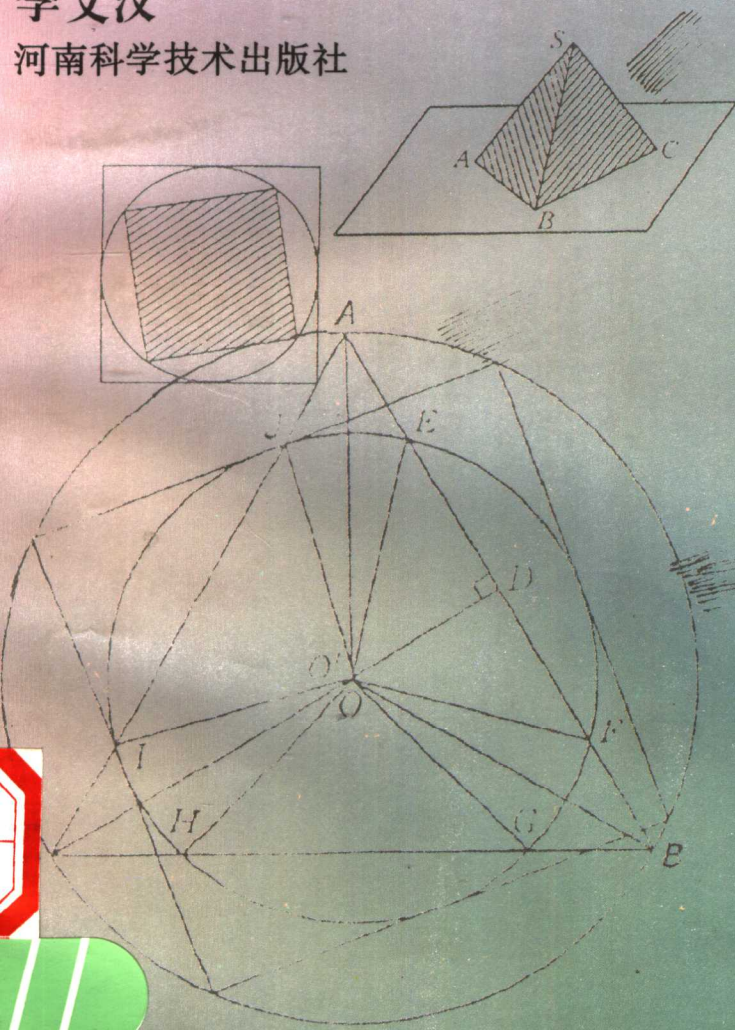


趣味题与 简捷解

李文汉

河南科学技术出版社

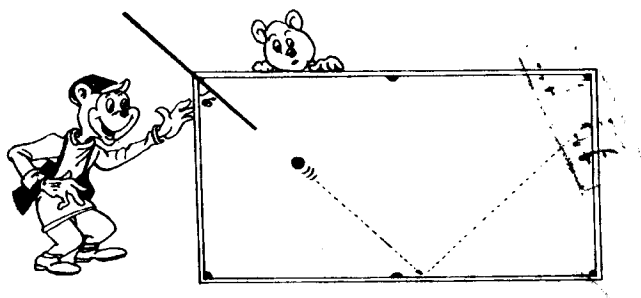
让你开窍的数学



让你开窍的数学

趣味题与简捷解

李文汉



河南科学技术出版社

内 容 提 要

学数学自然离不开解题.有趣的数学题内涵丰富,包含着深刻的道理;而闪烁着人类智慧火花的简捷解法则体现了机智巧妙的数学构思和方法,它让人开窍,给人以美的享受.透彻地领会一些典型的数学趣题的简捷解法,可以帮助读者跳出“题海”,学会独立思考数学问题,学会举一反三.

本书精选了80余道数学趣题(包括一些数学竞赛试题),内容广泛,涉及代数、几何、三角、数论、图论等,但起点不高,讲解通俗有趣,大部分内容初中生即可看懂.对于每道题,不但讲怎么解,而且讲为什么要这么解,对解题思路分析透彻.它可作为中学生的数学课外读物,亦可作为教师开展数学课外活动的材料.

让你开窍的数学 趣味题与简捷解

李文汉

责任编辑 袁 元

河南科学技术出版社出版

(郑州市农业路73号)

河南第一新华印刷厂印刷

全国新华书店发行

787×1092毫米 32开本 6.75印张 130千字

1997年1月第1版 1998年4月第2次印刷

印数:4 001—7 000册

ISBN 7-5349-1935-5/G·506

定 价:7.30元

序

如果我们打开科学史,研究一些卓越人物成功的经验,就会发现一个重要的事实:他们所研究的正是他们从小就喜欢的.少年时代的达尔文数学成绩不佳,但热爱生物,结果他成为最伟大的生物学家.反之,如果强迫他研究数学,他未必能如此成功.由此可见,兴趣与工作一致,二者形成良性循环,是成功的重要因素.然而兴趣又是怎样形成的呢?这固然与天赋有关,但后天的启发和培养更为重要.数学教师的职责之一就在于培养学生对数学的兴趣,这等于给了他们长久钻研数学的动力.优秀的数学教师之所以在学生心中永志不忘,就是由于他点燃了学生心灵中热爱数学的熊熊火焰.

讲一些名人轶事有助于启发兴趣,但这远远不够.如果在传授知识的同时,分析重要的数学思想,阐明发展概况,指出各种应用,使学生

不仅知其然,而且知其所以然,不仅看到定理的结论,而且了解它的演变过程,不仅看到逻辑之美,而且欣赏到形象之美、直观之美,这才是难能可贵的.在许多情况下,直观走在逻辑思维的前面,起了领路作用.直觉思维大都是顿悟的,很难把握,却极富兴趣,正是精华所在.M.克莱因写了一部大书《古今数学思想》,对数学发展的主导思想有精彩的论述,可惜篇幅太大,内容过深,不易为中学生所接受.

真正要对数学入迷,必须深入数学本身:不仅是学者,而且是作者;不仅是观众,而且是演员.他必须克服一个又一个的困难,不断地有新的发现、新的创造.其入也愈深,所见也愈奇,观前人所未观,发前人所未发,这才算是进入了登堂入室、四顾无峰的高级境界.为此,他应具备很强的研究能力;而这种能力,必须从中学时代起便开始锻炼,经过长期积累,方可成为巨匠.

于是我们看到“兴趣”、“思维”和“能力”三者 in 数学教学中的重要作用.近年来我国出版了多种数学课外读物,包括与中学教材配套的同步辅导读物和题解.这套《让你开窍的数学》丛书与众不同,其宗旨是“引起兴趣、启发思维、训练能力”,风格近似于美国数学教育家 G. Polya(波利亚)的三部名著《怎样解题》、《数学与猜想》、《数学的发现》,但更切合我国的实际.本丛书共 8 本,可从书名看到它们涉及的范围甚为宽广.作者都有丰富的教学经验和相当高的学术水平,而且大都出版过多种数学著作.因此,他们必能得心应手,写得趣味盎然,富于启发性.这套丛书的主要对象是中学、中专的教师

和同学,我们希望它能收到宗旨中确定的效果,为中学数学教学做出较大贡献.

王梓坤

1996. 7.

前言

有人指出,21 世纪的中国将是一个数学大国,这种预见是有道理的.理由之一是,与各国中学生的数学水平相比,我国中学生的数学水平属于较高者之列,在我国的青少年中,存在着大量的数学爱好者.这些预兆有理由使人相信,在 21 世纪,我国的数学发展,将有一个更加光辉灿烂的前景.

我国的科学界有一个好的传统,就是老一代的科学家——其中包括很多老一代的数学家,很重视科学的普及工作,他们写了大量深入浅出、引人入胜的科普读物并主持参加了大量的很有意义的科普工作.在他们的带动下,一大批大、中、小学教师、科学技术工作者也在工作之余,抽出大量时间和精力,做了很多这方面的工作.笔者作为一个大学数学教师,有幸在教学、科研工作之余,从事了一些科普工作,也深

感荣幸. 退休以后, 我抽时间搜集了自 60 年代初以来自己编拟的中等数学程度的一些题目, 正想将它们编订成册, 适逢河南科学技术出版社的编辑袁元先生来约稿, 于是便有此《趣味题与简捷解》一书的出版.

本书共 6 章, 在第 1 章中, 略述趣味题与简捷解的意义, 以后各章中主要是列举一些趣题及其解答, 并对其背景、意义或有关知识略加评说.

人们可以从不同的侧面去写科普读物, 本书希望从有利于读者增长对数学的兴趣, 增长知识, 增长技能和增长才干方面着手. 学习数学一定要多动脑筋. 古人强调“多思”, 《南史·祖冲之列传》中, 特别谈到祖冲之“有机思”, 该文另一处又说“晋杜预有巧思”, 这里的“机思”与“巧思”都是指机智、机敏、灵巧、巧妙的思路或思想. 本书的写作意图之一, 就是想在启发“机思”与“巧思”上下些功夫. 因能力有限, 虽作者尽力而为, 书中仍可能有错讹不当之处, 恳请读者指正.

作 者

1995 年 5 月于清华园

目 录

1 关于趣题与简捷解	(1)
1.1 趣题引智	(1)
1.2 数学崇尚“简捷”	(13)
2 二元方程趣题	(27)
2.1 盈亏问题	(28)
2.2 年龄问题	(35)
2.3 鸡兔问题	(39)
2.4 杨辉巧用弦图	(43)
3 游戏趣题	(53)
4 算术趣题	(90)
5 几何、三角趣题	(115)
5.1 三角板下趣题多	(115)
5.2 一题多变	(123)
5.3 几何、三角杂题	(131)
6 代数、综合趣题	(161)
6.1 竞赛趣题	(161)
6.2 综合杂题	(181)

1

关于趣题与简捷解

1.1 趣题引智

这里说的“趣题引智”有两层意思,其一是数学趣题吸引了很多聪明睿智之人来追求它,使他们爱好和钻研数学;其二是说数学趣题能启发人们的智慧,常常引出一些机智巧妙的数学构思、证明方法或解题手段,有时甚至发展成为一种新的数学思想或数学理论,对数学的发展有着深远的影响.下面,先谈几个属于前者的事例.

可能本书的读者中有不少是女同学,这里我们先介绍一个杰出的俄罗斯女数学家柯瓦列夫斯卡娅(1850 ~ 1891)少年时解“糊墙纸”上的数学题的故事.

我们知道,在 19 世纪(以及 19 世纪以前),由于妇女广受歧视,她们往往被剥夺了深造(甚至入学)的权利,因此,女数学家的人数比女王的人数还要少.但是,聪明勤奋的俄罗斯姑娘柯瓦列夫斯卡娅通过自己的刻苦钻研与拼搏,历尽艰难坎坷,终于成了一名杰出的女数学家,被选为俄罗斯科学院通讯院士.

有意思的是,使童年和少年时代的柯瓦列夫斯卡娅产生浓厚兴趣、吸引着她热爱数学并立志以它为自己的终身职业的却是她家里的那些糊墙纸.

事情是这样的,由于柯瓦列夫斯卡娅的祖父和外祖父都是数学家(她的父亲是位将军),她家的糊墙纸大多是拆散了的数学书籍.这些糊在墙上的纸张上的数学内容,大多是小柯瓦列夫斯卡娅看不懂的,这些神秘的东西使她产生了浓厚的兴趣,萌发了要读懂弄通它们的欲望.凑巧的是,糊墙纸中也有像俄罗斯数学家奥斯特罗格拉茨基(1801~1862)写的《初等几何学教材》和《代数和超越分析讲义》之类的教科书的散页,它们特别吸引着小柯瓦列夫斯卡娅的兴致.她从她的叔叔彼得那里学习了一些几何学等数学的基本知识后,逐渐能看懂糊墙纸上的有些内容了.可惜,有时当看到一个有趣的题目和它的解答正来劲的时候,却该翻页了,而糊在墙上的纸是不能翻页的.但小柯瓦列夫斯卡娅并没有灰心丧气,而是多方猜想那些无法看到的部分说了些什么,用自己的钻研去揭示隐藏的奥秘.有时一张糊墙纸上根本没有题目(或命题),只是解答或论述、证明的后一部分,或是只有上一页和下一页,中间



图 1.1

的一页或数页没有了,缺上一大段,等等,小柯瓦列夫斯卡娅要根据这些很少的信息,推测、猜想、判断原来的题目(或命题)是什么和那些未能见到的文字大概说了些什么.实际上,这些残缺不全的书页在这个小女孩的心中,已成为集数学知识、逻辑推理和想象能力于一体的数学趣题.很难说童年和少年时的柯瓦列夫斯卡娅解决了多少这类趣题,但它们实实在在地锻炼和提高了柯瓦列夫斯卡娅的数学水平和思维能力.小柯瓦列夫斯卡娅乐在其中,为它有时竟废寝忘食,在墙前观察、找寻、思考,有时一呆就是好几个小时.对这类趣题的思索与钻研,使柯瓦列夫斯卡娅对数学产生了浓厚的兴趣,它成了

柯瓦列夫斯卡娅走上杰出数学家和科学院通讯院士的道路的第一步。当然,更重要的是系统的学习,柯瓦列夫斯卡娅 16 岁时,接受了俄罗斯著名教育家斯特兰诺柳博斯克(1839 ~ 1908)的教育,学完了正规的高等数学课程,打下了较好的数学基础。

大科学家爱因斯坦(1879 ~ 1955)在回忆自己如何走上科学的道路时,曾谈到欧几里得几何学书上的一则趣题(一个命题)对他的影响。爱因斯坦 12 岁时,他的叔叔交给他一本关于欧几里得几何学的书籍,这本书中好像有什么无形的力量在吸引着他,以致使他着了迷。例如,书上有一个定理引起了爱因斯坦的兴趣:“任何三角形,它的三条高线都必然会交于一点。”“真的那么凑巧吗?”爱因斯坦颇为惊异和怀疑。这使他产生了继续往下读的欲望。当爱因斯坦读完了书上的证明之后,他被严谨巧妙的数学证明征服了。爱因斯坦成为大科学家以后,他曾回忆起这一段难忘的往事,并大大赞扬欧几里得几何学:“世界第一次目睹了一个逻辑体系的奇迹。这个逻辑体系如此精密地一步一步推进,以致它的每一个命题都是绝对不容置疑的——我这里说的是欧几里得几何学。推理的这种胜利值得赞叹,它使人类理智具有充分的信心去取得新的成就。如果欧几里得未能激起你少年时代的热情,那么你就不是一个天才的科学思想家。”爱因斯坦在物理学上的杰出贡献,在一定程度上也得力于他的深厚的数学功底。

趣题引人入胜,甚至会影响到一个人对终生事业的抉择的事例很多,这里我们再讲一个关于数学王子高斯(1777 ~

1855) 的故事。

高斯自幼就显得智慧超群,才能出众,在由卡罗林学院(相当于大学预科)转入德国学术空气浓厚、藏书颇丰的哥廷根大学学习时,高斯对于自己今后是以语言文学为专业还是以数学为专业拿不定主意,因为他对这两个专业都十分爱好(实际上他一生中在这两方面都显示了杰出的才能)。但在大学一年级时,由于攻克了一道数学难题而使高斯立志终身从事数学工作。

远在公元前四五世纪时的希腊,人们就发现用直尺圆规作图法(简称尺规作图法),能作出圆的内接正三角形、正方形、正五边形、正六边形、正八边形、正十边形、正十二边形等,但直到高斯生活的年代,人们也没有发现用尺规作图法作出正七边形、正九边形和正十三边形等的方法。也就是说,这些图形的尺规作图方法,是从古希腊时代起,困扰了数学家们两千多年的数学难题。出乎人们的意料,19岁的哥廷根大学一年级学生高斯于1796年3月30日,按尺规作图法的要求作出(包括证明)了圆的内接正十七边形。接着,高斯又得出结论:利用尺规作图方法能作出的边数为素数的正多边形,只有当边数为形如 $2^{2^n} + 1$ 的素数(数学上称为费尔马素数)时才有可能。高斯的这一成就,不仅解决了一个人们为之奋斗了两千多年的数学难题,还由于他揭示了按尺规作图法不可能作出诸如正七边形等正多边形这一规律,从而极大地改变了人们的数学观念。先前人们一向苦苦寻找作图方法,找不到时总认为是功夫还不到家,一味死找,却没想到这样的方法根本就不

存在. 高斯的工作使人们在这方面开了窍. 由于这方面的成功, 高斯决心毕生从事数学工作. 当半个多世纪以后高斯逝世时, 人们按照高斯的遗嘱在哥廷根大学为他建立了一座台座为正十七边形棱柱的纪念碑.

下面我们介绍“趣题引智”的另一层意思: 数学趣题引发人类智慧产生了很多创新的数学成果, 为万紫千红、绚丽多彩的数学花园增光添彩, 使得数学园地硕果累累. 这里顺便就从高斯用数学成果解决天文学的趣味难题说起.

在 18 世纪初, 那时人们知道的太阳系的行星, 除了地球以外, 仅有金、木、水、火、土五大行星. 谁也不会想到, 数学中“数列”的知识会为天上新的行星的发现提供依据. 事情的经过是这样的:

1772 年, 柏林天文台台长波德(1747 ~ 1826) 宣布了一条消息, 说天文学家提丢斯于 1766 年按数列的方法, 给已知的行星按其太阳的平均距离编排了一张表(表 1.1), 从这张表中可以看出, 行星的排列次序是有规律的, 这规律从金星

表 1.1

行星	水星	金星	地球	火星	?	木星	土星	?
假设距离	0.4	0.7	1.0	1.6	2.8	5.2	10.0	19.6
实际距离	0.39	0.72	1.00	1.52	?	5.20	9.54	?

开始可以用公式

$$0.4 + 0.3 \times 2^n$$

来表示($n = 0, 1, 2, \dots$, 日地平均距离取作 1 个单位. 这个公式, 后来的天文学家又作了改进). 这规律后来被称作提丢斯

定则或波德定则。

按照提丢斯定则,将 $n = 3$ 代入公式可知,火星与木星之间,即距离太阳 2.8 单位处应有一颗行星;土星之外如果还有行星的话,第一颗应当在 19.6 单位处(即将 $n = 6$ 代入公式)。是不是这样呢?这可以说是利用数学知识作出简捷推测的趣味问题。

这一理论很有生命力,1781 年 3 月,英国天文学家赫歇耳(1738 ~ 1822)果然在土星轨道之外发现了一颗行星,后来命名为天王星,距离是在 19.18 单位处,基本符合提丢斯定则的预测。这是人类的智慧和数学知识的一次重大胜利,它增强了人们在 2.8 单位处发现新的行星的信心。

1801 年 1 月 1 日凌晨,意大利天文学家皮亚齐(1746 ~ 1826)在西西里岛上的巴勒莫天文台上核对星图,他发现金牛座一带有一颗八等星与星图不合。第二天晚上观察时发现这颗星已经西移,后来接下去的观察发现此星继续西移,他疑心这是一颗“没有尾巴的彗星”。皮亚齐对这颗星连续观察了 41 个夜晚,记录了大量的观测数据,这段时间内这颗星移动了 3 度,最终被太阳光所掩盖,他也因劳累过度而病倒了。

皮亚齐写信给欧洲大陆各天文台的同行们,请求他们协同观察、核对和研究。可是当时正是拿破仑横扫欧洲之际,由于战争关系,地中海被封锁,西西里岛与大陆不通音讯。等到当年 9 月大陆上的天文学家们知道这一消息而进行观察时,那颗“没有尾巴的彗星”已经无影无踪了。

这时,刚从大学毕业、才华横溢的 24 岁的青年高斯,却把

天文学家们用天文望远镜在茫茫宇宙中寻找星星的事情,看成是一则数学趣题,他要以皮亚齐的观测数据为已知条件,将这颗星的轨道和位置解答出来。

“趣题引智”,高斯经过几个星期的努力,以他的智慧创造出了只需三次观测数据,就能确定行星轨道的方法(前面已经说过,皮亚齐已经积累了连续 41 天的观测数据),并且用之于皮亚齐观测的这颗星.高斯根据皮亚齐的数据算出了那颗星的轨道和它当时所在的位置.1801 年 12 月 7 日,人们在高斯算出的那个位置上果然找到了年初被皮亚齐发现而后又失踪了的那颗星.同时人们还确定,它并不是什么“没有尾巴的彗星”,而是一颗行星,它与太阳的距离刚好在提丢斯定则预测的 2.8 单位附近(实际距离是 2.77 单位).这颗行星被命名为“谷神星”,由于它比较小,所以称它为“小行星”.这是一次人类智慧的奇迹和胜利,它证实了提丢斯定则的可靠性,并再次显示了数学知识用于简捷巧妙地解决天文学难题的威力.高斯这位数学家兼天文学家,后来成了哥廷根大学的终身数学教授和哥廷根天文台的终身台长。

我们还接着“谷神星”的发现来说,正当大家都觉得很满意的时候,突然出现了一个使人哭笑不得的新问题.1802 年 3 月 28 日,人们又在火星与木星之间发现了第二颗小行星“智神星”.高斯很快又算出了它的轨道参数,理论和方法都大有改进,其中包括发明了计算数学中很有实用价值的“最小二乘法”.可是按提丢斯定则来说,2.8 单位处应该只有一颗行星才对,这回却像“买一送一”似的多出来了一个,这该作何解