



北京工业大学

“211工程”资助出版

# 激光频率的 变换与扩展

——实用非线性光学技术

李 港 著



科学出版社  
[www.sciencep.com](http://www.sciencep.com)



北京工业大学

“211 工程”资助出版

# 激光频率的变换与扩展

——实用非线性光学技术

李 港 著

科 学 出 版 社

北 京

## 内 容 简 介

本书系统地讨论了在稳态和瞬态两种不同情况下,利用非线性光学效应对激光频率进行变换和扩展的各种方法:倍频、和频、差频、光参量、四波混频、三次谐波、双光子吸收、光束自作用、高次谐波、受激光散射等,并从理论上进行了严谨的推导,从技术上进行了详细的分析,给出了大量设计和实验的具体例子。科研工作者或生产技术人员、甚至是研究生,依据本书即可开展激光频率变换和扩展方面的工作。

本书可供在激光领域内从事基础研究和应用研究的科研人员 and 研究生,以及在其他领域内应用激光进行科研和生产的工程技术人员和研究人员参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

激光频率的变换与扩展:实用非线性光学技术 / 李港著. —北京:科学出版社,2005

ISBN 7-03-015417-7

I. 激… II. 李… III. 激光-频率-研究 IV. TN24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 037468 号

责任编辑:童安齐 何舒民 / 责任校对:刘彦妮

责任印制:吕春珉 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

新蕾印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

2005年7月第一版 开本:B5(720×1000)

2005年7月第一次印刷 印张:24 1/4

印数:1-1500 字数:479 000

定价:56.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换(新欣))

销售部电话:010-62136131 编辑部电话:010-62137026(BA03)

## 总 序

“211工程”是目前我国教育领域唯一的国家重点建设工程,其宗旨是面向 21 世纪重点建设一百所高水平大学,使其成为我国培养高层次人才,解决经济建设、社会发展和科技进步重大问题的基地,形成我国高等学校重点学科的整体优势,增强和完善国家科技创新体系,跟上和占领世界高层次人才培养和科技发展的制高点。

我国高等教育发展迅猛,尤其是 1400 余所地方高等院校已经占全国高等院校总数的 90%,成为我国高等教育实现大众化的重要力量,也成为为区域和社会服务的重要生力军,“211工程”建设对于北京工业大学实现跨越式发展、增强服务北京的能力起到了重大的推动作用。

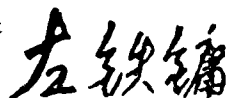
在北京市委和市政府的高度重视和大力支持下,1996 年 12 月北京工业大学通过了“211工程”部门预审,成为北京市属高校唯一进入国家“211工程”重点建设的百所大学之一,2001 年 6 月以优异成绩通过国家“211工程”一期建设验收,2002 年 10 月顺利通过国家“211工程”二期建设可行性论证。北京工业大学紧紧抓住这一难得的历史性发展机遇,根据首都经济和社会发展的需要,坚持“科学定位,找准目标,发挥优势,办出特色”的办学方针和“立足北京,融入北京,辐射全国,面向世界”的指导思想,以学科建设为龙头,师资队伍建设为关键,重点建设了电子信息、新材料、光机电一体化、城市建设与交通、生物医药、环境与能源、经济与管理类学科,积极发展了人文社会科学类学科,加强了基础类学科,形成了规模、层次及布局合理的学科体系,实现了从工科大学向以工为主,理、工、经、管、文、法相结合的多学科性大学转变,从教学型大学向教学研究型大学的转变。

北京工业大学现有 9 个博士后站,6 个一级博士点,25 个二级博士点,55 个硕士点。教师中有院士 6 人,博士导师 150 人,教授 230 人,专任教师中有博士学位的达到 30%。北京工业大学年科研经费达到 23 000 万元,获国家自然科学基金项目近 40 项。获奖项目有:材料学科获百篇优秀博士学位论文奖,抗震减灾学科与交通学科的研制项目于 2002 年分别获得国家科技进步二等奖,计算机学科的研制项目于 2003 年获得国家科技进步二等奖。此外,光电子学科在新型高效、高亮度半导体发光二极管的研制,新医药与生物工程学科在国家 P3 实验室建设和抗 HIV 药物的研制,环境与能源工程学科在奥运绿色建筑标准与大气环境治理,光学学科在大功率激光器研制,管理科学与工程学科在国家中长期能源规划等方面都取得了特色鲜明的科研成果。

为了总结和交流北京工业大学“211工程”建设的科研成果,学校设立了“211工程”专项出版资金,资助出版系列学术专著。这些专著从一个侧面反映了我校的学科方向、研究领域、学术成就和教学成果。

展望北京工业大学的未来,我们任重而道远。我坚信,只要我们珍惜“211工程”建设和奥运羽毛球馆建设这两大机遇,构建高层次学科体系,营造优美的大学校园,我校在建设成为国内一流大学的进程中就一定能够为“新北京、新奥运”的宏伟蓝图做出自己应有的贡献。

北京工业大学校长  
中国科协副主席  
中国工程院院士



2004年3月

# 前 言

激光自诞生以来,已经获得了巨大的发展和广泛的应用。在进入 21 世纪的今天,激光作为科研和生产的有力手段,已广泛应用于各个领域,对科学和社会的进步产生了深刻的影响,并发挥着越来越大的作用。从实际需要的角度来说,不同的应用场合所要求的激光波长是不一样的。例如,激光生物显微镜需要 560nm 波长的激光作为光源,激光直接制版印制需要 400nm 波长的激光作为光源,人造卫星激光测距需要 532nm 波长的激光作为光源,制备超大规模集成电路需要接近真空紫外波长的激光作为光源,测量大气污染需要中红外波长的激光作为光源,激光表演需要全彩色激光作为光源,等等。这些波长一般不能从激光器直接输出,只能用频率变换和扩展的方法产生。对于目前实际应用的激光器来说,多数激光器输出的激光波长单一,不可调;少数激光器输出的激光波长虽然可调,但调谐范围很窄,远不能满足科研和生产的实际需要。

利用非线性光学的方法,对激光频率进行变换和扩展,是切实可行和正常有效的。目前,利用这一方法获得的激光波长,几乎覆盖了红外—可见—紫外的整个光学波段,并将激光波长伸展到了毫米波段和 X 射线波段,基本上满足了日益发展的科研、生产和国防的需要。

非线性光学方法是进行激光频率变换与扩展唯一有效的方法,研究高效率的激光频率变换与扩展技术,是激光学科和非线性光学学科的发展方向之一,因此本书从非线性光学的角度出发,研究和讨论了各种激光频率变换与扩展技术。

本书第一章给出了阅读本书所需要的一些必备知识,包括张量、晶体点群和对称操作、晶体光学、电磁场的量子化等,已经掌握了这些知识的读者,可越过本章直接阅读后面各章。第二章和第三章分别给出了非线性极化率张量的经典理论和量子理论,因非线性极化率张量是描述强光与物质相互作用的重要物理量。第四章推导了三波共线和四波共线的非线性振幅耦合波动方程,这是描述二阶非线性光学效应和部分三阶非线性光学效应的基本方程。第五章和第六章分别讨论了单轴晶体和双轴晶体的相位匹配技术,此项技术对于获得高效率的激光频率变换与扩展是非常重要的。实际上,第二章、第三章、第五章和第六章,都是为解第四章给出的非线性振幅耦合波动方程作必要的理论准备。从第七章起至第十三章,用了七章的篇幅从稳态和瞬态两方面对非线性振幅耦合波动方程进行了求解,得到了利用光学倍频效应、光学混频效应、光学参量效应进行高效率激光频率变换和扩展的理论结果和技术条件。第十四章给出了一些常用非线性光学晶体的技术参数,这对设计

和利用非线性光学效应进行激光频率变换和扩展是十分需要的。第十五章对一些能够进行激光频率变换和扩展的三阶非线性光学效应作了必要的讨论,如四波混频、三次谐波、双光子吸收与频率上转换、受激光散射、光束自作用、高次谐波等,而略去了与激光频率变换和扩展无关的一些三阶非线性光学效应,如相位共轭、光学双稳态、自感应透明等。由于受激拉曼散射能够有效地进行激光的频率变换和扩展,并已进入实用化,第十六章给出了氢气中受激拉曼散射的一些研究结果。

本书目录中带\*号的章节可略去不读。

本书在写作和整理过程中,得到了陈檬老师和唐晓军、王登顺、毕向军、庞庆生、张彪等研究生的帮助,在此表示感谢。同时也非常感谢我的家人对我的大力支持。

由于本人的水平和时间、精力有限,书中不可避免地存在着不足之处,请读者批评指正。

李 港

2005 年于北京工业大学

# 目 录

总序

前言

<b>第一章 预备知识</b> .....	1
§ 1 张量及其变换 .....	1
§ 2 晶体点群及对称操作 .....	9
§ 3 晶体光学 .....	17
§ 4 电磁场的量子化 .....	28
<b>第二章 非线性极化率的经典理论</b> .....	32
§ 1 概述 .....	32
§ 2 一维线性极化率 .....	33
§ 3 一维非线性极化率 .....	35
§ 4 三维空间非线性极化强度 .....	38
§ 5 极化率张量的宏观性质 .....	39
§ 6 极化率张量的化简 .....	41
<b>*第三章 非线性极化率的量子理论</b> .....	45
§ 1 密度矩阵 .....	45
§ 2 极化率张量元 .....	48
§ 3 共振极化率 .....	52
§ 4 核运动对极化率的影响 .....	55
<b>第四章 非线性振幅耦合波动方程</b> .....	60
§ 1 瞬态振幅耦合波动方程 .....	60
§ 2 三波共线振幅耦合波动方程 .....	64
§ 3 Manley-Rowe 关系式 .....	65
§ 4 四波共线耦合波动方程 .....	66
<b>第五章 单轴晶体的相位匹配</b> .....	68
§ 1 角度相位匹配 .....	68
§ 2 倍频极化张量 .....	73
§ 3 有效倍频极化系数 .....	75
§ 4 温度相位匹配 .....	78
§ 5 允许角度 .....	79



§ 6	允许线宽 .....	83
§ 7	允许温度 .....	85
* § 8	非共线相位匹配 .....	87
* § 9	晶体热效应的影响 .....	91
<b>第六章</b>	<b>双轴晶体的相位匹配</b> .....	<b>93</b>
§ 1	角度相位匹配 .....	93
§ 2	倍频极化张量 .....	97
§ 3	有效倍频极化系数 .....	98
§ 4	最佳相位匹配角计算举例 .....	105
§ 5	温度相位匹配 .....	108
§ 6	允许角度 .....	110
§ 7	允许线宽和允许温度 .....	111
* § 8	非共线相位匹配 .....	114
<b>第七章</b>	<b>稳态光学倍频效应</b> .....	<b>115</b>
§ 1	小信号近似解 .....	115
§ 2	大信号解 .....	117
§ 3	离散角和聚焦的影响 .....	118
§ 4	最佳晶体长度(强泵浦情况) .....	122
* § 5	晶体谐振腔(弱泵浦情况) .....	125
* § 6	倍频放大器 .....	129
§ 7	高倍频转换效率的获得 .....	132
§ 8	周期极化晶体的准相位匹配技术 .....	136
<b>第八章</b>	<b>瞬态光学倍频效应与连续调谐倍频</b> .....	<b>143</b>
§ 1	小信号近似解 .....	143
§ 2	相位匹配与脉宽展宽 .....	144
§ 3	大信号解 .....	147
* § 4	包络色散的影响 .....	150
§ 5	瞬态倍频实验举例 .....	152
* § 6	连续调谐倍频 .....	155
<b>第九章</b>	<b>稳态光学混频效应</b> .....	<b>159</b>
§ 1	归一化耦合波方程 .....	159
§ 2	小信号近似解 .....	162
§ 3	大信号解 .....	163
§ 4	最佳晶体长度 .....	165
§ 5	泵浦光发散角和线宽的影响 .....	167

* § 6	频率上转换 .....	169
§ 7	三倍频及设计举例 .....	172
* § 8	光学整流效应 .....	175
§ 9	混频实验举例 .....	176
<b>第十章</b>	<b>瞬态光学混频效应</b> .....	<b>180</b>
§ 1	瞬态振幅耦合波方程 .....	180
§ 2	无色散近似解 .....	182
§ 3	群速度失配的影响 .....	185
§ 4	光混频的空间特性 .....	188
§ 5	光混频的时空特性 .....	191
* § 6	包络色散的影响 .....	191
§ 7	瞬态混频晶体设计举例 .....	193
* § 8	脉宽的有效压缩 .....	195
§ 9	典型实验举例 .....	201
<b>第十一章</b>	<b>稳态光学参量发生器和放大器</b> .....	<b>205</b>
§ 1	耦合波方程和初始条件 .....	206
§ 2	小信号近似解 .....	207
§ 3	大信号解 .....	209
§ 4	光学参量放大器的增益 .....	213
* § 5	自发参量辐射 .....	215
* § 6	线宽展宽机理及参量光线宽 .....	220
§ 7	参量光的线宽压缩 .....	227
§ 8	参量光的调谐 .....	229
<b>第十二章</b>	<b>高斯波光学参量发生器和放大器的时空特性</b> .....	<b>232</b>
§ 1	高斯光束和耦合波方程 .....	232
§ 2	泵浦光强时空非均匀分布的影响 .....	234
§ 3	泵浦光强时空有限分布的影响 .....	238
§ 4	高质量高效率瞬态参量光的获得 .....	242
* § 5	包络色散的影响 .....	243
§ 6	瞬态参量晶体设计举例 .....	249
<b>第十三章</b>	<b>光学参量振荡器</b> .....	<b>253</b>
§ 1	单谐振荡器的阈值 .....	253
§ 2	双谐振荡器的阈值 .....	255
§ 3	单谐振荡器的转换效率 .....	257
§ 4	双谐振荡器的转换效率 .....	259

§ 5	输出光谱和调谐 .....	263
§ 6	脉冲振荡器 .....	266
* § 7	同步泵浦光参量振荡器 .....	269
§ 8	光学参量振荡器实验举例 .....	271
<b>第十四章</b>	<b>非线性光学晶体材料</b> .....	<b>278</b>
§ 1	KDP、KD*P、ADP 晶体 .....	278
§ 2	LiNbO <sub>3</sub> 和 $\alpha$ -LiIO <sub>3</sub> 晶体 .....	283
§ 3	BBO 和 LBO、CLBO 晶体 .....	285
§ 4	KTP、KTA、RTA 和 KN 晶体 .....	290
§ 5	有机非线性光学晶体 .....	294
* § 6	中红外非线性光学晶体 .....	296
* § 7	自倍频晶体 .....	302
* § 8	晶体参数测量 .....	303
<b>第十五章</b>	<b>其他激光频率变换与扩展技术</b> .....	<b>307</b>
§ 1	四波混频 .....	307
§ 2	三次谐波 .....	312
§ 3	双光子吸收与频率上转换 .....	316
§ 4	受激光散射 .....	322
* § 5	受激布里渊散射(SBS) .....	326
§ 6	光束自作用 .....	334
§ 7	高次谐波 .....	343
<b>第十六章</b>	<b>受激拉曼散射</b> .....	<b>349</b>
§ 1	受激拉曼散射物理图像与拉曼介质 .....	349
§ 2	受激拉曼散射基本理论 .....	352
§ 3	斯托克斯散射 .....	356
§ 4	反斯托克斯散射 .....	360
§ 5	受激拉曼散射阈值 .....	363
§ 6	受激拉曼散射转换效率 .....	366
* § 7	电子、自旋反转及双谐泵浦受激拉曼散射 .....	370
<b>参考文献</b>	.....	<b>373</b>

# 第一章 预备知识

本章讲述了阅读本书所必备的一些基础知识,已经掌握了这些基础知识的读者,可越过本章而直接阅读第二章。

## § 1 张量及其变换

### 1. 张量基本概念

在物理学中,除了用“标量”和“矢量”描述物体的物理性质外,还常常需要用“张量”来描述物体的物理性质或表述某一物理量。

在各向异性介质中,取一直角坐标系  $O-x_1x_2x_3$ ,令其三个坐标轴方向上的单位矢量分别为  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ ,外电场  $\mathbf{E}$  可表示为

$$\mathbf{E} = E_1\hat{e}_1 + E_2\hat{e}_2 + E_3\hat{e}_3 \quad (1-1-1)$$

式中:  $E_1, E_2, E_3$  分别是外电场  $\mathbf{E}$  沿  $x_1, x_2, x_3$  轴方向上的分量。设外电场较弱,产生的极化强度矢量是线性的,则极化强度矢量可表示为

$$\mathbf{P} = P_1\hat{e}_1 + P_2\hat{e}_2 + P_3\hat{e}_3 \quad (1-1-2)$$

式中:  $P_1, P_2, P_3$  分别是  $\mathbf{P}$  沿  $x_1, x_2, x_3$  轴方向上的分量。在各向异性介质中,外电场的  $E_1, E_2, E_3$  三个分量对产生  $P_1$  均起作用。同样,  $E_1, E_2, E_3$  也都对  $P_2$  和  $P_3$  的产生起作用,即

$$P_1 = \epsilon_0(\chi_{11}E_1 + \chi_{12}E_2 + \chi_{13}E_3) \quad (1-1-3a)$$

$$P_2 = \epsilon_0(\chi_{21}E_1 + \chi_{22}E_2 + \chi_{23}E_3) \quad (1-1-3b)$$

$$P_3 = \epsilon_0(\chi_{31}E_1 + \chi_{32}E_2 + \chi_{33}E_3) \quad (1-1-3c)$$

或者

$$\mathbf{P} = \epsilon_0[(\chi_{11}E_1 + \chi_{12}E_2 + \chi_{13}E_3)\hat{e}_1 + (\chi_{21}E_1 + \chi_{22}E_2 + \chi_{23}E_3)\hat{e}_2 + (\chi_{31}E_1 + \chi_{32}E_2 + \chi_{33}E_3)\hat{e}_3] \quad (1-1-4)$$

式中:  $\chi_{ij}$  表示外电场在  $j$  轴方向上的分量产生了  $i$  轴方向上的极化强度分量,如  $\chi_{12}$  表示  $x_2$  轴方向上的电场分量产生了  $x_1$  轴方向上的极化强度分量。

由式(1-1-4)知,在各向异性介质中,为了描述其线性极化的性质,需要用九个分量  $\chi_{ij}$ 。将这九个分量排列成下列方阵

$$\begin{array}{ccc} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{array} \quad (1-1-5)$$

它们组成一个张量,称为线性极化率张量,这是一个二阶张量。

通常用矩阵来表示二阶张量,它的九个分量可排成一个(3×3)矩阵,即

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{pmatrix} \quad (1-1-6)$$

若将外电场  $E$  和极化强度  $P$  也用矩阵表示

$$E = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} \quad (1-1-7)$$

则式(1-1-4)可用矩阵形式表示为

$$P = \epsilon_0 \chi E \quad (1-1-8)$$

由上面的例子可以看出,二阶张量是一个由九个分量组成的量,它作用到一个矢量上可以得到另一个矢量。若用  $T_{ij}$  表示某二阶张量  $\tilde{T}^{(2)}$  的九个分量,  $A_j, B_i$  分别代表矢量  $A$  和矢量  $B$  的三个分量,它们之间的关系可以表示为

$$B = \tilde{T}^{(2)} A \quad (1-1-9)$$

其分量之间的关系为

$$B_i = \sum_j T_{ij} A_j \quad (1-1-10)$$

若一个二阶张量,它的分量之间存在着下列关系

$$T_{ij} = T_{ji} \quad (1-1-11)$$

称此张量为对称张量。二阶对称张量最多有六个独立分量,可以写为

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{pmatrix} \quad (1-1-12)$$

若一个二阶张量,它的分量之间存在着下列关系

$$T_{ij} = -T_{ji} \quad (1-1-13)$$

称此张量为反对称张量。在反对称张量中,要求  $T_{ii} = -T_{ii}$ ,就必然导致反对称张量的对角线分量为 0,即  $T_{ii} = 0$ ,故二阶反对称张量中只有三个独立分量,可以表示为

$$\begin{pmatrix} 0 & T_{12} & T_{13} \\ -T_{12} & 0 & T_{23} \\ -T_{13} & -T_{23} & 0 \end{pmatrix} \quad (1-1-14)$$

任何一个二阶张量  $\tilde{T}^{(2)}$  都可以分解成一个对称张量  $\tilde{T}_S^{(2)}$  和一个反对称张量  $\tilde{T}_A^{(2)}$  之和,即

$$\tilde{T}^{(2)} = \tilde{T}_S^{(2)} + \tilde{T}_A^{(2)} \quad (1-1-15)$$

它们的分量之间的关系为

$$T_{Sij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) \quad (1-1-16a)$$

$$T_{Aij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) \quad (1-1-16b)$$

若一个张量可以表示为

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1-1-17)$$

称此张量为单位张量。单位张量  $I$  作用到任何矢量  $A$  上,得到的矢量仍旧是  $A$ ,即

$$\vec{I}A = A \quad (1-1-18)$$

张量除了可以用矩阵方法表示外,还可以用并矢的方法表示,即两矢量  $A$  和  $B$  并列在一起  $AB$ ,称二重并矢,有九个分量。一般情况下, $AB \neq BA$ 。若直角坐标轴上的单位矢量为  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ ,二重并矢可表示为

$$\begin{aligned} AB &= A_1B_1\hat{e}_1\hat{e}_1 + A_1B_2\hat{e}_1\hat{e}_2 + A_1B_3\hat{e}_1\hat{e}_3 \\ &+ A_2B_1\hat{e}_2\hat{e}_1 + A_2B_2\hat{e}_2\hat{e}_2 + A_2B_3\hat{e}_2\hat{e}_3 \\ &+ A_3B_1\hat{e}_3\hat{e}_1 + A_3B_2\hat{e}_3\hat{e}_2 + A_3B_3\hat{e}_3\hat{e}_3 \end{aligned} \quad (1-1-19)$$

二阶张量可表示为

$$\vec{T}^{(2)} = \sum_{ij} T_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1-1-20)$$

二重并矢和矢量的点积为另一矢量,有

左点积

$$C \cdot (AB) = (C \cdot A)B \quad (1-1-21a)$$

右点积

$$(AB) \cdot C = A(B \cdot C) \quad (1-1-21b)$$

一般情况下,左点积和右点积并不相等。

在描述物体的压电效应、线性光电效应等性质时,要用到三阶张量  $T^{(3)}$ 。三阶张量有 27 个分量  $T_{ijk}$ ,可用三重并矢  $ABC$  表示。它作用到二重并矢  $BC$  上,可以得到另一个矢量  $A$ ,表示为

$$A = \vec{T}^{(3)}BC \quad (1-1-22)$$

分量形式为

$$A_i = \sum_{jk} T_{ijk}^{(3)} B_j C_k \quad (1-1-23)$$

三阶张量  $\vec{T}^{(3)}$  作用到一个矢量  $B$  上,可以得到一个二阶张量  $\vec{F}^{(2)}$ ,即

$$\vec{F}^{(2)} = \vec{T}^{(3)}B \quad (1-1-24a)$$

$$F_{ij}^{(2)} = \sum_k T_{ijk}^{(3)} B_k \quad (1-1-24b)$$

若三阶张量分量  $T_{ijk}$  的前两个脚标  $i, j$  具有交换对称性, 即  $i, j$  交换后其值不变, 有  $T_{ijk} = T_{jik}$ , 则可以引入约化指标  $\mu$  将三阶张量表示为矩阵形式。约化指标  $\mu$  和脚标  $ij$  的对应关系如下

$$\left. \begin{array}{l} ij = 11, 22, 33, 32, 31, 21 \\ \qquad \qquad \qquad 23, 13, 12 \\ \mu = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{array} \right\} \quad (1-1-25)$$

采用约化指数后, 三阶张量可以表示为一个  $(6 \times 3)$  矩阵, 即

$$T^{(3)} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} \\ T_{51} & T_{52} & T_{53} \\ T_{61} & T_{62} & T_{63} \end{pmatrix} \quad (1-1-26)$$

若三阶张量的后两个脚标  $jk$  具有交换对称性, 引入约化指标[将式(1-1-25)中的  $ij$  改为  $jk$ ]后, 三阶张量可表示为一个  $(3 \times 6)$  矩阵, 即

$$T^{(3)} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} & T_{15} & T_{16} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} & T_{25} & T_{26} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} & T_{35} & T_{36} \end{pmatrix} \quad (1-1-27)$$

描述物体的弹光效应、二次电光效应等性质时, 要用到四阶张量  $\tilde{T}^{(4)}$ 。四阶张量有 81 个分量  $T_{ijkl}$ , 它作用到一个三重并矢  $BCD$  上, 可以得到另一个矢量  $A$ , 表示为

$$A = \tilde{T}^{(4)} BCD \quad (1-1-28)$$

分量形式为

$$A_i = \sum_{jkl} T_{ijkl}^{(4)} B_j C_k D_l \quad (1-1-29)$$

四阶张量作用到一个二阶张量  $\tilde{F}^{(2)}$  上, 可以得到另一个二阶张量  $\tilde{H}^{(2)}$ , 即

$$\tilde{H}^{(2)} = \tilde{T}^{(4)} \tilde{F}^{(2)} \quad (1-1-30a)$$

$$H_{ij}^{(2)} = \sum_{kl} T_{ijkl}^{(4)} F_{kl}^{(2)} \quad (1-1-30b)$$

四阶张量作用到矢量  $B$  上, 可以得到另一个三阶张量  $\tilde{G}^{(3)}$ , 即

$$\tilde{G}^{(3)} = \tilde{T}^{(4)} B \quad (1-1-31a)$$

$$G_{ijk}^{(3)} = \sum_l T_{ijkl}^{(4)} B_l \quad (1-1-31b)$$

若四阶张量分量  $T_{ijkl}$  的前两个脚标  $i, j$  之间具有交换对称性, 后两个脚标  $k, l$  之间也具有交换对称性, 即

$$T_{ijkl} = T_{jikl}, \quad T_{ijkl} = T_{ijlk}, \quad T_{ijkl} = T_{jilk} \quad (1-1-32)$$

则四阶张量最多只有 36 个独立分量,采用约化指标后,四阶张量可表示为一个  $(6 \times 6)$  矩阵,即

$$T^{(4)} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} & T_{15} & T_{16} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} & T_{25} & T_{26} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} & T_{35} & T_{36} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} & T_{45} & T_{46} \\ T_{51} & T_{52} & T_{53} & T_{54} & T_{55} & T_{56} \\ T_{61} & T_{62} & T_{63} & T_{64} & T_{65} & T_{66} \end{pmatrix} \quad (1-1-33)$$

标量  $\psi$  可以看成是 0 阶张量,只有一个分量。矢量  $\mathbf{B}$  可以看成是一阶张量,有 3 个分量。二阶张量  $\vec{T}^{(2)}$  有九个分量,三阶张量  $\vec{T}^{(3)}$  有 27 个分量,四阶张量  $\vec{T}^{(4)}$  有 81 个分量,……推而广之, $n$  阶张量有  $3^n$  个分量。若  $n=s+r$ ,则  $n$  阶张量与  $s$  阶张量作用,可以得到  $r$  阶张量,即

$$\vec{T}^{(r)} = \vec{T}^{(n)} \vec{T}^{(s)} \quad (1-1-34)$$

故物体的各种物理性质都可以用张量来描述。

## 2. 张量变换

张量作为描述物体客观性质的物理量,不会因为坐标系的不同而发生变化。在不同坐标系中,张量是不变的。但张量的各分量与坐标系有关,因此在不同的坐标系中,张量的各分量是不同的。同一张量在不同坐标系中分量之间的坐标变换关系,需要根据矢量分量的坐标变换关系来找寻。

设新、旧坐标系  $O-x'_1x'_2x'_3$  和  $O-x_1x_2x_3$  有共同的原点,沿坐标轴上的单位矢量分别为  $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$  和  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ ,先回顾矢量分量的坐标变换关系。

设矢量  $\mathbf{B}$  在旧坐标系中的分量为  $(B_1, B_2, B_3)$ ,在新坐标系中的分量为  $(B'_1, B'_2, B'_3)$ ,则

$$\mathbf{B} = B_1\hat{e}_1 + B_2\hat{e}_2 + B_3\hat{e}_3 = B'_1\hat{e}'_1 + B'_2\hat{e}'_2 + B'_3\hat{e}'_3 \quad (1-1-35)$$

分别用  $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$  左点乘式(1-1-35),得

$$B'_1 = \sum_j \hat{e}'_1 \cdot \hat{e}_j B_j \quad (1-1-36a)$$

$$B'_2 = \sum_j \hat{e}'_2 \cdot \hat{e}_j B_j \quad (1-1-36b)$$

$$B'_3 = \sum_j \hat{e}'_3 \cdot \hat{e}_j B_j \quad (1-1-36c)$$

令  $\alpha_{ij}$  表示新坐标系  $i$  轴和旧坐标系  $j$  轴之间的夹角  $\theta_{ij}$  的余弦

$$\alpha_{ij} = \hat{e}'_i \cdot \hat{e}_j = \cos\theta_{ij} \quad (1-1-37)$$

式(1-1-36)可表示为

$$B'_i = \sum_j \alpha_{ij} B_j \quad (1-1-38)$$



引入坐标变换矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \quad (1-1-39)$$

矢量  $B$  的分量由旧坐标系到新坐标系的变换式(1-1-38)可用矩阵乘法表示为

$$\begin{pmatrix} B'_1 \\ B'_2 \\ B'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} \quad (1-1-40)$$

或者简写成

$$B' = AB \quad (1-1-41)$$

矢量  $B$  的分量由新坐标系到旧坐标系的逆变换为

$$B_i = \sum_j \alpha_{ji} B'_j \quad (1-1-42a)$$

$$B = A'B \quad (1-1-42b)$$

式中:  $A'$  为  $A$  的转置矩阵。

$$(\alpha_{ij})' = \alpha_{ji} \quad (1-1-43)$$

以上为矢量  $B$  的分量在不同坐标系中的变换。对于二阶张量来说,设

$$C = \vec{T}^{(2)} B \quad (1-1-44)$$

在  $O-x_1x_2x_3$  坐标系中,有

$$C_i = \sum_j T_{ij} B_j \quad (1-1-45)$$

在  $O-x'_1x'_2x'_3$  坐标系中,有

$$C'_k = \sum_l T'_{kl} B'_l \quad (1-1-46)$$

根据式(1-1-38),令

$$C'_k = \sum_i \alpha_{ki} C_i \quad (1-1-47)$$

将式(1-1-45)和式(1-1-42a)代入式(1-1-47),得

$$C'_k = \sum_{ij} \alpha_{ki} T_{ij} B_j = \sum_{ijl} \alpha_{ki} T_{ij} \alpha_{lj} B'_l \quad (1-1-48)$$

比较式(1-1-46)和式(1-1-48),可得

$$T'_{kl} = \sum_{ij} \alpha_{ki} \alpha_{lj} T_{ij} \quad (1-1-49)$$

此为二阶张量  $\vec{T}^{(2)}$  分量的坐标变换关系,采用矩阵方法表示为

$$T' = ATA' \quad (1-1-50)$$

二阶张量分量的逆变换公式为

$$T_{ij} = \sum_{kl} \alpha_{ki} \alpha_{lj} T'_{kl} \quad (1-1-51)$$