\leqslant\alpha<\beta$，

由 $f(\alpha)-f(\beta)=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)-\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)=(\alpha-\beta)+\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)=\frac{(\alpha-\beta)(\alpha\beta-1)}{\alpha\beta}<0$，知 $f(x)$ 在 $x\geqslant 2$ 上是增函数，于是左边$=f\left(x+\frac{1}{x}\right)\geqslant f(2)=\frac{5}{2}$.

注意 请读者思考，为什么不能有 $x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+\frac{1}{x}}\geqslant 2$?

②构造方程. 所谓"构造方程"，即先设法构造一个有实数解的一元二次方程(恒等变形构造方程，或利用韦达定理构造方程)，再利用 $\Delta\geqslant 0$ 完成证明.

例 11 已行实数 a,b,c 满足 $a+b+c=0$ 和 $abc=2$，求证：a,b,c 中至少有一个不小于 2.

证明：由题设，显然 a,b,c 中必有一个是正数，不妨设 $a>0$，则 $\begin{cases}b+c=-a,\\ bc=\frac{2}{a}.\end{cases}$ 这说明 b,c 是二次方程 $x^2+ax+\frac{2}{a}=0$ 的两个实数根，由 $\Delta\geqslant 0$，得 $a^2-\frac{8}{a}\geqslant 0$，即 $a^3\geqslant 8$，$\therefore a\geqslant 2$.

③构造图形. 先构造一个平面几何图形，再利用"平面几何"或"平面解析几何"的知识来证明不等式，这便是"构造图形"的要旨.

例 12 已知 $0<a<1,0<b<1$，

求证 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a-1)^2+b^2}+\sqrt{a^2+(b-1)^2}+\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2}\geqslant 2\sqrt{2}$.

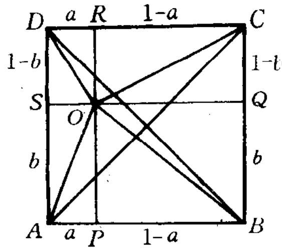
略证：构造单位正方形 $ABCD$ 如图 1，O 是 $ABCD$ 内一点，O 到 AD、AB 的距离分别为 a,b. 则由 $|AO|+|BO|+|CO|+|DO|\geqslant|AC|+|BD|$，即可得证.

(3)放缩技巧

所谓"放缩"，即欲证 $a>b$，可换证 $a>c$ 且 $c>b$；欲征 $a<b$，可换证 $a<c$ 且 $c<b$.

例 13 已知实数 x,y,z 不全为零，

求证 $\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}+\sqrt{z^2+zx+x^2}>\frac{3}{2}(x+y+z)$.



（图 1）

证 明：$\because$ $\sqrt{x^2+xy+y^2}=\sqrt{\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2}\geqslant\sqrt{\left(x+\frac{y}{2}\right)^2}=\left|x+\frac{y}{2}\right|\geqslant x+\frac{y}{2}$,

同理 $\sqrt{y^2+yz+z^2}\geqslant y+\frac{z}{2}$, $\sqrt{z^2+zx+x^2}\geqslant z+\frac{x}{2}$.

由于 x,y,z 不全为零，故上述三式中至少有一个取不到“=”，

将上述三式相加，即得所证的式子.

(4)拆项技巧

所谓“拆项”，即将一项拆为若干项的和或差，以便能有效地“利用基本不等式”或者能达到消项的目的.

例 14 已知 $x\geqslant0,y\geqslant0$,

求证 $\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{4}(x+y)\geqslant x\sqrt{y}+y\sqrt{x}$.

证明：左边 $=\frac{1}{2}(x+y)\left[(x+y)+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}(x+y)\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)+\left(y+\frac{1}{4}\right)\right]\geqslant\sqrt{xy}\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)+\left(y+\frac{1}{4}\right)\right]\geqslant\sqrt{xy}\left[2\sqrt{\frac{1}{4}x}+2\sqrt{\frac{1}{4}y}\right]=\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})=x\sqrt{y}+y\sqrt{x}$.

例 15 求证：$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{7}{4}$, $(n\in N)$.

证明：左边 $<1+\frac{1}{4}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}$