新起点

高等学校理工科规划教材

概率论与数理统计

PROBABILITY AND MATHEMATICAL STATISTICS

靖新 主编

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY TECHNOLOGY PRESS

高等学校理工科规划教材

概率论与数理统计

PROBABILITY AND MATHEMATICAL STATISTICS

主 编 靖新

副主编 史俊贤 隋英 吴茂全

编 者 （按姓氏笔划）

王金宝 史俊贤 [illegible] [illegible]

陈仲堂 吴茂全 [illegible] [illegible]

徐厚生 [illegible] [illegible] 戚 中

隋 英 傅春菊 靖 新 [illegible]

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 靖新主编. —大连:大连理工大学出版社,2005.8
ISBN 7-5611-2975-0

Ⅰ.概… Ⅱ.靖… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材
Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 053362 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市凌水河 邮政编码:116024

电话:0411-84708842 传真:0411-84701466 邮购:0411-84707961

E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn

大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm 印张:12.25 字数:271 千字

印数:1～3 000

2005 年 8 月第 1 版 2005 年 8 月第 1 次印刷

责任编辑:刘新彦 于建辉 责任校对:欣 宇

封面设计:张 金

定 价:20.00 元

序言

随着精英教育向大众教育的转化，高等教育呈现出了多层面、多样性的特点。如何使培养的人才更加适应社会的需要，为高等教育，特别是基础教育提出了许多新的课题。

大众教育阶段的人才有不同于精英型人才的特点，我们必须因材施教，建立针对他们的培养方式、培养目标和评价标准，简而言之，即一个不同于精英型教育的教育模式。

新起点系列教材以“联系实际，加强计算，注重应用，提高素质”为特色，在概念的引入上，力求自然，通过实例来阐述其直观背景和现实意义；在基本理论上，力求直观，通俗易懂，着眼于培养学生的分析问题、解决问题的能力；在基本技能的培养上，注重基本运算能力和方法的训练。

新起点系列教材的作者都是从事教学多年的一线教师，他们从切身的体会中，把这套教材用由浅入深，通俗易懂的语言进行了新的组织，使读者在学习中真正领悟到高等教育的思想内涵与巨大价值！在此衷心感谢各位作者的辛勤劳动！

愿本系列教材成为同学们学习道路上的一个新的起点，从此踏上成功人生。

如果您有任何建议或意见，请与我们联系，联系方式：

电话：0411-84707962

邮箱：jcjf@dutp.cn

大连理工大学出版社
科技教育出版中心
2005年8月

前言

概率论与数理统计是高等院校本科各专业普遍开设的一门从数量方面研究随机现象的统计规律的数学课程。进入信息社会，随机现象的大量存在，数据处理的应用之广，使这门课程越来越受到重视。

本书的编写，突破了传统观念的束缚，在深刻领会国家非数学类数学课程教学指导委员会的教学基本要求前提下，具有下列特点：

1. 淡化理论推导过程，重在思想方法的介绍。

2. 减弱技巧性训练，重在使学生理解、掌握这门科学的基本概念、理论和方法。

3. 以案例引出，重点强调概念、方法的引入背景和应用意义，增强学生驾驭方法的能力。

本书的编写得到沈阳建筑大学、沈阳工业大学、沈阳化工学院等院校的许多同行和朋友的大力支持，另外，书中也引用了许多参考文献，在此一并表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，难免有错漏不妥之处。恳请随时批评指正。

编者

2005 年 8 月

目录

第1章

随机事件及其概率

- 随机事件及其运算
- 频率与概率
- 古典概型
- 条件概率
- 独立性
- 伯努利概型

现实世界中的各种问题是受诸多因素影响的.当我们观察客观世界时,会发现有多种多样的现象.这些现象大致可以分为两类.一类是确定性现象,即在一定的条件下必然发生或必然不发生的现象.例如,向上抛一石子必然下落;同性电荷必不相互吸引,等等.另一类是随机现象,即在同样条件下进行一系列重复试验或观测,每次出现的结果并不完全一样,而且在每次试验或观测前无法预料确切的结果,其结果呈现出不确定性.例如,在相同条件下抛同一枚硬币,其结果可能是正面朝上,也可能是反面朝上,并且在每次抛掷之前无法肯定抛掷的结果是什么;用同一门炮向同一目标射击,各次弹着点不尽相同,在一次射击之前不能预测弹着点的确切位置,等等.

人们经过长期实践及深入研究之后,发现随机现象虽然就每次试验或观察结果来说,具有不确定性,但在大量重复试验或观察下,它的结果却呈现出某种规律性.例如,多次重复抛一枚硬币得到正面朝上的次数大致有一半;同一门炮射击同一目标的弹着点按照一定规律分布,等等.这种在大量重复试验或观察中所呈现出的固有规律性,我们称之为随机现象的统计规律性.

概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科.其理论与方法广泛应用于各个学科分支和各个生产部门.在探索和研究中,我们可以进行预策与决策,寻找发现大千世界中各种偶然现象中的必然性.

1.1 随机事件及其运算

1.1.1 随机试验

为了研究随机现象的统计规律性而进行的各种试验或观察统称为**随机试验**,简称试验,通常用字母 E 表示.例如,

E_1:抛一枚硬币,观察正面 H 及反面 T 出现的情况;

E_2:对某一目标进行连续射击,直到击中目标为止,记录射击次数;

E_3:在一批灯泡中任意取一只,测试它的寿命.

上述例子中,试验 E_1 有两种可能结果,出现 H 或者出现 T,但在抛掷之前不能确定出现 H 还是出现 T,这个试验可以在相同的条件下重复地进行.又如试验 E_3,我们知道灯泡的寿命(以小时计)$t\geqslant 0$,但在试验之前不能确定它的寿命有多长.这一试验也可以在相同的条件下重复地进行.概括起来,这些试验具有下列特点:

(1)可以在相同的条件下重复地进行;

(2)每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果;

(3)进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

我们是通过研究随机试验来研究随机现象的.

1.1.2 样本空间

对于随机试验，尽管每次试验之前不能预知试验的结果，但试验的所有可能结果组成的集合是已知的. 我们将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**，记为 S. 样本空间的元素，即 E 的每个结果，称为**样本点**. 例如，

试验 E_1 的样本空间由两个样本点组成，即

$$S_1:\{H,T\};$$

试验 E_2 的样本空间由可列个样本点组成，即

$$S_2:\{1,2,3,\cdots\};$$

而试验 E_3 的样本空间为

$$S_3:\{t\mid t\geqslant 0\}.$$

注意 样本空间的元素是由试验的目的确定的，试验的目的不一样，其样本空间也不一样.

例如，E_4：将 1 枚硬币抛掷 3 次，观察正面 H 及反面 T 出现的情况.

$$S_4:\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\};$$

E_5：将 1 枚硬币抛掷 3 次，观察正面出现的次数.

$$S_5:\{0,1,2,3\}.$$

尽管在 E_4，E_5 中同是将 1 枚硬币抛掷 3 次，但是，由于试验的目的不一样，它们的样本空间 S_4，S_5 也不一样.

1.1.3 随机事件

一般地，我们把试验 E 的样本空间 S 的子集称为 E 的随机事件，简称为**事件**. 通常用英文大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示事件. 在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生.

特别地，由一个样本点组成的单点集，称为**基本事件**. 例如，

试验 E_1 有两个基本事件：$\{H\}$ 和 $\{T\}$；

试验 E_2 有可列个基本事件：$\{1\},\{2\},\{3\},\cdots$.

样本空间 S 包含所有的样本点，它是 S 自身的子集，在每次试验中它总是发生的，称为必然事件. 空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它也作为样本空间的子集，它在每次试验中都不发生，称为不可能事件.

随机事件具有下列特点：

(1)在一次试验中是否发生是不确定的，即随机性；

(2)在相同的条件下重复试验时，发生可能性的大小是确定的，即统计规律性.

【例 1-1】 在 E_3 中，事件 A_1："寿命小于 1000 h"，即

$$A_1=\{t\mid 0\leqslant t<1000\}.$$

在 E_4 中，事件 A_2："第一次出现的是 H"，即

$$A_2=\{HHH,HTH,HHT,HTT\};$$

事件 A_3:“三次出现同一面”,即

$$A_3=\{HHH,TTT\}.$$

■

【例 1-2】 设试验 E 为掷一颗骰子,观察其出现的点数.

在这个试验中,记 $A_n=\{出现点数\ n\}$,$n=1,2,3,4,5,6$. 显然,A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6 都是基本事件. 如果记 $B=\{出现被\ 3\ 整除的点\}=\{3,6\}$,$C=\{出现偶数点\}=\{2,4,6\}$,则 B,C 都是随机事件. 如果记 $\{出现小于\ 7\ 的点\}=S$,则它就是必然事件;如果记 $\{出现大于\ 7\ 的点\}=\varnothing$,则它就是不可能事件. ■

1.1.4 事件间的关系与运算

事件是一个集合,因而事件间的关系与事件的运算自然可以按照集合论中集合之间的关系和集合运算来处理,下面给出这些关系和运算在概率论中的提法,并根据“事件发生”的含义,给出它们在概率论中的含义.

设试验 E 的样本空间为 S,而 $A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$ 是 S 的子集.

1. 事件的包含与相等

若 $A\subset B$,则称事件 B 包含事件 A,这指的是事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

如图 1-1,设事件 $A=\{点落在小圆内\}$,事件 $B=\{点落在大圆内\}$,显然,若点落在小圆内,则该点必落在大圆内,也就是说,若 A 发生,则 B 一定发生.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,即 $A=B$,则称事件 A 与事件 B 相等.

【例 1-3】 一批产品中有合格品与不合格品,合格品中有一、二、三等品,从中随机抽取一件,是合格品记作 A,是一等品记作 B,显然,B 发生时 A 一定发生,因此 $B\subset A$. ■

2. 事件的和

事件 $A\cup B=\{x|x\in A\ 或\ x\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的和事件. 当且仅当 A,B 至少有一个发生时,事件 $A\cup B$ 发生.

如图 1-2,设事件 $A=\{点落在小圆内\}$,事件 $B=\{点落在大圆内\}$,考虑事件{点落在阴影部分内}. 显然,只要点落在小圆或大圆内,点就落在阴影部分内了.

根据和事件的定义可知,$A\cup S=S$,$A\cup\varnothing=A$.

事件的和的运算可以推广到多个事件的情况:

称 $\bigcup_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件;称 $\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的和事件.

3. 事件的积

事件 $A\cap B=\{x|x\in A\ 且\ x\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的积事件. 当且仅当 A,B 同时发生时,事件 $A\cap B$ 发生,$A\cap B$ 也记作 AB.

如图 1-3,设事件 $A=\{点落在小圆内\}$,事件 $B=\{点落在大圆内\}$,考虑事件{点落在阴影部分内}. 显然,只有点落在小圆内而且点也落在大圆内,才有点落在阴影部分内.

根据事件积的定义可知,对任一事件 A,有 $AS=A$,$A\varnothing=\varnothing$.

事件的积的运算可以推广到多个事件的情况：

称$\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$为$n$个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$的积事件；称$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$为可列个事件$A_1,A_2,\cdots$的积事件.

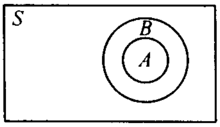

图 1-1

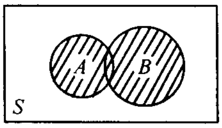

图 1-2

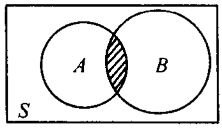

图 1-3

4. 事件的差

事件$A-B=\{x\mid x\in A$且$x\notin B\}$称为事件A与事件B的差事件. 当且仅当A发生、B不发生时，事件$A-B$发生.

如图 1-4，设事件$A=\{$点落在小圆内$\}$，$B=\{$点落在大圆内$\}$，考虑事件$\{$点落在阴影部分内$\}$. 显然，只有点落在小圆内，而且点不落在大圆内，才有点落在阴影部分内.

从图 1-4 中可以看出，$A-B=A-AB$.

5. 互不相容事件

若$A\cap B=\varnothing$，则称事件A与事件B是互不相容的，或互斥的. 这指的是事件A与事件B不能同时发生. 显然，同一个试验中的各个基本事件是两两互不相容的.

如图 1-5，设事件$A=\{$点落在小圆内$\}$，事件$B=\{$点落在大圆内$\}$. 显然，点不能同时落在两个圆内.

6. 对立事件

若$A\cup B=S$且$A\cap B=\varnothing$，则称事件A与事件B互为逆事件，又称事件A与事件B互为对立事件. 这指的是对每次试验而言，事件A,B中必有一个发生，且仅有一个发生. A的对立事件记为$\overline{A}$，$\overline{A}=S-A$.

如图 1-6，设事件$A=\{$点落在圆内$\}$，考虑事件$\{$点落在圆外$\}$，该事件与事件A不能同时发生，但二者又必发生其一.

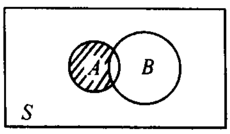

图 1-4

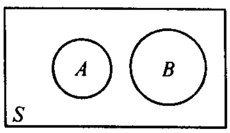

图 1-5

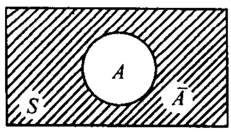

图 1-6

注意 对立事件与互不相容事件是不同的两个概念，对立事件一定是互不相容事件，但互不相容事件不一定是对立事件.

例如，事件{射中 10 环}与{射中 9 环}是互不相容事件，但不是对立事件. {射中 10 环}的对立事件是{没有射中 10 环}，{没有射中 10 环}不只是{射中 9 环}.

下面，通过一个例子来说明事件之间的上述关系.

【例 1-4】 在例 1-1 中，试验E_4的样本空间为$S_4=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}$；事件$A_2=\{HHH,HTH,HHT,HTT\}$；事件$A_3=\{HHH,TTT\}$，则有

$A_2 \cup A_3=\{HHH, HTH, HHT, HTT, TTT\}$;

$A_2 \cap A_3=\{HHH\}$;

$A_3-A_2=\{TTT\}$;

$\overline{A_2 \cup A_3}=S_4-A_2 \cup A_3=\{THT, TTH, THH\}$. ■

1.1.5 事件间的关系和运算的性质

在计算事件的概率时，经常需要利用事件间的关系和运算的性质来简化计算. 常用的定律如下.

设 A,B,C 为事件，则有

交换律：$A \cup B=B \cup A, A \cap B=B \cap A$;

结合律：$A \cup (B \cup C)=(A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C)=(A \cap B) \cap C$;

分配律：$A \cup (B \cap C)=(A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C)=(A \cap B) \cup (A \cap C)$;

德·摩根律：$\overline{A \cup B}=\overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B}=\overline{A} \cup \overline{B}$.

【例 1-5】 已知随机事件 A 与随机事件 B 是对立事件，求证 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也是对立事件.

证明 因为 A 与 B 是对立事件，即

$$A \cup B=S, AB=\varnothing,$$

且

$$\overline{A} \cup \overline{B}=\overline{A \cap B}=\overline{AB}=\overline{\varnothing}=S,$$

又

$$\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A \cup B}=\overline{S}=\varnothing,$$

所以，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也是对立事件. ■

1.2 频率与概率

对于一个事件（除必然事件和不可能事件外）来说，它在一次试验中可能发生，也可能不发生. 我们常常希望知道某些事件在一次试验中发生的可能性究竟有多大. 例如，在开办中小学生平安保险的业务中，按照一定标准，保险公司将一个学生的平安情况分为平安、轻度意外伤害、…、严重意外伤害以及意外事故死亡等. 由于对一个学生而言，这些情况事先无法知道，因而它们都是随机事件. 在制定保额和赔付金时，需要研究各种情况发生可能性的大小，我们希望找到一个合适的数来表征事件在一次试验中发生的可能性的大小. 为此，首先引入频率的概念，它描述了事件发生的频繁程度，进而引出表征事件在一次试验中发生的可能性大小的数——概率.

1.2.1 频率

定义 1.1

在相同的条件下，进行了 n 次试验，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数. 比值 n_A/n 称为事件 A 发生的频率，记作 $f_n(A)$.

由定义 1.1 易见，频率具有下列基本性质：

性质 1.1 $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$；

性质 1.2 $f_n(S)=1$；

性质 1.3 若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是两两互不相容的事件，则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k).$$

大量试验证实，当重复试验的次数 n 逐渐增大时，频率 $f_n(A)$ 呈现出稳定性，逐渐稳定于某个常数. 这种"频率稳定性"即通常所说的统计规律性. 因此，我们让试验重复大量次数，计算频率 $f_n(A)$，以它来表征事件 A 发生可能性的大小是合适的.

【例 1-6】 考虑"抛硬币"这个试验，历史上曾有人做过大量的重复试验，结果如表 1-1所示.

表 1-1

实验者	投掷次数 n	出现正面的频数 n_A	频率 $f_n(A)$
摩　根	2048	1061	0.5181
蒲　丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维　尼	30000	14994	0.4998

从表 1-1 中的数据可以看出，随着抛硬币次数 n 的增大，频率 $f_n(A)$ 呈现出稳定性，总是在 0.5 附近摆动，且逐渐稳定于 0.5. ■

但是，在实际中，我们不可能对每一个事件都做大量的试验，然后求得事件的频率，用以表征事件发生可能性的大小. 同时，为了理论研究的需要，我们从频率的稳定性和频率的性质得到启发，给出如下表征事件发生可能性大小的概率的定义.

1.2.2 概率

定义 1.2

设 E 是随机试验，S 是它的样本空间，对 E 的每一事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，称为事件 A 的概率，如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件：

(1)非负性：对于每一个事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；

(2)规范性：对于必然事件 S，有 $P(S)=1$；

(3)可列可加性：设 $A_1,A_2,\cdots$ 是两两互不相容的事件，即对于 $i\neq j$，$A_iA_j=\varnothing$，$i,j=1,2,\cdots$，

则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots. \tag{1-1}$$

由概率的定义，可以推得概率的一些重要性质.

性质 1.4 $P(\varnothing)=0$.

证 令 $A_n=\varnothing\ (n=1,2,\cdots)$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$，且 $A_iA_j=\varnothing$，$i\neq j$；$i,j=1,2,\cdots$.

由概率的可列可加性(式(1-1))，得

$$P(\varnothing)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(\varnothing).$$

由概率的非负性知，$P(\varnothing)\geqslant 0$，故由上式可知，

$$P(\varnothing)=0.$$

■

性质 1.5 (有限可加性)若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n). \tag{1-2}$$

证明 令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$，即有 $A_iA_j=\varnothing$，$i\neq j$；$i,j=1,2,\cdots$.

由式(1-1)，得

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)&=P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots)\\&=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+P(A_{n+1})+\cdots\\&=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+0\\&=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).\end{aligned}$$

■

性质 1.6 设 A,B 是两个事件，若 $A\subset B$，则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A); \tag{1-3}$$

$$P(B)\geqslant P(A).$$

证明 由 $A\subset B$ 知，$B=A\cup(B-A)$，且 $A(B-A)=\varnothing$，由概率的有限可加性(式(1-2))可得

$$P(B)=P(A)+P(B-A),$$

即

$$P(B-A)=P(B)-P(A).$$

又由概率的非负性知，$P(B-A)\geqslant 0$，于是

$$P(B)\geqslant P(A).$$ ■

【例 1-7】 证明 $P(B-A)=P(B)-P(AB)$，特别地，当 $AB=\varnothing$ 时，$P(B-A)=P(B)$.

证明 因为 $B-A=B-AB$，且 $AB\subset B$，则由性质 1.6，有

$$P(B-A)=P(B-AB)=P(B)-P(AB),$$

特别地，当 $AB=\varnothing$ 时，$P(AB)=0$.

所以，当 $AB=\varnothing$ 时，$P(B-A)=P(B)$. ■

【例 1-8】 设事件 A,B 的概率分别为 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{2}$，试求下列三种情况下 $P(B-A)$ 的值.

(1)A 与 B 互斥； (2)$A\subset B$； (3)$P(AB)=\frac{1}{8}$.

解 (1)A 与 B 互斥，则 $P(B-A)=P(B)=\frac{1}{2}$；

(2)$A\subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$；

(3)$P(AB)=\frac{1}{8}$，则 $P(B-A)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$. ■

性质 1.7 （逆事件的概率）对于任一事件 A，有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

证明 因 $A\cup\overline{A}=S, A\cap\overline{A}=\varnothing$，由式(1-2)得

$$1=P(S)=P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A}).$$

所以

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$ ■

性质 1.8 （加法公式）对于任意两事件 A,B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1-4}$$

证明 因为 $A\cup B=A\cup(B-AB)$，且 $A(B-AB)=\varnothing$，$AB\subset B$，故由式(1-2)及式(1-3)可得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB).$$ ■

式(1-4)还可以推广到多个事件的情况. 例如，设 A_1,A_2,A_3 为任意三个事件，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3).$$

一般地，对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，可以用归纳法证得

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$ ■

【例 1-9】 设 A,B,C 是三个事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=1/4$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=1/8$. 求 A,B,C 至少有一个发生的概率.

解 事件 A,B,C 至少有一个发生为 $A\cup B\cup C$.

又 $P(AB)=P(BC)=0$，则 $P(ABC)=0$. 所以