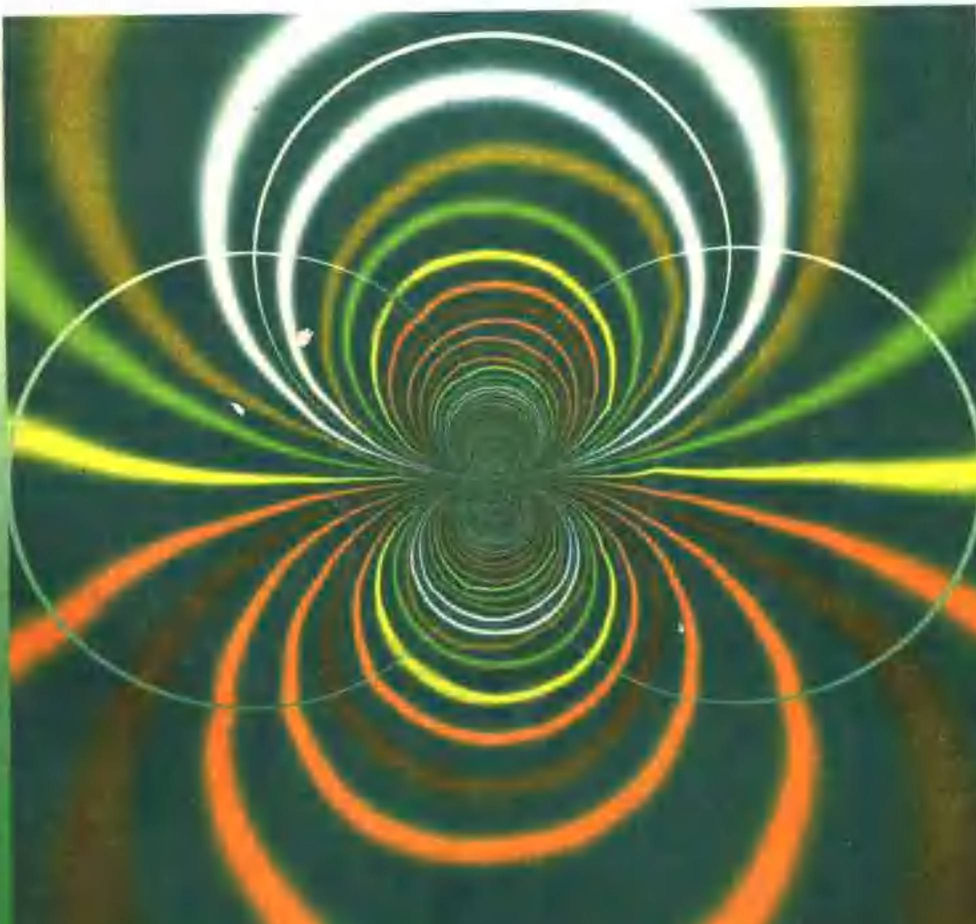
高中数理化基础知识
思维方法专题讲座丛书

高中数学基础知识 思维方法 专题讲座

（上）

牛德胜 蒋 庚 主编



珠海出版社

高中数理化基础知识
思维方法专题讲座丛书

高中数学基础知识思维方法专题讲座

（上）

牛德胜　蒋　庚　主编

珠 海 出 版 社

《高中数理化基础知识/思维方法专题讲座》丛书

编 委 会

主 编:吴永沛

编 委:张耀华 吴同传
牛德胜 郭晓光

(粤)新登字 17 号

图书在版编目(CIP)数据

高中数学基础知识思维方法专题讲座(上 下册)

ISBN 7-80607-341-8 ¥ 27.00 元

Ⅰ.高...

Ⅱ.①中... ②蒋...

Ⅲ.高中-数学-讲座

Ⅳ.G633.6

高中数学基础知识/思维方法专题讲座(上 下册)

©牛德胜 蒋 庚主编

策 划:郭晓光 詹家宣

终 审:成 平

责任编辑:雷良波

装帧设计:张勤学 郑建新

出版发行:珠海出版社

电 话:3331403 邮政编码:519015

印 刷:中科院开封印刷厂

开 本:787×1092mm 1/16

印 张:26.5 字数:883 字数千字

版 次:1997 年 10 月第 1 版

1997 年 10 月第 1 次印刷

印 数:1-20000

ISBN 7-80607-341-8/G·80

定 价:27.00 元 (上 下册)

前　言

《高中数理化基础知识思维方法专题讲座》丛书，是中学生学习报社最新创意并组织编写的。共有数学、物理、化学三科。

为了满足高中数学总复习的教学需要，帮助广大高中毕业生更好地学习和掌握高中数学基础知识，基本技能，基本思想和方法，提高逻辑思维能力、运算能力、以及分析问题和解决问题的能力，我们特组织长期担任高中毕业班数学教学工作的、对指导高考复习有丰富教学经验的部分特级和高级教师，精心编写了《高中数学基础知识思维方法专题讲座》一书.

本书以《中学数学教学大纲》和《普通高等学校招生全国统一考试数学科说明》为编写依据，与高中总复习教学同步为出发点，以现行统用教材(必修本)为本，融知识教学与能力训练于一体. 全书共分十三章，105 课. 每章前有精要概述，指明本章内容在高考中的位置、考试要点及主要思想、方法，后有难度适中、覆盖面全，注重能力提高的单元检测. 每课又分“知识提要”、“三基知识”自测、“课本范例赏析”、“典型例题”、“本课小结”及课后练习几部分. 既能方便课前预习，明确主体内容，正确认识和把握高考对课本内容的考查重点，充分挖掘课本的效用，又能较全面系统地认识和掌握解题的思维方法和技巧. 每课中对课本范例的赏析点评、典型例题的分析释解，课后小结的指要综述都是作者多年来丰富教学经验的结晶，有助于在“方向性”与“层次性”上的把握，使复习有的放矢，提高复习实效，切实掌握与提高“三基”与“四能力”. 本书不仅在每课中安排有充足的课前与课后练习，于后还配有四套高考模拟试卷，可供考前训练.

本书共分上下两册，上册供教学专用，下册为“三基知识”自测、典型例题、课后练习及模拟试题的参考答案与提示，并注意典型问题的一题多解，以期开拓思路，提高解题能力.

本书既可作为高三数学总复习的优选资料，亦可作为高一高二学生同步学习数学时的参考，对高中数学教师的教学亦有较高的参考价值.

本书由中学生学习报社副编审牛德胜和郑州一中特级教师蒋赓主编. 参加本书编写的有蒋赓、华廉臣、项昭义、屠新民、张秋生、骆传枢、陈磐生、陆金兴、孙锡九、田玉清、刘金恒、韩济众、校书祥、李翠英、孙葆纲等.

编　者

目　录

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

导　言

本章的主要内容是在引入集合、映射概念的基础上，阐明函数与反函数的概念，函数的定义域和值域，函数的单调性、奇偶性和函数的图象，并具体研究了二次函数、幂函数、指数函数、对数函数的图象和性质以及指数方程和对数方程. 本章常用的数学思想有数形结合和分类讨论，常用的数学方法有待定系数法、换元法和配方法等.

函数是高中代数的一条主线，它与中学数学很多内容紧密相关，是学好高中数学的基础；函数思想是解决数学问题的重要思想，它的应用贯穿于整个高中数学；函数亦是进一步学好高等数学的必备知识. 因此，函数知识在高考试题中占有很大比重，是历年高考的重点.

在函数的学习中，应以函数的概念和性质作为理论指导，在对比中掌握二次函数、幂函数、指数函数、对数函数的定义、图象和性质，注意提高综合运用函数知识和思想方法解题的能力. 本章安排 15 课时.

第 1 课　集合及其运算

一、知识提要

理解集合、子集、交集、并集和补集的概念；了解空集、全集的意义，了解属于、包含、相等关系的意义；掌握一些较简单的集合表示方法与求交集、并集和补集的运算；能使用图形（韦恩图）研究集合的关系以及集合的运算.

二、"三基知识"自测

1. 选择题①

(1) 设全集 $I=\{1,2,3,4,5\}$，集合 $A=\{2,\log_x 2\}$，$B=\{x,2x\}$ 且 $A\cap B=\{2\}$，则集合 $\overline{A\cup B}$ 为（　　）.

(A) $\varnothing$　(B) $\{1\}$　(C) $\{1,2,4\}$　(D) $\{3,5\}$

(2) 设全集 $I=\{a,b,c,d\}$，集合 $A=\{a,b\}$，$B=\{b,c\}$，则以下结论正确的是（　　）.

(A) $\{a\}\in A$　　(B) $b\subset A\cap B$

(C) $\{\varnothing\}\subset I$　　(D) $\overline{A}\cap\overline{B}=\{d\}$

(3) 若 $P=\{y\mid y=x^2,x\in R\}$，$Q=\{(x,y)\mid y=x^2,x\in R\}$，则必有（　　）.

(A) $P\cap Q=\varnothing$　　(B) $P\subset Q$

(C) $P=Q$　　(D) $P\supset Q$

2. 填空题

(1) 已知集合 $A=\{x\mid x^2=x,x\in R\}$，则满足条件 $A\cup B=A$ 的所有集合 B 的个数是________.

(2) 若 $A\subseteq B$，$A\subseteq C$，$B=\{0,1,2,3\}$，$C=\{0,2,4,8\}$，则满足上述条件的集合 A 为________.

(3) 设集合 A、B、C 的关系如图 1-1 所示，则图中阴影部分表示的集合是________.

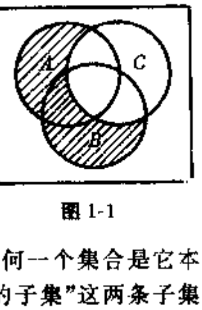


图 1-1

三、课本范例赏析

代数必修本（上册）P_7 例 1：写出集合 $\{a,b\}$ 的所有的子集及真子集.

解决本题不仅要理解子集、真子集的概念，还应掌握"任何一个集合是它本身的子集"与"空集是任何集合的子集"这两条子集的重要性质，这样才能得到正确结果. 此点在 P_5 上有详细阐述，需细读. 若对比 1992 年高考数学（理工农医类）21 题（文史类 22 题）：设含有 10 个元素的集合的全部子集数为 S，其中由 3 个元素组成的子集数为 T，则 $\dfrac{T}{S}$ 的值为________. 可知，它是例 1 的推广与排列组合知识的综合应用. 这里，$S=2^{10}$，$T=C_{10}^3=120$，$\dfrac{T}{S}=\dfrac{120}{2^{10}}=\dfrac{15}{128}$. 一般地，如果一个集合有 n 个元素，那么必有 2^n 个子集及 2^n-1 个真子集.

四、典型例题

例 1　集合 $M=\{x\mid x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4},k\in Z\}$，$N=\{x\mid x=\dfrac{k\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2},k\in Z\}$，则（　　）.

---

① 本书的选择题，其代号为 A、B、C、D 的四个结论中，有且只有一个是正确的. 以后的选择题不再说明.

(A)$M=N$　　　(B)$M\supset N$

(C)$M\subset N$　　　(D)$M\cap N=\varnothing$

思路分析:本题是判断角的集合之间关系,为此需给出各集合中角的集合的终边,这就要对角的集合分类.在 M 中对 k 分成两类:$k=2n$ 或 $k=2n+1(n\in Z)$,此时 $M=\{x|x=n\pi+\frac{\pi}{4},n\in Z\}\cup\{x|x=n\pi+\frac{3\pi}{4},n\in Z\}$;在 N 中对 k 分成四类:$k=4n$ 或 $k=4n+1,k=4n+2,k=4n+3(n\in Z)$,此时 $N=\{x|x=n\pi+\frac{\pi}{2},n\in Z\}\cup\{x|x=n\pi+\frac{3\pi}{4},n\in Z\}\cup\{x|x=n\pi+\pi,n\in Z\}\cup\{x|x=n\pi+\frac{5\pi}{4},n\in Z\}$.因此,$M\subset N$,选 C.

例 2　已知集合 $A=\{x|x^2-3x-10\leqslant 0\}$,$B=\{x|m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$,若 $A\cup B=A$,求实数 m 的取值范围.

思路分析:因为 $A\cup B=A$,即 $B\subseteq A$.又 $A=\{x|x^2-3x-10\leqslant 0\}=\{x|-2\leqslant x\leqslant 5\}$,考虑到"空集是任何集合的子集"这一性质,因此需对 $B=\varnothing$ 与 $B\neq\varnothing$ 两种情况分别确定 m 的取值范围.

(1)若 $B=\varnothing$,则 $m+1>2m-1$,即 $m<2$.此时总有 $A\cup B=A$.故 $m<2$;

(2)若 $B\neq\varnothing$,则 $m+1\leqslant 2m-1$,即 $m\geqslant 2$.

因为 $B\subseteq A$,得

$$\begin{cases}-2\leqslant m+1,\\ 2m-1\leqslant 5.\end{cases}\Rightarrow\quad -3\leqslant m\leqslant 3.$$

$\therefore\quad 2\leqslant m\leqslant 3$.

由(1)、(2)知 m 的取值范围是 $(-\infty,3]$.

例 3　已知集合 $M=\{a,a+d,a+2d\}$,$N=\{a,aq,aq^2\}$,其中 $a\neq 0$,若 $M=N$,求 q 的值.

思路分析:集合 M 中的三个元素是以 a 为首项,d 为公差的等差数列中的前三项;集合 N 中的三个元素是以 a 为首项,q 为公比的等比数列中的前三项.解决此题可以从已知条件 $M=N$ 着眼.为此需分两种情况:

(1)若 $\begin{cases}a+d=aq,&①\\ a+2d=aq^2.&②\end{cases}$

由②－①得　$d=aq(q-1)$,代入①

得　$a+aq(q-1)=aq$,

即　$q^2-2a+1=0$.

$\therefore$　$q=1$.但此时 $aq=aq^2=a$,与集合中的元素的互异性矛盾,故 $q\neq 1$.

(2)若 $\begin{cases}a+d=aq^2,&③\\ a+2d=aq.&④\end{cases}$

由④－③得　$d=aq(1-q)$,代入③

得　$a+aq(1-q)=aq^2$,

即　$2q^2-q-1=0$.

$\therefore$　$q=-\frac{1}{2}$ 或 $q=1$(舍去).

故　$q=-\frac{1}{2}$.

例 4　设 a、b 是两个实数,$A=\{(x,y)|x=n,y=na+b,n\in Z\}$,$B=\{(x,y)|x=m,y=3m^2+15,m\in Z\}$,$C=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 144\}$,是平面 xoy 内的点集合.讨论是否存在 a 和 b 使得(1)$A\cap B\neq\varnothing$;(2)$(a,b)\in C$ 同时成立.

思路分析:如果存在实数 a 和 b 使(1)、(2)同时成立.由(1)成立,知存在整数 n 使得

$na+b=3n^2+15$,即　$b=3n^2+15-na$.　①

由(2)成立,知存在整数 n 使得 $a^2+b^2\leqslant 144$.　②

将①代入②并整理得

$(1+n^2)a^2-2n(3n^2+15)a+(3n^2+15)^2-144\leqslant 0$.　③

而 $\Delta=4n^2(3n^2+15)^2-4(1+n^2)\{(3n^2+15)^2-144\}$

$=-36(n^2-3)^2$,

因为 n 是整数,$n^2-3\neq 0$,则 $\Delta<0$.

又 $1+n^2>0$,故不等式③不可能有实数解 a,即不存在实数 a 和 b,使(1)、(2)同时成立.

五、本课小结

本课从集合间的关系(包含、相等)与运算(交、并、补集)着眼,充分利用集合元素的三性质(无序性、互异性、确定性)解决问题.解此类问题的关键,是将集合问题转化为方程(如"三基知识"1(1))、不等式(如例 2、例 4)、函数、数列(如例 3)、排列组合(如课本范例)等问题.在今后学习中,还将看到,有些数学问题需用集合的观点处理.这也是学习集合知识的原因.在此还应强调:

1. 空集$\varnothing$是不含任何元素的集合,它具有如下重要性质:对任何集合 A,$\varnothing\subseteq A$,$A\cap\varnothing=\varnothing$.解隐含有空集参与的集合关系问题时,切不可忽视空集的这一特性(如例 2);

2. 注意集合的子、交、并、补的等价条件的不同形式.如 $A\subseteq B$ 与 $A\cup B=B$ 或 $A\cap B=A$ 等价;$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$,$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

习题 1

1. 选择题

(1)已知 I 为全集,集合 M、$N\subset I$.若 $M\cap N=N$,则(　　).

(A)$\overline{M}\supseteq\overline{N}$　　　(B)$M\subseteq\overline{N}$

(C)$\overline{M}\subseteq\overline{N}$　　　(D)$\overline{M}\supseteq\overline{N}$

(2)设全集 $I=\{2,3,a^2+2a-3\}$，$A=\{|a+1|,2\}$，$\overline{A}=\{5\}$，则 a 的值是(　　).

(A)2　　　(B)-3 或 1

(C)-4　　　(D)-4 或 2

(3)设集合 $A=\{x|x=a^2+1,a\in N\}$，$B=\{y|y=b^2-4b+5,b\in N\}$，则下述关系中正确的是(　　).

(A)$A=B$　　　(B)$A\supset B$

(C)$A\subset B$　　　(D)$A\cap B=\varnothing$

2. 填空题

(1)设集合 $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x|-1<x\leqslant 3\}$，$C=\{x|-3<x<2\}$，则集合 $A\cap(B\cup C)=$________.

(2)满足 $\{1,3\}\subset A\subsetneqq\{1,3,5,7,9\}$ 的集合 A 的个数为________.

(3)若 $A\subseteq B$，$A\subseteq C$，$B=\{0,1,2,3,4\}$，$C=\{0,2,4,6,8\}$，则满足条件且含元素最多的集合 $A=$________.

3. 解答题

(1)设全集 $I=\{x|0<x<6,x\in N\}$，$A=\{x|x^2-5x+q=0\}$，$B=\{x|x^2+px+12=0\}$，$\overline{A}\cup B=\{1,3,4,5\}$，求集合 A、B.

(2)设全集 $I=\{(x,y)|x\in R,y\in R\}$，集合 $M=\{(x,y)|\frac{y-3}{x-2}=1\}$，$N=\{(x,y)|y\neq x+1\}$，求 $\overline{M\cup N}$.

(3)设 $f(x)=x^2+ax+b$，a、$b\in R$，集合 $A=\{x|x=f(x),x\in R\}$，$B=\{x|x=f[f(x)],x\in R\}$，若 $A=\{-1,3\}$，求 B.

(4)设集合 $A=\{x|x^2+(m+2)x+1=0,x\in R\}$，且 $A\cap R^+=\varnothing$，求实数 m 的取值范围.

第 2 课　映射与函数

一、知识提要

了解映射的概念，在此基础上理解函数三要素(定义域、值域和对应法则)的整体关系. 能用配凑法、待定系数法和换元法等求简单的函数表达式，能建立简单的联系实际问题的函数式.

二、"三基知识"自测

1. 选择题

(1)图 1-2 表示以集合 X 到集合 Y 的对应，其中不是映射的是(　　).

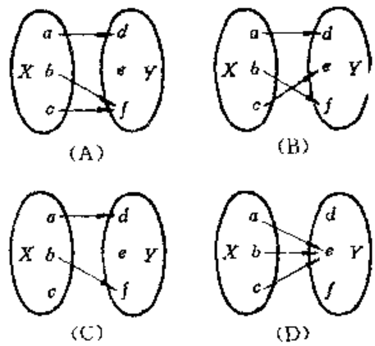


图 1-2

(2)设 $f(x)=2x+3$，$g(x+2)=f(x)$，则 $g(x)$ 等于(　　).

(A)$2x+1$　　　(B)$2x-1$

(C)$2x-3$　　　(D)$2x+7$

(3)已知 $f(\lg x)=x$，则 $f(5)$ 的值为(　　).

(A)10^5　　　(B)5^{10}

(C)$\lg 5$　　　(D)$\log_5 10$

2. 填空题

(1)已知 $A=N$，$B=\{\frac{1}{3},\frac{3}{5},\frac{5}{7},\cdots\}$，映射 $f:x\to y=\frac{2x-1}{2x+1}(x\in A)$，那么在 f 的作用下，象 $\frac{99}{101}$ 的原象是________.

(2)已知函数 $f(x)=x^2+ax+b$ 满足 $f(1)=0$，$f(2)=0$，则 $f(-1)=$________.

(3)已知 $f(x)=\begin{cases}x & (x\geqslant 1),\\ x^2 & (-1<x<1),\\ 2x+3 & (x\leqslant 1).\end{cases}$ 则 $f(3)=$________，$f(-3)=$________，$f(\frac{\sqrt{2}}{2})=$________.

三、课本范例赏析

代数必修本(上册)P_{37} 习题三第 9 题，建筑一个容器为 8000 米^3，深为 6 米的长方体蓄水池，池壁每米^2 的造价为 a 元，池底每米^2 的造价为 $2a$ 元，把总造价 y 元表示为底的一边长 x 米的函数，并指出函数的定义域.

本题是一道函数应用题，解决它的关键是依据题中的等量关系建立函数的解析式. 此点在课本第一章内，不论是例题或习题中均有体现，需认真阅读. 对比 1993 年高考数学第 22 题：建造一个容积为 8m^3，深为 2m 的长方形无盖水池. 如果池底和池壁的造价每平方米分别为 120 元和 80 元，那么水池的最低造价为________元. 可知，此题需先求出水池的总

造价 y 元与池底的长(或宽)x 米的函数解析式 $y=4480+320(x+\frac{4}{x})$，而后再求其最小值 1760 元.它是课本第 9 题的应用与推广.自 1993 年以来，在高考数学试题中加大了应用题的力度，1995 年把应用题作为一道解答题，内容涉及生产经营问题，反映社会经济生活，具有很强的时代感.因此，加强数学应用题的教学，提高分析问题和解决问题的能力是当务之急.

四、典型例题

例 1 与函数 $y=10^{\lg(x-1)}$ 的图象相同的函数是(　　).

(A)$y=x-1$

(B)$y=|x-1|$

(C)$y=\left(\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}\right)^2$

(D)$y=\frac{x^2-1}{x+1}$

思路分析：本题是判断与函数 $y=10^{\lg(x-1)}$，即 $y=x-1(x>1)$ 相同的函数.为此需从函数三要素一一检查，由于函数的定义域和对应法则决定函数的值域，因此只需检查其定义域和对应法则分别相同即可.

(A)的定义域是 R，(D)$\frac{x^2-1}{x+1}=x-1(x\neq-1)$ 都与函数 $y=x-1(x>1)$ 的定义域不同；(B)$y=|x-1|$ 与 $y=x-1(x>1)$ 的对应法则不同；(C)$y=\left(\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}\right)^2=x-1(x>1)$.故与 $y=10^{\lg(x-1)}$ 的图象相同的函数为 $y=\left(\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}\right)^2$，选(C).

例 2 已知 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$，求 $f(x)$.

思路分析：$f(\sqrt{x}+1)$ 是由 $f(u)$ 与 $u=\sqrt{x}+1$ 构成的复合函数.常用换元法，设 $u=\sqrt{x}+1(x\geqslant 0)$，$\sqrt{x}=u-1(u\geqslant 1)$，$x=(u-1)^2$.

$\therefore\quad f(u)=(u-1)^2+2(u-1)=u^2-1(u\geqslant 1)$.

即 $f(x)=x^2-1(x\geqslant 1)$.

本题也可用"配凑"法，将 $x+2\sqrt{x}$ 配凑为 $(\sqrt{x}+1)^2-1$，由于 $x\geqslant 0$，因此 $\sqrt{x}+1\geqslant 1$.

$\therefore\quad f(\sqrt{x}+1)=(\sqrt{x}+1)^2-1$，

即 $f(x)=x^2-1\quad(x\geqslant 1)$.

例 3 已知 $f(x)$ 为二次函数，且 $f(x+1)+f(x-1)=2x^2-4x$，求 $f(1-\sqrt{2})$ 的值.

思路分析：求 $f(1-\sqrt{2})$ 的值的关键是求 $f(x)$.而已知 $f(x)$ 是二次函数，可设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，将其代入已知等式，利用待定系数法求 $f(x)$.

$$f(x+1)=a(x+1)^2+b(x+1)+c=ax^2+(2a+b)x+a+b+c,$$

$$f(x-1)=a(x-1)^2+b(x-1)+c=ax^2-(2a-b)x+a-b+c.$$

由 $f(x+1)+f(x-1)=2x^2-4x$，得

$2ax^2+2bx+2(a+c)=2x^2-4x$.

比较等式两边系数，解得 $a=1,b=-2,c=-1$.

$\therefore\quad f(x)=x^2-2x-1$.

从而 $f(1-\sqrt{2})=0$.

例 4 某地为促进淡水鱼养殖业的发展，将价格控制在适当范围内，决定对淡水鱼养殖提供政府补贴，设淡水鱼的市场价格为 x 元/千克，政府补贴为 t 元/千克，根据市场调查，当 $8\leqslant x\leqslant 14$ 时，淡水鱼的市场日供应量 P 千克与市场日需求量 Q 千克近似地满足关系：

$P=1000(x+t-8)\quad(x\geqslant 8,t\geqslant 0)$，

$Q=500\sqrt{40-(x-8)^2}(8\leqslant x\leqslant 14)$.

当 $P=Q$ 时的市场价格称为市场平衡价格.

(1)将市场平衡价格表示为政府补贴的函数，并求函数的定义域；

(2)为使市场平衡价格不高于每千克 10 元，政府补贴至少为每千克多少元？(1995 年全国高考试题)

思路分析：(1)依题意，由 $P=Q$ 得

$1000(x+t-8)=500\sqrt{40-(x-8)^2}$，

化简得

$$5x^2+(8t-80)x+(4t^2-64t+280)=0.$$

当判别式 $\Delta=800-16t^2\geqslant 0$ 时，可得

$x=8-\frac{4}{5}t\pm\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}$.

结合 $\Delta\geqslant 0,t\geqslant 0,8\leqslant x\leqslant 14$，得不等式组：

$$①\begin{cases}0\leqslant t\leqslant\sqrt{50},\\ 8\leqslant 8-\frac{4}{5}t+\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}\leqslant 14;\end{cases}$$

$$②\begin{cases}0\leqslant t\leqslant\sqrt{50},\\ 8\leqslant 8-\frac{4}{5}t-\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}\leqslant 14.\end{cases}$$

解不等式组①，得 $0\leqslant t\leqslant\sqrt{10}$.不等式组②无解.

故所求的函数关系式为

$x=8-\frac{4}{5}t+\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}$.

函数的定义域为 $[0,\sqrt{10}]$.

(2)为使 $x\leqslant 10$，应有

$8-\frac{4}{5}t+\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}\leqslant 10$.

化简得 $t^2+4t-5\geqslant 0$.

解得 $t\geqslant 1$ 或 $t\leqslant -5$，由于 $t\geqslant 0$，知 $t\geqslant 1$.

从而政府补贴至少为每千克 1 元.

五、本课小结

1. 函数是高中数学的最重要的概念之一，它是用映射概念定义的. 确定两个变量的函数关系时，一是求出它们之间的对应法则，二是求出函数的定义域，从而也确定了函数的值域. 判断两个函数是否为同一个函数(如例 1)应从函数三要素一一对照检查.

2. 求函数表达式的主要方法有配凑法、换元法和待定系数法. 如果已知复合函数 $f[g(x)]$ 的表达式时，常用换元法(如例 2)；当已知函数表达式较为简单时，可直接用配凑法(如例 2)；如果已知函数解析式的构造时，可以用待定系数法(如例 3).

3. 建立简单实际问题的函数式，首先要选定变量，而后寻找等量关系，求得函数表达式(如课本范例与例 4).

习题 2

1. 选择题

(1)下面给出的四组函数中，$f(x)$ 和 $g(x)$ 是同一个函数的是(　　).

(A)$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$，$g(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x^2-1}}$

(B)$f(x)=\log_2 x^2$，$g(x)=2\log_2 x$

(C)$f(x)=\sqrt{(x-1)^2}$，$g(x)=|x-1|$

(D)$f(x)=1$，$g(x)=x^0$

(2)若 $g(x)=1-2x$，$f[g(x)]=\frac{1-x^2}{x^2}(x\neq 0)$，则 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 的值等于(　　).

(A)1　　(B)3

(C)15　　(D)30

(3)已知 $f(x)=\begin{cases}x-5 & (x\geqslant 6)\\ f(x+2) & (x<6)\end{cases}(x\in N)$，则 $f(3)$ 的值等于(　　).

(A)5　　(B)4

(C)3　　(D)2

2. 填空题

(1)已知 $f(a^{x-1})=x^2+1\ (a>0$ 且 $a\neq 1)$，则 $f(x)=$________.

(2)已知函数 $f(x)$ 在 $[-1,2]$ 上的图象如图 1-3，则 $f(x)=$________.

(3)已知函数 $f(x)=ma^x+n$，若 $f(0)=8$，$f(2)=17$，$f(4)=53$，则 $f(x)=$________.

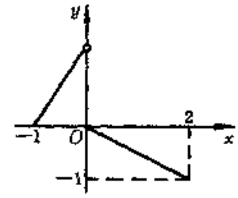


图 1-3

3. 解答题

(1)已知函数 $f(x)$ 满足 $2f(x)-f(\frac{1}{x})+\frac{1}{x}=0(x\neq 0)$，求 $f(x)$ 的表达式.

(2)已知 $x=\sqrt{t+1}$，$y=\sqrt{t-1}(t>1)$，求 y 与 x 的函数表达式.

(3)根据条件，分别求函数 $f(x)$ 的表达式及定义域.

①$f(1-\sin x)=\cos^2 x$；

②$f(x^2-3)=\lg\frac{x^2}{x^2-6}$.

(4)用长为 l 的铁丝弯成下部为矩形，上部为半圆形的框架(图 1-4). 圆的半径为 x，求此框架围成的面积 y 与 x 的函数关系，并写出它的定义域.

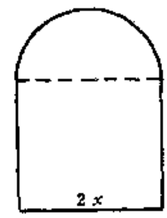


图 1-4

第 3 课　函数的定义域

一、知识提要

掌握确定各种不同类型函数定义域的方法，会用等价的不等式(组)求函数的定义域，对含字母系数的定义域会对字母参数取值范围进行全面讨论.

二、"三基知识"自测

1. 选择题

(1)函数 $y=\sqrt{1-x^2}-\sqrt{x^2-1}$ 的定义域是(　　).

(A)$[-1,1]$　　(B)$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

(C)$[0,1]$　　(D)$\{-1,1\}$

(2)已知函数 $f(x)=\lg[(x-1)(x-2)]$ 的定义域是 F，函数 $g(x)=\lg(x-1)+\lg(x-2)$ 的定义域是 G，则(　　).

(A)$F=G$　　(B)$F\cap G=\varnothing$

(C)$F\subseteq G$　　(D)$G\subseteq F$

(3)已知函数 $f(x)=\frac{1}{1+x}$，则函数 $f[f(x)]$ 的定义域是(　　).

(A) $\{x|x\neq -1\}$

(B) $\{x|x\neq -2\}$

(C) $\{x|x\neq -1$ 且 $x\neq -2\}$

(D) $\{x|x\neq -1$ 或 $x\neq -2\}$

2. 填空题

(1) 函数 $y=\dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{|x|-1}$ 的定义域是________.

(2) 函数 $y=\sqrt{4-x^2}+(x+2)^0$ 的定义域是________.

(3) 函数 $y=\log_x(x^2+x-2)$ 的定义域是________.

三、课本范例赏析

代数必修本(上册) P_{34} 例 5, 求函数 $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}+2$ 的定义域.

本例是求已给出解析式的函数的定义域, 它是求函数定义域问题中最为多见的一类, 在高考数学试题中常有体现. 例如 1990 年上海高考数学试题: 求函数 $y=\dfrac{\sqrt{x+4}}{x+2}$ 的定义域. 此类函数定义域就是使解析式有意义的实数 x 的集合. 由 $x+4\geqslant 0$ 且 $x+2\neq 0$, 得函数的定义域是 $\{x|\geqslant -4$ 且 $x\neq -2\}$, 一般地, 如果函数式为 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, 则 $g(x)\neq 0$; 如果函数式为 $y=\sqrt[2n]{f(x)}\,(n\in N)$, 则 $f(x)\geqslant 0$; 如果函数式为 $y=\log_a f(x)$, 则 $a>0$ 且 $a\neq 1$, $f(x)>0$; 如果函数式为 $y=[f(x)]^0$, 则 $f(x)\neq 0$. 为了说明此点, 课本 P_{23} 上安排 3 个例题, 需认真体会.

四、典型例题

例 1 求函数 $y=\dfrac{\sqrt{6-x-x^2}}{\log_2|x+1|-1}$ 的定义域.

思路分析: 使函数式有意义, 必须使分子 $\sqrt{6-x-x^2}$ 的 $6-x-x^2\geqslant 0$, 且使分母 $\log_2|x+1|-1$ 的 $|x+1|\neq 0$ 且 $\log_2|x+1|-1\neq 0$. 从而将问题转化为解不等式组:

$$\begin{cases}6-x-x^2\geqslant 0\\ |x+1|\neq 0\\ \log_2|x+1|-1\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 2\\ x\neq -1\\ x\neq 1 \text{ 或 } x\neq -3.\end{cases}$$

∴ 函数的定义域为 $(-3,-1)\cup(-1,1)\cup(1,2]$.

例 2 若函数 $f(2^x)$ 的定义域是 $[-1,1]$, 求 $f(\log_2 x)$ 的定义域.

思路分析: 本题属于求复合函数 $y=f[g(x)]$ 的定义域, 解它的关键在于对复合函数定义域的理解. 在 $f(2^x)$ 中, 令 $u=2^x$, $y=f(u)$, $f(2^x)$ 是由 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)=2^x$ 复合而成的函数 $f[g(x)]$, 它的自变量是 x, 中间变量为 u. $f(2^x)$ 的定义域为 $[-1,1]$, 即 $-1\leqslant x\leqslant 1$, 那么 $\dfrac{1}{2}\leqslant u=2^x\leqslant 2$, 因此 $f(u)$ 的定义域为 $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$. 求 $f(\log_2 x)$ 的定义域, 由不等式 $\dfrac{1}{2}\leqslant\log_2 x\leqslant 2$ 解得 $\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 4$, 故函数 $f(\log_2 x)$ 的定义域为 $[\sqrt{2},4]$.

例 3 已知函数 $f(x)=\log_5[2x^2+(m+3)x+2m]$ 的定义域是实数集 R, 求实数 m 的值集.

思路分析: 函数 $f(x)$ 的定义域是 R, 说明当 $x\in R$ 时, $f(x)$ 都有意义.

∴ 当 $x\in R$ 时, $2x^2+(m+3)x+2m>0$ 都成立.

从而 $\Delta=(m+3)^2-4\cdot 2\cdot 2m<0$,

即 $m^2-10m+9<0$,

解之, 得 $1<m<9$.

故 m 的值集是 $\{m|1<m<9\}$.

例 4 求函数 $f(x)=\lg(a^x-k\cdot 2^x)\,(a>0$ 且 $a\neq 1, k\in R)$ 的定义域.

思路分析: 本例是求含参数的函数的定义域. 欲使函数有意义, 必须有 $a^x-k\cdot 2^x>0$, 即 $\left(\dfrac{a}{2}\right)^x>k$. 为确定 x 的取值范围, 需对参数 k 与 a 分类讨论.

(1) 当 $k\leqslant 0$ 时, 因为 $a>0$ 且 $a\neq 1$, 不论 x 取何实数, 总有 $\left(\dfrac{a}{2}\right)^x>0$, 故 $\left(\dfrac{a}{2}\right)^x>k$, 函数的定义域为 R;

(2) 当 $k>0$ 时, 需依据 $\dfrac{a}{2}$ 与 1 的大小关系确定 x 的范围.

①若 $\dfrac{a}{2}>1$, 即 $a>2$, 则 $x>\log_{\frac{a}{2}}k$;

②若 $0<\dfrac{a}{2}<1$, 即 $0<a<2$ 且 $a\neq 1$, 则 $x<\log_{\frac{a}{2}}k$;

③若 $\dfrac{a}{2}=1$, 即 $a=2$, 则当 $0<k<1$ 时, $x\in R$; $k\geqslant 1$ 时, $x\in\varnothing$.

五、本课小结

函数定义域是函数的重要组成部分, 常见求函数定义域的问题有三类:

1. 求给出函数解析式的定义域. 此类函数定义域是使解析式有意义的自变量的取值集合. 除在“课本范例尝析”中介绍的几种函数式求定义域的方法外, 三角函数与反三角函数需根据函数自身的意义确定定义域.

2. 求复合函数 $y=f[g(x)]$ 的定义域. 需根据函数 $u=g(x)$ 的值域确定 x 的范围(如例 2).

3. 求实际问题的函数的定义域. 需根据问题中

变量的实际意义确定定义域.

解决函数定义域问题时，要注意将其转化为解不等式(组)的问题；求含字母参数的函数定义域，应注意对参数进行分类讨论(如例 4).

习题 3

1. 选择题

(1)函数 $y=\sqrt{\log_{\cos\frac{\pi}{4}}\frac{1}{x+3}}$的定义域是(　　).

(A)$x>-3$　　(B)$x>-3$ 且 $x\neq-2$

(C)$x\leqslant-2$　　(D)$x\geqslant-2$

(2)已知函数 $f(x)$的定义域为$[0,1]$，那么函数 $f(x^2-1)$的定义域为(　　).

(A)$[0,1]$

(B)$[1,2]$

(C)$[1,\sqrt{2}]$

(D)$[-\sqrt{2},-1]\cup[1,\sqrt{2}]$

(3)已知函数 $f(x)=\sqrt{mx^2+mx+1}$的定义域是一切实数，则 m 的取值范围是(　　).

(A)$0<m<1$　　(B)$0\leqslant m\leqslant1$

(C)$m\geqslant4$　　(D)$0<m\leqslant4$

2. 填空题

(1)函数 $y=\dfrac{\sqrt{\log_a x^2-1}}{|x|-x}(0<a<1)$的定义域是________.

(2)设 $f(2^x-1)=2x-1$，则 $f(x)$的定义域是________.

(3)若函数 $f(x)$的定义域为$[-1,1]$，则函数 $f(x+\frac{1}{2})-f(x-\frac{1}{2})$的定义域为________.

3. 解答题

(1)求函数 $y=\dfrac{(|\log_2 x|-\frac{1}{2})^0}{x-1}$的定义域并作出函数的图象.

(2)函数 $f(x)$的定义域为$[0,1]$，求函数 $F(x)=f(x+a)\cdot f(x-a)(a\leqslant0)$的定义域.

(3)若函数 $y=\dfrac{kx-1}{kx^2+4kx+3}$的定义域为 R，求实数 k 的取值范围.

(4)已知 $f(x)$是 x 的函数，$x=u(t)=2^t+2^{-t}$，$f[u(t)]=4^t+4^{-t}-4(2^t+2^{-t})$，其中 $t\in R$，求函数 $y=f(x)$的解析式及其定义域.

第 4 课　函数的值域

一、知识提要

掌握求函数值域的基本方法：观察法、配方法、判别式法、换元法、反函数法及不等式法等.

二、"三基知识"自测

1. 选择题

(1)函数 $y=\log_2 x+3(x\geqslant1)$的值域是(　　).

(A)$[2,+\infty)$　　(B)$(3,+\infty)$

(C)$[3,+\infty)$　　(D)$(-\infty,+\infty)$

(2)函数 $y=2-\sqrt{4x-x^2}(0\leqslant x\leqslant4)$的值域是(　　).

(A)$[-2,2]$　　(B)$[1,2]$

(C)$[0,2]$　　(D)$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

(3)值域是 R^+ 的函数是(　　).

(A)$y=5^{x^2}-2$　　(B)$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}$

(C)$y=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^x-1}$　　(D)$y=|\log_2 x^2|$

2. 填空题

(1)函数 $y=2x^2-4x+3(-2\leqslant x\leqslant2)$的值域是________，函数 $y=\sqrt{x-x^2}$的值域是________.

(2)函数 $y=2^{1-|x|}$的值域是________，函数 $y=3^{\frac{1}{2-x}}$的值域是________.

(3)函数 $y=|x+1|+|x-2|$的值域是________.

三、课本范例赏析

代数必修本(上册)P_{86}习题六第 6 题(2)：求函数 $y=\dfrac{x}{x+1}(x\neq-1)$的值域.

本题是求形如 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(c\neq0)$的函数的值域，它是求函数值域的一类典型问题. 解决问题的方法常用：

(1)分离常数法：$y=\dfrac{x}{x+1}=1-\dfrac{1}{x+1}$，当 $x>-1$ 时，$y<1$；当 $x<-1$ 时，$y>1$. 故函数的值域为$\{y|y\in R$ 且 $y\neq1\}$.

(2)反函数法：由 $y=\dfrac{x}{x+1}$反解得 $x=\dfrac{y}{1-y}$，反函数 $y=\dfrac{x}{1-x}$，其定义域为 $x\neq1$，故原函数的值域为$\{y|y\in R$ 且 $y\neq1\}$.

分离常数后利用函数性质确定值域与求反函数，根据反函数的定义域确定原函数的值域是解决分式有理函数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(c\neq0)$求值域常用的方法，

应熟练掌握.

四、典型例题

例1 求函数 $y=\frac{x^2+x+1}{x+1}$ 的值域.

思路分析:本题属于求分式有理函数 $y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ 的值域问题.首先确定函数的定义域为 $x\neq-1$.

由于分式函数的分子 x^2+x+1 的次数高于分母 $x+1$ 的次数,可以将函数式分离出整式:

$$y=\frac{(x+1)^2-(x+1)+1}{x+1}=(x+1)+\frac{1}{x+1}-1$$

当 $x>-1$ 时,$x+1>0$,由均值不等式得

$$y\geqslant2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}}-1=1.$$

当且仅当 $x+1=\frac{1}{x+1}$,即 $x=0$ 时,有 $y=1$;

当 $x<-1$ 时,$x+1<0$,那么

$$-y=-(x+1)+\frac{1}{-(x+1)}+1$$
$$\geqslant2\sqrt{-(x+1)\cdot\frac{1}{-(x+1)}}+1=3.$$

$\therefore$ $y\leqslant-3$,当且仅当 $-(x+1)=\frac{1}{-(x+1)}$,即 $x=-2$ 时,有 $y=-3$.

综上可知,函数的值域是 $(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$.

由于分式函数的分子 x^2+x+1 是 x 的二次式,可以将函数式化为 x 的二次方程,得另一解法:

由 $y=\frac{x^2+x+1}{x+1}$,得 $x^2+(1-y)x+(1-y)=0$.

$\because$ $x\in R$ 且 $x\neq-1$,

$\therefore$ $\Delta=(1-y)^2-4(1-y)\geqslant0$.

解不等式得 $y\leqslant-3$ 或 $y\geqslant1$,从而得函数的值域.

例2 求函数 $y=x+\sqrt{4-x^2}$ 的值域.

思路分析:本题是求无理函数的值域.首先想到的方法是将它化为整式函数.得如下第一种解法:

原函数等价于

$$\begin{cases}(y-x)^2=4-x^2, & ①\\ y-x\geqslant0. & ②\end{cases}$$

由①得 $2x^2-2xy+y^2-4=0$.

$\because$ $x\in R$,$\therefore$ $\Delta=4y^2-4\cdot2(y^2-4)\geqslant0$,

解得 $-2\sqrt{2}\leqslant y\leqslant2\sqrt{2}$.

又 $4-x^2\geqslant0$,得 $-2\leqslant x\leqslant2$.

由② $y\geqslant x$, 从而 $-2\leqslant y\leqslant2\sqrt{2}$.

故函数的值域是 $[-2,2\sqrt{2}]$.

若观察无理式 $\sqrt{4-x^2}$ 的特征,由 $4-x^2\geqslant0$,即 $-2\leqslant x\leqslant2$,借助三角换元 $x=2\cos\theta$,将函数式化为简单的三角式,得如下第二种解法:

设 $x=2\cos\theta,\theta\in[0,\pi]$,则

$$y=2\cos\theta+\sqrt{4-4\cos^2\theta}$$
$$=2\cos\theta+2\sin\theta$$
$$=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right).$$

$\because$ $\theta+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$,

$\therefore$ $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$.

$\therefore$ $y\in[-2,2\sqrt{2}]$,由此得函数的值域.

例3 求下列函数的值域:

(1) $y=2x-5+\sqrt{15-4x}$;

(2) $y=\frac{\sqrt{x+2}}{x+3}$.

思路分析:(1)本题如果用例2的方法解是不便的.由于无理式 $\sqrt{15-4x}$ 的根下式 $15-4x$ 与函数式中有理式 $2x-5$ 同为一次式,因此可用代换 $t=\sqrt{15-4x}$,将原函数化为 t 的二次式.

由于 $15-4x\geqslant0$,知函数的定义域是 $x\leqslant\frac{15}{4}$.

设 $t=\sqrt{15-4x}(t\geqslant0)$,则 $x=\frac{1}{4}(15-t^2)$.

$$\therefore\quad y=-\frac{1}{2}t^2+t+\frac{5}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}(t-1)^2+3.$$

当 $t=1$,即 $\sqrt{15-4x}=1$,$x=\frac{7}{2}$ 时,y 取最大值 3,无最小值.故函数的值域是 $(-\infty,3]$.

(2)设 $t=\sqrt{x+2}$,将原函数化为 t 的有理分式.

由于 $x+2\geqslant0$ 且 $x+3\neq0$,知函数的定义域为 $x\geqslant-2$.

设 $t=\sqrt{x+2}(t\geqslant0)$,则 $x=t^2-2$.

$$\therefore\quad y=\frac{t}{t^2+1}.$$

当 $t=0$,即 $x=-2$ 时,y 取最小值 0.

当 $t>0$,即 $x>-2$ 时,

$$y=\frac{1}{t+\frac{1}{t}}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}}=\frac{1}{2},$$

当且仅当 $t=1$,即 $x=-1$ 时,y 取最大值 $\frac{1}{2}$.

故函数的值域为 $[0,\frac{1}{2}]$.

五、本课小结

求函数的值域时应首先确定函数的定义域.求函数值域的方法随函数式而异:

1. 形如 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的函数，常用配方法；

2. 形如 $y=\frac{ax+b}{cx+d}(c\neq0)$ 的函数，常用反函数法与分离常数法(如"课本范例尝析")；

3. 形如 $y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ 的函数，常用判别式法与分离整式法(如例 1)；

4. 形如 $y=f(x)+\sqrt{g(x)}$ ($f(x)$ 是常数或 x 的一次式，$g(x)$ 是 x 的一次或二次式)的函数，常用换元法(代数或三角换元)与平方法(如例 2、例 3)；

5. 形如 $y=|x+a|\pm|x+b|$ (a、b 为不相等的常数)的函数，用观察图象的方法(如"三基自测"2(3))；

6. 利用均值不等式求一些函数的值域(如例 1 的解法一、例 3(2)).

习题 4

1. 选择题

(1)函数 $f(x)=\frac{5x}{5x+1}$ 的值域是(　　).

(A) $(-\infty,1)\cup(5,+\infty)$

(B) $(1,5)$

(C) $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

(D) $(-\infty,-\frac{1}{5})\cup(-\frac{1}{5},+\infty)$

(2)函数 $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ 的值域是(　　).

(A) $[-1,1]$　　(B) $[0,1]$

(C) $[-1,0]$　　(D) $[1,2]$

(3)函数 $f(x)=\sqrt{2^x-8}+\sqrt{1-\log_3 x}+5$ 的值域是(　　).

(A) R　(B) R^+　(C) $\{5\}$　(D) $[5,+\infty)$

2. 填空题

(1)函数 $y=x+\sqrt{1-x}$ 的值域是________.

(2)函数 $y=\frac{ax+3}{1+2x}(x\neq-\frac{1}{2})$ 的值域是 $y\neq-2$ 的一切实数，则 $a=$________.

3. 解答题

(1)求函数 $y=2x-3+\sqrt{13-4x}$ 的值域.

(2)已知 $f(x)$ 的值域是 $[\frac{3}{8},\frac{4}{9}]$，试求函数 $y=f(x)+\sqrt{1-2f(x)}$ 的值域.

(3)若函数 $y=\frac{x-a}{x^2-ax+1}$ 的定义域为 R，求函数的值域.

(4)若函数 $y=\frac{ax+b}{x^2+1}(x\in R)$ 的值域为 $[-1,4]$，求 a、b 的值.

第 5 课　函数的单调性

一、知识提要

理解函数单调性的概念，会用定义判断一些简单函数的单调性并能用函数的单调性解题.

二、"三基知识"自测

1. 选择题

(1)在区间 $(-\infty,1)$ 上是递增函数的是(　　).

(A) $y=(x-1)^{-2}$　　(B) $y=\frac{1}{x-1}$

(C) $y=\log_2(1-x)$　　(D) $y=2^{\frac{1}{x}}$

(2)设 (a,b)，(c,d) 都是函数的单调递增区间，且 $x_1\in(a,b)$，$x_2\in(c,d)$，$x_1<x_2$，则 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小关系是(　　).

(A) $f(x_1)<f(x_2)$　　(B) $f(x_1)>f(x_2)$

(C) $f(x_1)=f(x_2)$　　(D)不能确定

(3)若函数 $f(x)=x^2+2(a-1)x+2$ 在区间 $(-\infty,4)$ 上是减函数，则实数 a 的取值范围是(　　).

(A) $a\leqslant-3$　　(B) $a\geqslant-3$

(C) $a\leqslant5$　　(D) $a\geqslant3$

2. 填空题

(1)函数 $y=\sqrt{x^2+2x-3}$ 的单调递减区间是________.

(2)函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}|x+2|$ 的单调递增区间是________.

(3)已知函数 $f(x)$ 在 $x\in R$ 是减函数，$g(x)$ 在 $x\in R$ 上是增函数，判断下列函数在 $x\in R$ 上的增减性：$f[g(x)]$________；$g[f(x)]$________；$f[f(x)]$________；$g[g(x)]$________.

三、课本范例赏析

代数必修本(上册) P_{59} 习题五第 7 题，证明函数 $f(x)=-x^3+1$ 在 $(-\infty,0)$ 上是减函数.

证明函数的单调性在课本 P_{52} 安排有两个例题，在 P_{53} 还给 3 个练习题，可见教材十分重视函数这一性质. 正因为此，在历届高考数学试题中常见有关函数单调性的问题. 1991 年高考数学(理工农医类)(24)题：根据函数单调性的定义，证明函数 $f(x)=-x^3+1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数. 只是将上题的定义域 $(-\infty,0)$ 改为 $(-\infty,+\infty)$.

证明函数单调性的方法是定义法，结合 1991 年试题说明其一般步骤：

在 $(-\infty,+\infty)$ 上任取 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，则

$f(x_2)-f(x_1)=x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$.

$\because x_1<x_2$, $\therefore$ $x_1-x_2<0$.

当 $x_1x_2<0$ 时，有 $x_1^2+x_1x_2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-x_1x_1>0$；

当 $x_1x_2\geqslant 0$ 时，有 $x_1^2+x_1x_2+x_2^2\geqslant 0$；

$\therefore$ $f(x_2)-f(x_1)=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)<0$.

即 $f(x_2)<f(x_1)$.

所以，函数 $f(x)=-x^3+1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数.

四、典型例题

例 1 试讨论函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 在 $[-1,1]$ 上的单调性.

思路分析：讨论函数的单调性，就要确定函数的单调区间. 为此可以用单调函数的定义来找.

设 $x_1,x_2\in[-1,1]$，且 $x_1<x_2$，即 $-1\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$.

$$\begin{aligned}f(x_1)-f(x_2)&=\sqrt{1-x_1^2}-\sqrt{1-x_2^2}\\&=\frac{(1-x_1^2)-(1-x_2^2)}{\sqrt{1-x_1^2}+\sqrt{1-x_2^2}}\\&=\frac{x_2^2-x_1^2}{\sqrt{1-x_1^2}+\sqrt{1-x_2^2}}\\&=\frac{(x_2+x_1)(x_2-x_1)}{\sqrt{1-x_1^2}+\sqrt{1-x_2^2}}.\end{aligned}$$

这里变形的目的是为判断差 $f(x_1)-f(x_2)$ 的正负.

由于 $\sqrt{1-x_1^2}+\sqrt{1-x_2^2}>0$，$x_2-x_1>0$，而 x_1+x_2 的符号不能确定，因此应根据 x_1+x_2 的正负确定单调区间.

当 $x_1>0$，$x_2>0$ 时，总有 $x_1+x_2>0$，那么 $f(x_1)-f(x_2)>0$；当 $x_1<0$，$x_2<0$ 时，总有 $x_1+x_2<0$，那么 $f(x_1)-f(x_2)<0$；而当 x_1,x_2 异号时，x_1+x_2 的符号不能确定. 故当 $x\in[-1,0]$ 时函数 $f(x)$ 是单调递增，当 $x\in[0,1]$ 时函数 $f(x)$ 是单调递减.

例 2 试讨论函数 $y=2\log^2_{\frac{1}{2}}x-2\log_{\frac{1}{2}}x+1$ 的单调性.

思路分析：函数的定义域为 $(0,+\infty)$. 如果令 $u=g(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$，$y=f(u)=2u^2-2u+1$，那么原函数 $y=f[g(x)]$ 是由 $g(x)$ 与 $f(u)$ 复合而成的复合函数.

而 $u=\log_{\frac{1}{2}}x$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 时是减函数. $y=2u^2-2u+1=2(u-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}$ 在 $u\in(-\infty,\frac{1}{2})$ 时是减函数，在 $u\in[\frac{1}{2},+\infty)$ 时是增函数.

又 $u\leqslant\frac{1}{2}$，即 $\log_{\frac{1}{2}}x\leqslant\frac{1}{2}$，则 $x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$；$u\geqslant\frac{1}{2}$，得 $x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.

由此，从下表讨论复合函数 $y=f[g(x)]$ 的单调性：

函数	单调性	
	$(0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$	$[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$
$u=\log_{\frac{1}{2}}x$	↘	↘
$f(u)=2u^2-2u+1$	↗	↘
$y=2\log^2_{\frac{1}{2}}x-2\log_{\frac{1}{2}}x+1$	↘	↗

故函数 $y=2\log^2_{\frac{1}{2}}x-2\log_{\frac{1}{2}}x+1$ 在区间 $(0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$ 上单调递减，在区间 $[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$ 上单调递增.

例 3 求函数 $f(x)=\log_{0.5}|x^2-x-12|$ 的单调区间.

思路分析：求函数的单调区间也可以根据图象来解. 设 $u=|x^2-x-12|$，其图象如图 1-5. 观察图象知，函数 u 的递增区间为 $(-3,\frac{1}{2}]\cup(4,+\infty)$，$u$ 的递减区间为 $(-\infty,-3)\cup[\frac{1}{2},4)$. 而 $y=\log_{0.5}u$ 是减函数，故函数 $f(x)$ 的递减区间为 $(-3,\frac{1}{2})\cup(4,+\infty)$，递增区间为 $(-\infty,-3)\cup[\frac{1}{2},4)$.

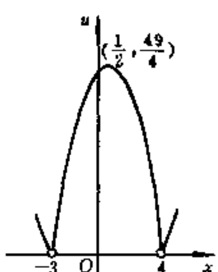


图 1-5

例 4 设 $0<a<1$，$x>0$，$f(\log_a x)=\frac{a(x^2-1)}{x(a^2-1)}$，试比较 $f(a)$ 与 1 的大小.

思路分析：为比较 $f(a)$ 与 1 的大小，应首先求出 $f(x)$. 由已知条件，令 $t=\log_a x$，则 $x=a^t$，从而 $f(t)=\frac{a(a^{2t}-1)}{a^t(a^2-1)}=\frac{a}{a^2-1}(a^t-a^{-t})$.

$\therefore$ $f(x)=\frac{a}{a^2-1}(a^x-a^{-x})$.

观察 $f(x)$，发现 $f(1)=\frac{a}{a^2-1}(a-\frac{1}{a})=1$，因此比较 $f(a)$ 与 1 的大小，就是比较 $f(a)$ 与 $f(1)$ 的大小. 而 $0<a<1$，只需判断 $f(x)$ 的单调性.

设 $x_1<x_2$，则 $-x_1>-x_2$. 由于 $0<a<1$，所以 $y=a^x$ 在 R 上是减函数，从而 $a^{x_1}>a^{x_2}$ 且 $a^{-x_1}<a^{-x_2}$.

$\therefore\quad f(x_2)-f(x_1)=\frac{1}{a^2-1}[(a^{x_2}-a^{x_1})+(a^{-x_1}-a^{-x_2})]>0$,

即 $f(x_1)<f(x_2)$,

$\therefore$ $f(x)$是 R 上的增函数.

$\therefore$ $f(a)<f(1)=1$.

五、本课小结

1. 讨论函数单调性必须在其定义域内求，函数的单调区间是其定义域的子集. 因此，讨论函数的单调性，应先确定函数的定义域.

2. 证明函数的单调性与求函数的单调区间，均可用单调函数的定义，具体方法常用作差法或作商比较法(如课本范例与例 1).

3. 复合函数 $y=f[g(x)]$的单调性规律是"同则增，异则减"，即 $f(u)$与 $g(x)$若具有相同的单调性则 $f[g(x)]$必定是增函数，若具有不同的单调性则 $f[g(x)]$必定是减函数. 讨论复合函数单调性的步骤是：

(1)求出复合函数的定义域；

(2)把复合函数分解成若干个常见的基本函数，并判定其单调性；

(3)把中间变量的变化范围转化成自变量的变化范围；

(4)根据上述复合函数的单调性规律判定其单调性.(如例 2)

4. 求函数的单调区间的方法，除定义法外，还可以根据函数图象用数形结合的方法(如例 3).

5. 用函数的单调性比较大小(如例 4)是函数单调性的应用之一，除此在求函数值域与最值等方面也常运用函数这一性质.

习题 5

1. 选择题

(1)函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-1))(x+3)$单调递增区间是(　　).

(A)$(-\infty,-3)$　　(B)$(-\infty,-1)$

(C)$(1,+\infty)$　　(D)$(-3,-1)$

(2)函数 $f(x)=4x^2-mx+1$，当 $x\geqslant-2$ 时递增，当 $x\leqslant-2$ 时递减，则 $f(1)$的值等于(　　).

(A)13　(B)1　(C)21　(D)-3

(3)若 $y=(a^2-1)^x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是减函数，则 a 的取值范围是(　　).

(A)$|a|<1$　　(B)$1<|a|<2$

(C)$1<|a|<\sqrt{2}$　(D)$1<a<\sqrt{2}$

2. 填空题

(1)函数 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x-3}$的单调递减区间是________.

(2)函数 $y=\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}$在区间$[4,5]$上是________函数，在区间$[3,4]$上是________函数.

(3)函数 $y=\frac{x^2-2x}{1-|x-1|}$在区间________上是增函数，在区间________上是减函数.

3. 解答题

(1)判断函数 $f(x)=\frac{1}{x+2}+\lg\frac{1-x}{1+x}$的单调性并给出证明.

(2)讨论函数 $f(x)=\frac{ax}{x^2-1}(-1<x<1)$的单调性.

(3)若函数 $f(x)=\log_a(2-ax)$在$[0,1]$上单调递减，求 a 的取值范围.

(4)已知 $f(x)=8+2x-x^2$，$g(x)=f(2-x^2)$，试求 $g(x)$的单调区间.

第 6 课　函数的奇偶性

一、知识提要

正确理解奇、偶函数的概念，会用定义判断一些简单函数的奇偶性并能用函数奇偶性解题.

二、"三基知识"自测

1. 选择题

(1)下列函数中为奇函数的是(　　).

(A)$f(x)=2x+1$　　(B)$f(x)=\frac{1+x^2}{1-x^2}$

(C)$f(x)=x^3+x^{-\frac{1}{3}}$　(D)$f(x)=\lg\frac{x}{1-x}$

(2)对任意奇函数 $f(x)$，都有(　　).

(A)$f(x)-f(-x)>0(x\in R)$

(B)$f(x)f(-x)\leqslant0(x\in R)$

(C)$f(x)-f(-x)\leqslant0(x\in R)$

(D)$f(x)f(-x)>0(x\in R)$

(3)若函数 $f(x)$是偶函数，$(x\in R)$，在 $x<0$ 时，y 是增函数，对 $x_1<0$，$x_2>0$ 且$|x_1|<|x_2|$，则(　　).

(A)$f(-x_1)>f(-x_2)$

(B)$f(-x_1)<f(-x_2)$

(C)$f(-x_1)=f(-x_2)$

(D)$f(-x_1)$、$f(-x_2)$大小不定

2. 填空题

(1)具有奇偶性的函数对其定义域的要求是________.

(2)若 $f(x)$ 是奇函数，在 $x=0$ 处有定义，则 $f(0)=$______.

(3)已知函数 $y=f(x)$ 的图象关于原点对称，且当 $x<0$ 时，$f(x)=x^2-\sin x+2$，那么当 $x>0$ 时函数 $f(x)$ 的表达式是______.

三、课本范例赏析

代数必修本(上册) P_{105} 复习参考题一第 16 题. 求证：在公共的定义域内，

(1)奇函数与奇函数的积是偶函数；

(2)奇函数与偶函数的积是奇函数；

(3)偶函数与偶函数的积是偶函数；

这是涉及奇偶函数积的奇偶性判断的问题，其证明方法是用奇偶函数的定义. 类似的，奇(偶)函数的和也有相应性质. 奇偶函数的这些性质便于判断函数的奇偶性. 例如 1993 年高考数学第(8)题：$F(x)=(1+\frac{2}{2^x-1})f(x)(x\neq0)$ 是偶函数，且 $f(x)$ 不恒等于零，则 $f(x)$

(A)是奇函数

(B)是偶函数

(C)可能是奇函数也可能是偶函数

(D)不是奇函数也不是偶函数

此题是上述 14(1)或(3)的逆用，两函数之积为偶函数，则两函数具有相同的奇偶性，因此只需判断 $g(x)=1+\frac{2}{2^x-1}$ 的奇偶性即可.

∵ $x\neq0$，$2^x-1\neq0$，对定义域 $\{x\mid x\neq0\}$ 中任意 x，

$$g(-x)=1+\frac{2}{2^{-x}-1}=1+\frac{2\cdot2^x}{1-2^x}$$
$$=-(-1+\frac{2\cdot2^x}{2^x-1})$$
$$=-(-1+2+\frac{2}{2^x-1})$$
$$=-(1+\frac{2}{2^x-1})$$
$$=-f(x).$$

∴ $g(x)$ 是奇函数. 从而 $f(x)$ 也是奇函数，选 A.

利用定义判定函数的奇偶性，在课本 P_{38} 上有详细阐述，请认真阅读，熟练掌握.

四、典型例题

例 1 判断函数 $f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x+2|-2}$ 的奇偶性.

思路分析：判断函数的奇偶性用定义法，如果按下述方法判断：

∵ $f(-x)=\frac{\sqrt{1-(-x)^2}}{|-x+2|-2}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x-2|-2}$

$\neq f(x)$，

∴ $f(x)$ 是非奇非偶函数.

这里的判断是错误的，其原因是没有考虑函数 $f(x)$ 的定义域. 正确的方法是先求定义域再用定义法判定.

由 $1-x^2\geqslant0$ 且 $|x+2|-2\neq0$，得函数 $f(x)$ 的定义域 $[-1,0)\cup(0,1]$. 于是 $x+2>0$，那么

$$f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x+2|-2}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x+2-2}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$
$$f(-x)=\frac{\sqrt{1-(-x)^2}}{-x}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=-f(x).$$

∴ $f(x)$ 是奇函数.

例 2 已知 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，且 $f(x)-g(x)=\frac{1}{x+1}$，求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的解析式.

思路分析：将 $f(x)$ 与 $g(x)$ 分别视为两个变元，它们满足方程 $f(x)-g(x)=\frac{1}{x+1}$ ①

根据 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，

∴ $f(-x)=-f(x)$，$g(-x)=g(x)$.

由此可得 $f(-x)-g(-x)=\frac{1}{-x+1}$，

∴ $-f(x)-g(x)=-\frac{1}{x-1}$.

这样 $f(x)$，$g(x)$ 也满足方程

$f(x)+g(x)=\frac{1}{x-1}$ ②

由①、②联立解得

$f(x)=\frac{2x}{x^2-1}$，$g(x)=\frac{2}{x^2-1}$.

例 3 已知 $f(x)$ 是 R 上的奇函数，且当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f(x)=-x\lg(2-x)$，求 $f(x)$ 的解析式.

思路分析：由于 $f(x)$ 的定义域是 R，且已给了 $(-\infty,0)$ 上 $f(x)$ 的解析式，故只要求 $[0,+\infty)$ 的上 $f(x)$ 的解析式.

∵ $f(x)$ 是奇函数，可得

$f(0)=-f(0)$，

∴ $f(0)=0$.

当 $x>0$ 时，$-x<0$，

由已知 $f(-x)=x\lg(2+x)$，

∴ $-f(x)=x\lg(2+x)$，

即 $f(x)=-x\lg(2+x)(x>0)$.

∴ $f(x)=\begin{cases}-x\lg(2-x)(x<0),\\-x\lg(2+x)(x\geqslant0).\end{cases}$

即 $f(x)=-x\lg(2+|x|)(x\in R)$.

例 4 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,-10]\cup[10,+\infty)$ 上的奇函数，且 $f(x)$ 在 $[10,+\infty)$ 上单调递减.

(1)判断 $f(x)$ 在 $(-\infty,-10]$ 上的单调性，并用定义予以证明；