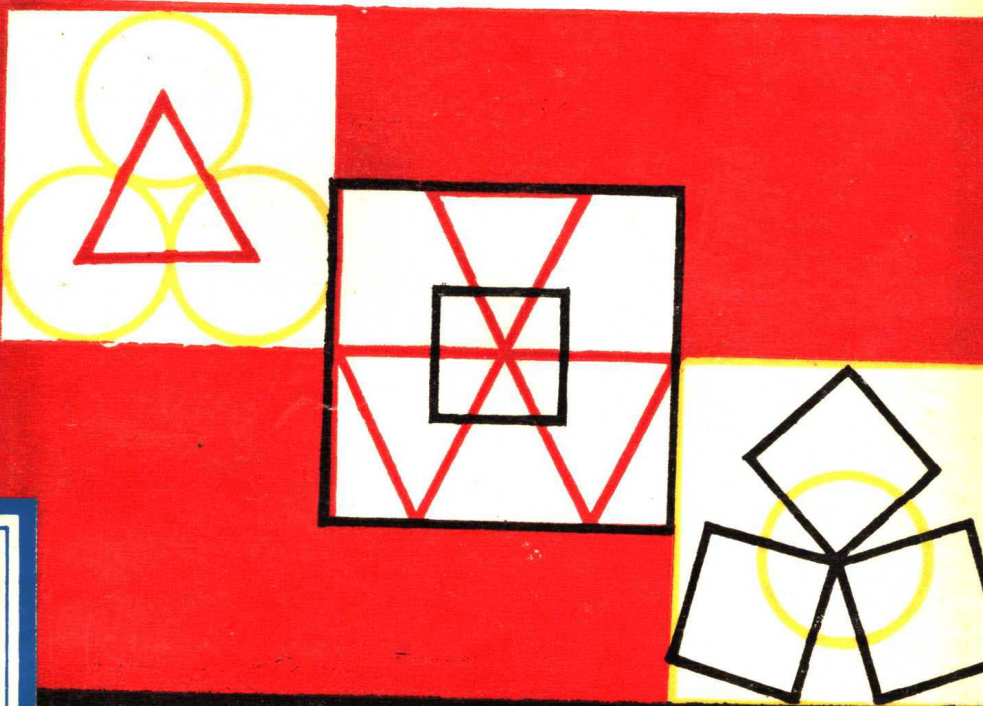


翟连林 曾星发 编著

初中数学

解题方法与技巧



中国食品出版社

初中数学解题 方法与技巧

翟连林 曾星发 编著

中国食品出版社

内 容 提 要

本书从提高初中学生数学基础知识水平的要求出发，全面深入地讲述了怎样学好数学概念；怎样学习定理、公式和法则；学会运用解题方法和技巧以及怎样进行综合训练等四大部分。

本书可供初中教师和学生阅读，也可作为职工文化补习的复习用书。

初中数学解题方法与技巧

翟连林 曾星发 编著

中国食品出版社出版

新华书店北京发行所发行

通县向阳印刷厂印刷

*

787×1092 32开 3.125印张 字数176千字

1989年5月第1版 1989年5月第1次印刷

印数：—8500

ISBN7-80044-147-4/O·001

定价：3.90元

目 录

第一章 直接利用数学概念解题	(1)
一、怎样运用定义.....	(1)
二、定义的顺用举例.....	(2)
三、定义的逆用举例.....	(3)
四、定义的顺用、逆用、错用举例.....	(4)
五、归纳总结数学概念.....	(6)
六、典型例题.....	(24)
第二章 直接利用定理、公式和法则解题	(30)
一、定理、公式和法则.....	(30)
二、学习定理、公式和法则应注意的几点.....	(46)
三、典型例题.....	(47)
第三章 常用的解题方法和技巧	(58)
一、“大”方法.....	(58)
1. 配方法.....	(58)
2. 换元法.....	(65)
3. 待定系数法.....	(71)
4. 直接证法与间接证法.....	(75)
二、“小”方法.....	(83)
1. 去绝对值符号法类.....	(83)
2. 去根号法类.....	(86)
3. 大小比较法类.....	(91)

4. 部分改变法类	(99)
5. 用判别式、韦达定理解题类	(102)
6. 加项为零法类	(113)
7. 对数类	(116)
8. 函数类	(125)
9. 解三角形类	(131)
10. 参数类	(143)
11. 面积法类	(150)
三、解题技巧	(159)
1. 一般解法与特殊解法	(159)
2. 技巧的来源	(160)
3. 技巧举例	(161)
(1) 特殊因式分解法	(161)
(2) “1”的应用	(163)
(3) 添辅助式法	(164)
(4) 分解部分分式的应用	(166)
(5) 辅助圆的应用	(171)
(6) 杂例	(172)
第四章 综合训练	(178)
一、进行一题多解的训练	(178)
二、进行一题多变的训练	(182)
三、综合训练题及解答	(183)

第一章 直接利用数学概念解题

初中数学中，数、式、方程、函数、图形等都是最基本的概念。这些概念是整个数学的基础。如果概念不清，就会思维混乱，计算、判断、推理、画图就会出现错误。

不少同学无论在平时的学习，还是在复习中，对数学概念的重要性认识不足，因此在作业中以及考试的试卷中，出现各种各样概念性错误。

学习数学概念的方法是：正确理解、牢固记忆，在此基础上应该有意识地运用。正确理解是指两方面：一方面，对没有定义的少数概念要理解其本质属性。以直线为例，它无长短，因此在画直线时，依据需要，可长可短，就不会有“将直线延长”的错误说法了；它无粗细，因此两直线可以重合；它是直的，因此在同一平面上的两条平行直线永不相交。另一方面，对绝大多数给予了定义的概念，要牢记它的条件(包括对象、要素、范围、限制、前提等)和结论(包括名称、数量关系等)。理解和牢记的目的，在于运用，通过运用，又能加深理解和记忆。解题中，不会运用或不是有意识地运用概念，这是同学们的通病。

一、怎样运用定义

我们知道，定义是个真命题，因此可以直接运用定义(不妨简称为顺用)解题，定义的逆命题也是真命题，因此也可以运用定义的逆命题(不妨简称为逆用)解题。

二、定义的顺用举例

判断正误。正确的在题后的括号内画“√”，错误的画“×”。

- (1) 规定了原点、正方向和长度的直线叫做数轴。 ()
- (2) 正数、负数和零统称为有理数。 ()
- (3) 将 $x^2 - \left(\frac{1}{y}\right)^2$ 因式分解，得 $\left(x + \frac{1}{y}\right)\left(x - \frac{1}{y}\right)$ 。 ()
- (4) a 的倒数是 $\frac{1}{a}$ 。 ()
- (5) $a^0 = 1$ 。 ()
- (6) a^m 与 a^{-m} 互为相反数。 ()
- (7) $\sqrt{x^2 + 2x^3} = x\sqrt{1 + 2x}$ 。 ()
- (8) 从直线外一点到直线的垂线长，叫做点到直线的距离。 ()
- (9) 两个矩形一定相似。 ()
- (10) 由线段首尾连结的图形叫多边形。 ()
- (11) 如果两个图形是轴对称图形，则这两个图形全等。 ()
- (12) 垂直于半径的直线是圆的切线。 ()
- (13) 顶点在圆上的角叫圆周角。 ()
- (14) 弧长相等的弧叫做等弧。 ()
- (15) 连结两点的线段，叫做这两点间的距离。 ()
- (16) a 、 b 、 c 是 $\triangle ABC$ 的三边，则 $\sin A = \frac{a}{c}$ 。 ()

$$(17) \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ. \quad ()$$

以上题目，我们只需直接运用定义(即顺用定义)去判断其是非。如果概念不清，就会把上列题中的很多题目判断成正确的。其实，它们都是错的。若能翻阅定义原文，便能明辨其错误之所在了。

三、定义的逆用举例

填空：

(1) 因式分解的对象是_____。

(2) $7a^m b^4$ 与 $-2a^{n-2} b^{m+1}$ 是同类项，则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$ ，
 $n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) $|g|g|g|x=0$ ，则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(4) 已知样本的标准差为 a ，则样本的方差是_____。

(5) 命题“对顶角相等”的题设是_____，结论是_____。

(6) P 是线段 AB 的中点，则有 $PA \underline{\hspace{1cm}} PB$ 。

(7) 若 $\angle AOB$ 为平角，则 A 、 O 、 B 三点必_____。

(8) 已知 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ，则对应角_____，对应边_____。

(9) 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $C=90^\circ$ ，直角边 a 与斜边 c 之比为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，则 $A = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(10) 已知方程组 $\begin{cases} x+2y=3a-2b \\ 2x-y=a+4b+4 \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x=3, \\ y=2. \end{cases}$

则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案：(1) 多项式；(2) $m=3, n=5$ ；(3) $10^{10^{10}}$ ；
 (4) a^2 ；(5) 对顶角，相等；(6) $=$ ；(7) 共线；(8) 相等，
 成比例；(9) 45° ；(10) $2, -\frac{1}{2}$ 。

上述题目，同学们都能填出正确答案，但不少同学却意识不到它们是定义的逆用。

四、定义的顺用、逆用、错用举例

顺、逆、错混合用的题目，在选择题、改错题中较为多见。

选择填空(将正确答案的字母代号填入题中的括号内)：

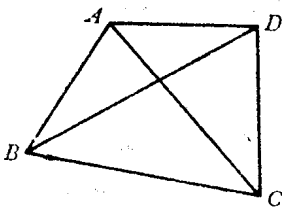


图 1-1

(1) 用 x 表示一个两位数， y 表示一个三位数，如果把 x 放在 y 的左边组成的五位数可表示为 ()。

- A. $10x+y$ ； B. $x+y$ ；
 C. $100x+y$ ； D. $1000x+y$ 。

(2) 在图1-1中能找到 ()。

A. 对顶角； B. 同位角； C. 内错角； D. 外错角； E. 同旁内角。

(3) $\sqrt{16}$ 的平方根是 ()。

- A. 4； B. ± 4 ； C. 2； D. ± 2 。

(4) 把“ π 是无理数”看作原命题，它的否命题是：

()

A. 不是无理数就不是 π ；

B. 无理数是 π ；

C. 不是 π 就不是无理数;

D. π 不是有理数.

(5) 若 a 与 b^2-2 成正比例, b 与 $c-1$ 成反比例, 当 $a=4$ 时, $b=2$, $c=2$; 当 $a=-2$ 时, c 的值是()

A. 3; B. ± 3 ; C. -1 ; D. 3或 -1 .

(6) 下面是给出解答的习题, 其中做对的个数是()

$$1) \sqrt{\frac{-2}{x}} = \frac{-2}{x} \Rightarrow \sqrt{\frac{-2x}{x^2}} = \frac{-2}{x} \Rightarrow \sqrt{-2x} = -2.$$

\therefore 方程无解.

$$2) \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{-a} = \sqrt[3]{a(-a)^2} = \sqrt[3]{a^3} = \sqrt{a}.$$

$$3) (\sqrt{x})^2 = |x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

A. 1; B. 2; C. 3; D. 0.

(7) 若 $y=(k-2)x^{|k|-1}$ 是正比例函数, 则 k 的值是()

A. ± 2 ; B. 2; C. -2 ; D. 0.

(8) 等腰三角形的一个外角的余弦值为 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则它的顶角是()

A. 30° ; B. 60° ; C. 120° ; D. 30° 或 120° .

(9) 为了了解某地学生的体重情况, 从中抽取 200 名进行检查. 这个问题中, 总体是()

A. 200; B. 200 名学生; C. 某地全部学生; D. 学生的体重.

(10) 0.320是四舍五入得到的近似数，它是精确到()位。

A. 0.001; B. 保留三个有效数字; C. 千分; D. 百

(11) 1.320×10^5 是用科学记数法表示的近似数，它的有效数字的个数是()

A. 6; B. 3; C. 4; D. 不确定。

(12) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ 可以叫做()

A. 根式; B. 分式; C. 无理式; D. 代数式; E. 有理式。

(13) “若 a 和 b 都不是零，则 ab 不等于零”的逆否命题是()

A. ab 等于零，则 a 和 b 都是零;

B. ab 等于零，则 a 和 b 不都是零;

C. ab 等于零，则 a 和 b 至少有一个是零。

如果概念不清，就会填错答案。

以上各题的正确答案如下：

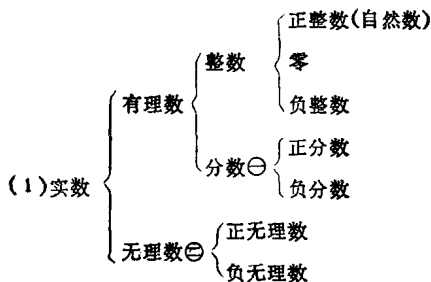
(1)D; (2)A; (3)B; (4)C; (5)D; (6)D; (7)C;
(8)D; (9)C; (10)C; (11)C; (12)A、D、E; (13)C。

在试题日趋标准化的今天，直接运用概念解答的题目，将越来越多，如判断题、填空题、选择题、改错题等。这更需要我们重视概念的学习。

五、归纳总结数学概念

学习概念的过程中，还应归纳总结数学概念，以利比较和记忆。

1. 实数的有关概念



(2) 数轴：规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴。

数轴上的所有点与全体实数是一一对应的。

(3) 相反数：实数 a 和 $-a$ 叫做互为相反数；零的相反数是零。

(4) 绝对值：一个正实数的绝对值是它本身；一个负实数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零。

从数轴上看，一个数的绝对值就是表示这个数的点离开原点的距离。

(5) 倒数：1 除以一个数的商，叫做这个数的倒数；零没有倒数。

(6) 实数比较大小：在数轴上表示的两个实数，右边的总比左边的大。

正数都大于零；负数都小于零；正数大于一切负数；两个负数，绝对值大的反而小。

(7) 非负数：零和正数叫非负数。算术根、值对值、

\ominus 可化为有限小数或无限循环小数。

\ominus 无限不循环小数。

$\sqrt[n]{a}$ 、 $a^{2/n}$ 是非负数.

2. 代数式的有关概念

(1) 代数式 \ominus $\begin{cases} \text{有理式} \begin{cases} \text{整式} \begin{cases} \text{单项式} \\ \text{多项式} \end{cases} \\ \text{分式} \end{cases} \\ \text{无理式} \end{cases}$

(2) 有理式: 只有加、减、乘、除、乘方运算(包括数字开方运算)的代数式, 叫做有理式.

(3) 无理式: 含有关于字母开方运算的代数式, 叫无理式.

(4) 整式: 除式中不含有字母的有理式叫做整式.

(5) 因式分解: 把一个多项式化成几个整式的积的形式, 叫做多项式的因式分解.

(6) 分式: 除式中含有字母的有理式叫做分式.

(7) 根式: 表示方根 \ominus 的代数式叫做根式 \ominus .

(8) 算术根: 正数 a 的正的 n 次方根, 叫做 a 的 n 次算术根, 零的 n 次算术根是零.

正数 a 的正的平方根, 也叫做 a 的算术平方根(简称算术根), 零的算术根是零.

(9) 最简根式: 满足以下三条的根式称为最简根式:

1) 被开方数的每一个因式的指数都小于根指数;

\ominus 用代数运算符号(即加、减、乘、除、乘方、开方)把数或表示数的字母结起来的式子.

\ominus 如果 $x^n = a$ (n 是大于1的整数), 那么 x 叫做 a 的 n 次方根. 特别地, 当 $n=2$ 时, x 叫做 a 的平方根, 当 $n=3$ 时, x 叫 a 的立方根.

\ominus 根式与无理式是交叉的概念, 例如 $\sqrt{2}$ 是根式, 但不是无理式; $\sqrt{2x+1}$ 是无理式, 但不是根式; \sqrt{a} 既是根式又是无理式.

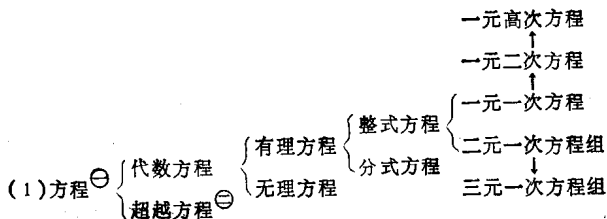
- 2) 被开方数不含分母;
 3) 被开方数的指数和根指数是互质数.

(10) 同类根式: 几个根式化成最简根式后, 如果被开方数都相同, 根指数也都相同, 这几个根式叫做同类根式.

(11) 同次根式与异次根式: 根指数相同的根式叫做同次根式; 根指数不同的根式叫做异次根式.

(12) 分母有理化: 把分母中的根号化去叫做分母有理化. 两个含有二次根式的代数式相乘, 如果它们的积不含有二次根式, 则这两个代数式互为有理化因式.

3. 方程(组)的有关概念



(2) 方程的解: 能够使方程左右两边的值相等的未知数的值, 叫做方程的解.

(3) 解方程: 求出方程的解或者确定方程无解的过程, 叫做解方程.

(4) 同解方程: 如果第一个方程的解都是第二个方程的解, 并且第二个方程的解也都是第一个方程的解, 那么这两个方程叫做同解方程.

(5) 分式方程: 分母中含有未知数的方程叫做分式方

⊖含有未知数的等式.

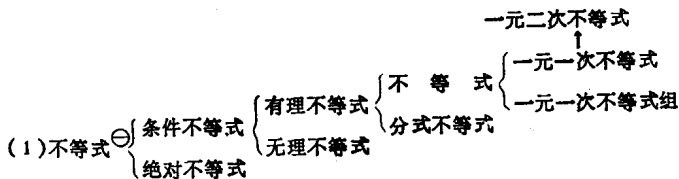
⊖高中学习的指数方程、对数方程、三角方程都是超越方程.

程.

(6) 无理方程: 根号内含有未知数的方程叫做无理方程.

(7) 二元一次方程组: 含有相同的两个未知数的两个一次方程所组成的方程组, 叫做二元一次方程组.

4. 不等式(组)的有关概念



(2) 不等式(组)的解集: 在含有未知数的不等式中, 能使不等式成立的未知数的所有值组成的集合, 叫做这个不等式的解集。在不等式组中, 各个不等式的解集的公共部分叫做这个不等式组的解集。

(3) 解不等式(组): 求不等式(组)的解集或确定其无解的过程, 叫做解不等式(组)。

(4) 同解不等式: 如果两个不等式的解集相同, 那么这两个不等式叫做同解不等式。

不等式同解原理 1 不等式的两边都加上(或都减去)同一个数或同一个整式, 所得的不等式与原不等式是同解不等式;

不等式同解原理 2 不等式的两边都乘以(或都除以)同一个正数, 所得的不等式与原不等式是同解不等式;

不等式同解原理 3 不等式的两边都乘以(或都除以)同

⊕用不等号“>”或“<”连结两个代数式所成的式子。

一个负数，并且把不等号改变方向后，所得的不等式与原不等式是同解不等式。

(5) $|x| < a$ 、 $|x| > a$ 型不等式的解集。

当 $a > 0$ 时， $|x| < a$ 的解集是 $-a < x < a$ ；

$|x| > a$ 的解集是 $x > a$ ，或 $x < -a$ 。

5. 指数和对数的有关概念

(1) 指数：式子 a^b 中的 a 叫做底数， b 叫做指数。当指数 b 取各种不同的有理数时，式子 a^b 的定义如下：

1) $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n\text{个}}; (a \text{ 为任意实数})$

2) $a^0 = 1; (a \neq 0)$

3) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}; (a \neq 0)$

4) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}; (a \geq 0)$

5) $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}. (a > 0)$

以上各式中的 m 为正整数， n 为大于1的整数。

(2) 对数：如果 $a^b = N (a > 0, a \neq 1)$ ，那么， b 叫做以 a 为底 N 的对数，记作 $b = \log_a N$ (a 叫做底数， N 叫做真数)。

当 $a > 0, a \neq 1$ 时，指数式 $a^b = N$ 和对数式 $b = \log_a N$ 可以互化。

零和负数没有对数； $\log_a 1 = 0$ ； $\log_a a = 1$ 。

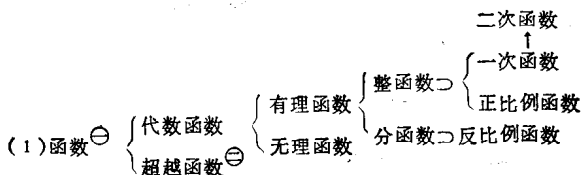
(3) 常用对数：以10为底的对数叫做常用对数，简记作 $\lg N$ 。

1) $\lg 10^n = n$;

- 2) 真数较大的对数也较大;
- 3) 10的整数次幂以外的正数的对数都是小数;
- 4) 所有正数的对数都可写成一个整数(正整数、零和负整数)加上一个正的纯小数(或者零)的形式. 前者叫做对数的首数, 后者叫做对数的尾数.

5) 对于仅小数点位置不同的数, 它们的对数的尾数相同, 但首数不同.

6. 函数的有关概念



(2) 函数中自变量的取值范围:

函 数	自变量的取值范围	
整 式	一切实数	
分 式	分母不为零	
对 数	底数大于零且不等于1, 真数大于零	
根 式	开奇次方	一切实数
	开偶次方	被开方数 ≥ 0
零指数、负整指数	底数不等于零	

\ominus 设在某变化过程中有两个变量 x, y , 如果对于 x 在某一范围内的每一个确定的值, y 都有唯一确定的值与它对应, 那么就称 y 是 x 的函数, x 叫做自变量.

\ominus 高中学习的指数函数、对数函数、三角函数都是超越函数.