

非线性
动力学丛书

3

碰撞振动与控制

金栋平 胡海岩 编著



科学出版社

www.sciencep.com

非线性动力学丛书 3

碰撞振动与控制

金栋平 胡海岩 编著



科学出版社

北京

内 容 简 介

本书应用分析力学、振动力学、非线性动力学的理论与方法,结合振动控制理论对工程系统中普遍存在的碰撞问题进行了详细阐述,介绍了目前在该领域的一些基本分析方法和碰撞振动控制手段,内容涉及刚体碰撞、弹性体碰撞、碰撞波传播、碰撞系统建模、碰撞振动的非线性动力学及稳定性,以及基于最优控制理论的碰撞系统参数优化问题、碰撞振动系统的时滞反馈控制和模糊逻辑控制等.本书理论分析、数值计算和实验研究相结合,彼此印证,注重结果的完美、真实和可靠.

本书可供高等院校力学、机械、车辆、航空航天、动力学与控制等相关专业高年级大学生、研究生和教师以及从事相关领域的工程师和技术人员阅读.

图书在版编目(CIP)数据

碰撞振动与控制/金栋平,胡海岩编著. —北京:科学出版社, 2005

(非线性动力学丛书;3)

ISBN 7-03-015487-8

I. 碰… II. ①金… ②胡… III. 碰撞(力学)—研究 IV. O313.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第044783号

责任编辑:吕虹/责任校对:宋玲玲

责任印制:钱玉芬/封面设计:王浩

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005年9月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2005年9月第一次印刷 印张: 14 1/4

印数: 1—2 500 字数: 265 000

定价: 39.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

《非线性动力学丛书》编委会

主 编 胡海岩

编 委 (以汉语拼音为序)

陈立群 冯再春 何国威

金栋平 马兴瑞 孟 光

余振苏 徐 鉴 张 伟

周又和

《非线性动力学丛书》序

真实的动力系统几乎都含有各种各样的非线性因素，诸如机械系统中的间隙、干摩擦，结构系统中的材料弹塑性、构件大变形，控制系统中的元器件饱和特性、变结构控制策略等等。实践中，人们经常试图用线性模型来替代实际的非线性系统，以求方便地获得其动力学行为的某种逼近。然而，被忽略的非线性因素常常会在分析和计算中引起无法接受的误差，使得线性逼近成为一场徒劳。特别对于系统的长时间历程动力学问题，有时即使略去很微弱的非线性因素，也会在分析和计算中出现本质性的错误。

因此，人们很早就开始关注非线性系统的动力学问题。早期研究可追溯到1673年 Huygens 对单摆大幅摆动非等时性的观察。从19世纪末起，Poincaré、Lyapunov、Birkhoff、Andronov、Arnold 和 Smale 等数学家和力学家相继对非线性动力系统的理论进行了奠基性研究，Duffing、van der Pol、Lorenz、Ueda 等物理学家和工程师则在实验和数值模拟中获得了许多启示性发现。他们的杰出贡献相辅相成，形成了分岔、混沌、分形的理论框架，使非线性动力学在20世纪70年代成为一门重要的前沿学科，并促进了非线性科学的形成和发展。

近20年来，非线性动力学在理论和应用两个方面均取得了很大进展。这促使越来越多的学者基于非线性动力学观点来思考问题，采用非线性动力学理论和方法，对工程科学、生命科学、社会科学等领域中的非线性系统建立数学模型，预测其长期的动力学行为，揭示内在的规律性，提出改善系统品质的控制策略。一系列成功的实践使人们认识到：许多过去无法解决的难题源于系统的非线性，而解决难题的关键在于对问题所呈现的分岔、混沌、分形、孤立子等复杂非线性动力学现象具有正确的认识和理解。

近年来，非线性动力学理论和方法正从低维向高维乃至无穷维发展。伴随着计算机代数、数值模拟和图形技术的进步，非线性动力学所处理的问题规模和难度不断提高，已逐步接近一些实际系统。在工程科学界，以往研究人员对于非线性问题绕道而行的现象正在发生变化。人们不仅力求深入分析非线性对系统动力学的影响，使系统和产品的动态设计、加工、运行与控制满足日益提高的运行速度和精度需求；而且开始探索利用分岔、混沌等非线性现象造福人类。

在这样的背景下,有必要组织在工程科学、生命科学、社会科学等领域中从事非线性动力学研究的学者撰写一套非线性动力学丛书,着重介绍近几年来非线性动力学理论和方法在上述领域的一些研究进展,特别是我国学者的研究成果,为从事非线性动力学理论及应用研究的人员,包括硕士研究生和博士研究生等,提供最新的理论、方法及应用范例.在科学出版社的大力支持下,组织了这套《非线性动力学丛书》.

本套丛书在选题和内容上有别于郝柏林先生主编的《非线性科学丛书》(上海教育出版社出版),它更加侧重于对工程科学、生命科学、社会科学等领域中的非线性动力学问题进行建模、理论分析、计算和实验.与国外的同类丛书相比,它更具有整体的出版思想,每分册阐述一个主题,互不重复等特点.丛书的选题主要来自我国学者在国家自然科学基金等资助下取得的研究成果,有些研究成果已被国内外学者广泛引用或应用于工程和社会实践,还有一些选题取自作者多年的教学成果.

希望作者、读者、丛书编委会和科学出版社共同努力,使这套丛书取得成功.

胡海岩

2001年8月

前 言

在航空航天、机械制造、土木工程等领域存在着由间隙而导致的冲击或碰撞振动,例如飞船对接引起的碰撞、大型太阳能帆板因关节间隙产生的碰撞振动、飞行器稳瞄系统的非光滑性导致的碰撞振动、海洋平台桩腿受到海冰的往复挤压碰撞、机械手在作业中对产品的碰触、电动冲击机械等等.在相同初始条件下,动力学系统的长期响应会因为往复碰撞振动的累积而变得面目全非;同时,碰撞还会影响冲击机械产品的动态性能,可以引起系统局部产生永久塑性形变,使材料的力学性质发生本质改变,以致引发灾难性后果.例如2003年6月6日,针对“哥伦比亚”号航天飞机可能因泡沫撞击导致失事之疑,美国在得克萨斯州圣安东尼奥西南研究所进行了增强型碳基复合材料板的撞击实验,该板是一块真正的航天飞机机翼部件,曾随美国“发现”号航天飞机30次进入太空.据报道,“一块货真价实的航天飞机机翼部件,在受到重约0.76千克的泡沫隔热材料高速撞击后,落下了一道长约7.6厘米的裂痕”,“哥伦比亚”号事故调查委员会称,虽然实验结果尚需进一步分析,但它首次提供了具体的证据,表明泡沫材料撞击确实会导致航天飞机机翼部件破裂.可见,碰撞问题远非人们所想像的那样简单,即使对于一个简单的碰撞动力学系统你也会得到一些意想不到的发现.

全书共8章,首先立足于分析力学,提炼了若干碰撞问题的解析方法,以经典力学方法详细分析了质点碰撞、刚体碰撞和弹性体碰撞问题.然后应用非线性动力学理论深入研究了单自由度和两个自由度碰撞振动系统的非线性动力学现象,并对拍击碰撞、多自由度系统的周期碰撞进行了分析.最后基于最优控制理论阐述了最佳碰撞参数的确定问题,以及时滞反馈和模糊逻辑控制对于抑制碰撞振动的有效性.撰写时,对经典内容作了简明、严谨的阐述,同时着重吸取了本课题组的近期研究成果,力求反映该领域的最新进展.

本书部分内容得到国家自然科学基金(编号:59572024和59905010)、航空基础科学基金(编号:98B52018)和教育部博士点基金(编号:1997028749)的资助,在此表示感谢.

北京航空航天大学陆启韶教授和北京大学刘才山副教授在审稿中提出宝贵修改意见,在此深表谢意.感谢海军航空工程学院韩维副教授对本书部分内容做出的重要贡献.最后对科学出版社为提高本书出版质量所付出的辛勤劳动致以敬意.

作 者

2005年5月于南京

目 录

前言

第一章 持久碰撞	1
§ 1.1 冲击概念	2
§ 1.2 基本方程	3
§ 1.3 Lagrange 方程	4
§ 1.4 Jourdain 变分原理	8
1.4.1 完整坐标形式	8
1.4.2 非完整坐标形式	12
§ 1.5 Gauss 最小约束原理	18
§ 1.6 Maggi 方法	20
§ 1.7 Boltzmann-Hamel 碰撞方程	21
1.7.1 第 1 类碰撞问题	21
1.7.2 第 2 类碰撞问题	23
第二章 质体碰撞	29
§ 2.1 质体正碰撞	29
2.1.1 自由质体与弹性壁碰撞	29
2.1.2 约束质体与弹性壁碰撞	31
2.1.3 Hertz 接触模型	32
§ 2.2 质体斜碰撞	34
§ 2.3 双质体正碰撞	36
§ 2.4 双质体斜碰撞	40
2.4.1 光滑接触面碰撞	40
2.4.2 非光滑接触面碰撞	41
2.4.3 碰撞期间的能量损失	42
§ 2.5 双质体三维斜碰撞	44
第三章 刚体碰撞	47
§ 3.1 刚体平面碰撞	47
3.1.1 基本方程	47
3.1.2 变构形碰撞	49

§ 3.2 三维刚体碰撞	53
§ 3.3 具有 Coulomb 摩擦的刚体碰撞	56
3.3.1 压缩末冲量	56
3.3.2 接触点相对速度与粘滞	57
3.3.3 可逆滑动对冲量的影响	58
第四章 弹性体碰撞	61
§ 4.1 弹性杆纵向碰撞	61
4.1.1 波动方程	61
4.1.2 初始位移激发的扰动	63
4.1.3 初始速度激发的扰动	63
4.1.4 突加载荷激发的扰动	64
4.1.5 波在自由端的反射	64
4.1.6 波在固定端的反射	65
4.1.7 波在界面的反射与透射	65
§ 4.2 弹性梁横向碰撞	67
4.2.1 弹性梁横向自由振动	68
4.2.2 两端固支均匀梁的特征函数	68
4.2.3 横向冲击力下的受迫响应	69
4.2.4 弹性梁的横向碰撞	70
4.2.5 模态截断与参数识别	72
第五章 单自由度系统碰撞振动	75
§ 5.1 自由系统的碰撞振动	75
§ 5.2 受迫系统的碰撞振动	77
5.2.1 周期碰撞振动的存在性	77
5.2.2 周期碰撞振动的稳定性	80
5.2.3 受迫碰撞振动的幅频特征	84
§ 5.3 具有阻尼的碰撞振动	85
§ 5.4 碰撞系统非线性动力学	87
5.4.1 碰撞动力系统	87
5.4.2 动力系统的 Poincaré 映射	90
5.4.3 擦边碰撞引起的不稳定性	91
5.4.4 碰撞动力学的映射方法	92
5.4.5 接触时间的计算	94

§ 5.5 斜碰撞振动	100
5.5.1 斜碰撞振动的力学描述	100
5.5.2 斜碰撞过程的分段分析	101
5.5.3 一个参数激励碰撞系统	102
5.5.4 数值仿真	105
第六章 两自由度系统碰撞振动	107
§ 6.1 正碰撞振动	107
6.1.1 周期碰撞振动	107
6.1.2 稳定性分析	110
6.1.3 数值研究	113
6.1.4 碰撞类型的实验研究	115
§ 6.2 斜碰撞振动	118
6.2.1 冲量步进算法	118
6.2.2 接触期间的运动分析	121
6.2.3 $1/l$ 周期碰撞的存在性	124
6.2.4 $1/l$ 周期碰撞的稳定性	126
6.2.5 数值研究	128
§ 6.3 斜碰撞动力学实验研究	131
6.3.1 实验系统	131
6.3.2 自由碰撞实验	133
6.3.3 碰撞动力学现象	134
§ 6.4 一个局部碰撞映射方法	138
6.4.1 单侧约束	138
6.4.2 双侧约束	142
第七章 多自由度系统碰撞振动	149
§ 7.1 碰撞系统的建模	149
7.1.1 Lagrange 方法	149
7.1.2 离散元法(DEM)	151
7.1.3 谐波线性化方法	153
§ 7.2 连续体碰撞振动	158
7.2.1 碰撞振动的响应	158
7.2.2 动柔度 $\Lambda_l(x, i\omega)$ 的计算	160

7.2.3 幅频特征及其脊骨线	162
§ 7.3 多点接触碰撞振动	164
7.3.1 周期 Green 函数的概念	165
7.3.2 连续系统的拍击碰撞	167
§ 7.4 非线性振动系统的周期碰撞	170
第八章 碰撞控制	175
§ 8.1 最优周期运动控制	175
§ 8.2 最优周期运动控制的必要条件	177
§ 8.3 最优碰撞振动	181
8.3.1 单侧约束系统的最优控制	181
8.3.2 单侧约束系统的最优周期	184
8.3.3 单侧约束系统的最优间隙	186
8.3.4 双侧约束系统的碰撞控制	187
§ 8.4 周期碰撞振动系统的时滞反馈镇定	190
8.4.1 含时滞反馈的碰撞振动系统数值仿真	190
8.4.2 含时滞反馈的碰撞振动系统稳定性分析	192
§ 8.5 碰撞振动系统的模糊控制	195
8.5.1 碰撞系统模型	196
8.5.2 碰撞关系	198
8.5.3 模糊逻辑控制原理	199
8.5.4 模糊推理与去模糊化	201
8.5.5 模糊控制效果	203
§ 8.6 碰撞振动系统的混沌控制	205
8.6.1 Poincaré 映射的不可微性	205
8.6.2 分区重构 Poincaré 映射	206
8.6.3 分区控制策略	208
8.6.4 仿真实验	209
8.6.5 控制实验	211
参考文献	214

第一章 持久碰撞

碰撞是指机械系统的运动状态在一个极短的时间内发生突然变化的现象，例如爆炸或对系统突加外部约束等。碰撞导致系统状态发生显著变化或使系统构形发生改变。根据碰撞前后系统所受到的约束形式，可以将机械系统的碰撞划分为如下4类：

1. 约束在碰撞前、碰撞中和碰撞后一直存在，碰撞并不改变原有的约束条件。例如当系统受到冲击力作用时即是这类情况。
2. 碰撞时有新的约束出现，并在碰撞后持久保持。例如两质点发生完全非弹性碰撞，碰撞后结合在一起。
3. 在受到一定约束的部件之间发生可恢复的弹性碰撞。例如机械系统的往复碰撞振动属于此类。
4. 碰撞期间系统受到约束的限制，在碰撞结束时约束自行消失。例如弹跳小球对刚性壁的碰撞即是这种情况。

上述第1和第2类型的碰撞称为**持久碰撞**；第3和第4类型的碰撞称为**非持久碰撞**。可将4种类型的碰撞表示为图1.0.1所示，图1.0.1中 Δt 为碰撞时间。对于持久碰撞问题，基于分析力学的方法可以完全确定碰撞后的运动状态，如碰撞后的速度、约束冲量等；对于非持久碰撞，碰撞后系统的状态既取决于碰撞前的状态又与碰撞接触的物理过程如恢复系数、碰撞冲量等因素密切相关，因而是较复杂的一类碰撞问题，需要综合应用分析力学、结构动力学、非线性动力学等方法。本章首先基于分析力学的方法研究持久碰撞问题。

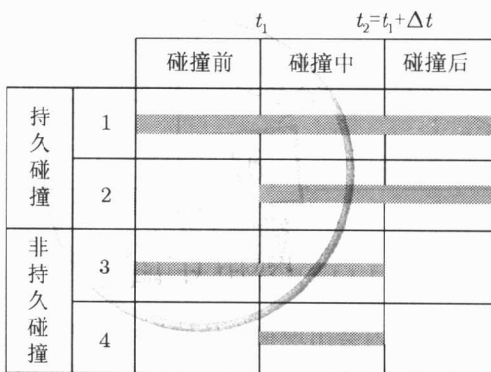


图 1.0.1 碰撞的分类 (Papastavrids, 1989)

§1.1 冲击概念

考虑质点在 t_k 时刻受到突加力为 $F(t)$ 的作用, 该力作用时间为 Δt , 定义

$$P_k = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{t_k}^{t_k + \Delta t} F(t) dt \quad (1.1.1)$$

为 **冲量**, 该冲量为非零有界值. 通常冲击过程的历时 Δt 极短, 引入 t_k 时刻的 Dirac 函数 δ_{t_k} , 可将冲量为 P_k 的冲击力表示成

$$F(t) = P_k \delta_{t_k}, \quad \delta_{t_k} = \delta(t - t_k), \quad \dots \quad (1.1.2)$$

现研究质点受到上述冲量作用时的响应问题. 设质点的质量为 m , 从初始位置 x_0 以速度 \dot{x}_0 沿水平方向作匀速直线运动. 在 t_k 时刻, 该质点受到一冲量的作用, 则质点随后的运动应满足

$$m\ddot{x} = P_k \delta_{t_k}. \quad (1.1.3)$$

对方程 (1.1.3) 积分可获得冲击发生前后的质点位移和速度

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \dot{x}_0 t, \dot{x} = \dot{x}(t_k^-) = \dot{x}_0, t < t_k, \\ x(t) = x_0 - \frac{P_k}{m} t_k + \left(\dot{x}_0 + \frac{P_k}{m} \right) t, \dot{x} = \dot{x}(t_k^+) = \dot{x}_0 + \frac{P_k}{m}, t \geq t_k. \end{cases} \quad (1.1.4)$$

从式 (1.1.4) 可见, 若质点在 t_k 时刻受到冲量的作用, 则其速度在冲击时刻不连续; 反之, 若速度不连续, 而位移连续, 则系统必受到冲量的作用, 如图 1.1.1 所示.

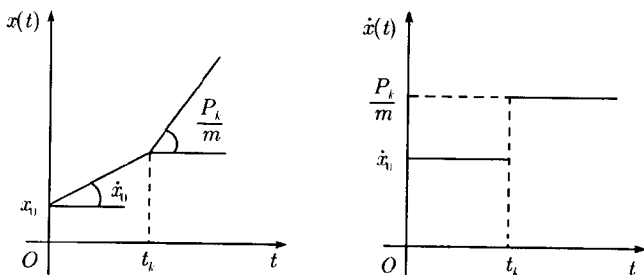


图 1.1.1 质点在冲击时的状态

一旦冲击发生, 则在 Δt 内会出现很大的接触冲击力, 图 1.1.2 给出了典型的冲击力实验曲线. 图 1.1.2 中虚线所示三角形面积可以近似用于冲量的计算, 即

$$P = \frac{1}{2} F(t_2 - t_1). \quad (1.1.5)$$

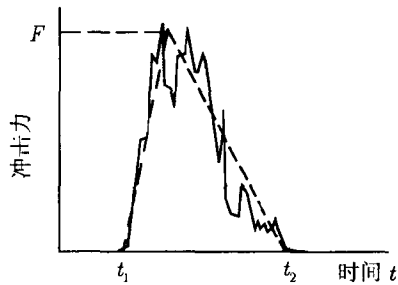


图 1.1.2 冲击力的实验曲线

对于质点之间的一次碰撞而言，冲击力峰值介于非完全弹性碰撞和完全弹性碰撞之间。

§1.2 基本方程

本节研究由 N 个质点或刚体组成的系统在受到合外力 F 作用时的冲击问题。设第 i 个质点的质量为 m_i ，相对于惯性系的位矢为 r_i 。根据质心运动定理，有

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{F}(t), \quad (1.2.1)$$

这里 \mathbf{K} 为系统的动量，为

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i = m \dot{\mathbf{r}}_c, \quad (1.2.2)$$

式中 $m = \sum_{i=1}^N m_i$ 表示系统质量， r_c 为质心相对于惯性系的位矢。将方程 (1.2.1) 在时间间隔 $[t_1, t_2]$ 上进行积分得

$$\mathbf{K}(t_2) - \mathbf{K}(t_1) = \mathbf{P}, \quad (1.2.3)$$

其中

$$\mathbf{P} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t) dt \quad (1.2.4)$$

为外力冲量。式 (1.2.3) 称为积分形式的动量定理，表示在有限的时间间隔内，质点系动量的改变等于作用于质点系的外力冲量。

若系统含有刚体，则可应用相对于质心的动量矩定理：

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \mathbf{G}(t), \quad (1.2.5)$$

式中 \mathbf{H} 为刚体相对于质心 (或相对于惯性系中的固定点) 的动量矩, \mathbf{G} 为对相应点的合外力之矩. 同样, 将方程 (1.2.5) 在时间间隔 $[t_1, t_2]$ 上进行积分得

$$\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1 = \mathbf{M}, \quad (1.2.6)$$

其中

$$\mathbf{M} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{G}(t) dt \quad (1.2.7)$$

为 **冲量矩**. 式 (1.2.6) 称为积分形式的动量矩定理, 表示在有限的时间间隔内, 系统的动量矩改变等于作用于系统的冲量矩.

当时间间隔 Δt 很短而外力较大时, 记系统动量和动量矩的变化量为 $\Delta \mathbf{K} = \mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1$ 和 $\Delta \mathbf{H} = \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1$, 而将方程 (1.2.3) 和 (1.2.6) 简写为

$$\Delta \mathbf{K} = \mathbf{P} \quad (1.2.8)$$

和

$$\Delta \mathbf{H} = \mathbf{M}. \quad (1.2.9)$$

方程 (1.2.8) 和 (1.2.9) 即为研究质点或刚体碰撞时的基本方程.

通常, 对于碰撞问题引入如下假设, 即物体仅在接触区域经受一个较大的冲击作用, 在接触区域冲击力的分布特征不明显, 而将之作为集中力处理; 同时, 因接触时间很短, 故在碰撞期间不考虑系统的位形变化, 认为在碰撞前后系统参数 (如惯性矩等) 保持不变; 此外, 与冲击力相比, 有限力如重力、弹性力等不计. 第二章将给出这些假设的理论依据.

§1.3 Lagrange 方程

本节应用 Lagrange 方程寻求系统的冲量 - 动量关系. 研究 N 个质点组成的系统, 独立广义坐标为 $q_i (i = 1, 2, \dots, n)$. 系统运动的 Lagrange 方程为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad (1.3.1)$$

式中 T 为系统的动能, Q_i 为相应于 q_i 的广义外力. 设系统在时刻 t_1 受到该广义外力的作用, 广义动量 $K_i = \partial T / \partial \dot{q}_i$. 将式 (1.3.1) 在 Δt 内积分得

$$\int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} \left[\dot{K}_i - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right] dt = \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} Q_i dt. \quad (1.3.2)$$

根据中值定理, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} (\partial T / \partial q_i) dt = 0$, 式 (1.3.2) 成为

$$\Delta K_i = S_i, \quad (1.3.3)$$

其中 ΔK_i 为广义动量 K_i 的改变量, S_i 为广义外力冲量

$$S_i = \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} Q_i dt. \quad (1.3.4)$$

下面分析式 (1.3.3) 在 Cartesian 坐标系中的具体表示. 记第 k 个质点的质量为 m_k , 相对于惯性系的位矢为 $\mathbf{r}_k (k = 1, 2, \dots, N)$. 系统动能为

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \dot{\mathbf{r}}_k^2. \quad (1.3.5)$$

对于非完全独立的位矢, $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(q_i, t)$, 则

$$\dot{\mathbf{r}}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t}. \quad (1.3.6)$$

将式 (1.3.6) 代入式 (1.3.5), 将动能写成

$$T = T_0 + T_1 + T_2, \quad (1.3.7)$$

这里

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} \right)^2, \quad (1.3.8)$$

$$T_1 = \sum_{i=1}^n a_i \dot{q}_i, \quad (1.3.9)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (1.3.10)$$

式中 $a_i = \sum_{k=1}^N m_k (\partial \mathbf{r}_k / \partial q_i) \cdot (\partial \mathbf{r}_k / \partial t)$, $m_{ij} = m_{ji} = \sum_{k=1}^N m_k (\partial \mathbf{r}_k / \partial q_i) \cdot (\partial \mathbf{r}_k / \partial q_j)$. 因而系统的动量为

$$K_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_j + a_i. \quad (1.3.11)$$

由于 $m_{ij}(q, t)$ 和 $a_i(q, t)$ 均为坐标的连续函数, 考虑碰撞期间系统构形保持不变, 有

$$\Delta K_i = \sum_{j=1}^n m_{ij} \Delta \dot{q}_j. \quad (1.3.12)$$

比较式 (1.3.3) 和 (1.3.12), 得到

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \Delta \dot{q}_j = S_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.3.13)$$

式 (1.3.13) 为质点系统在 Cartesian 坐标中的冲量 - 动量方程, 这是 n 个代数方程组, 可解 n 个广义速度. 式 (1.3.13) 也可写成矩阵形式

$$\Delta \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{m}^{-1} \mathbf{S}, \quad (1.3.14)$$

式中 \mathbf{m} 为正定的质量矩阵, \mathbf{S} 为广义冲量矩阵. 式 (1.3.14) 为线性方程组, 叠加原理成立, 故通过求解单个冲量引起的响应即可获得全部冲量作用时的结果.

借助质点的位置坐标与广义坐标之间的关系, 可以获得由外力冲量 \mathbf{P} 表示的广义冲量矩阵 \mathbf{S} . 令质点 k 受到外力 \mathbf{F}_k 的作用, 外力虚功为

$$\delta W = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k, \quad (1.3.15)$$

其中

$$\delta \mathbf{r}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (1.3.16)$$

将式 (1.3.16) 代入式 (1.3.15) 得

$$\delta W = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (1.3.17)$$

记广义力为

$$Q_i = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}, \quad (1.3.18)$$

则相应于该广义力的虚功为

$$\delta W = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i. \quad (1.3.19)$$

从式 (1.2.4)、(1.3.4) 和 (1.3.18) 可见, 广义外力冲量与外力冲量存在如下关系:

$$S_i = \sum_{k=1}^N \mathbf{P}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.3.20)$$

当考察理想约束时, 约束反力不作功, 此时在广义外力冲量中不含约束反力引起的冲量作用.

例 1.3.1 研究图 1.3.1 所示的第 2 类碰撞问题. 四根长 L 、质量为 m 的均质刚杆通过销钉铰接成一正方形, 设初始时系统处于静止状态. (a) 若在 A 点作用一垂直外力冲量 \mathbf{P} , 计算点 A 在冲击后的速度; (b) 若菱形以速度 v_0 垂直落下, 点 A 与地面发生完全非弹性碰撞, 计算系统的广义速度 \dot{q}_1 和 \dot{q}_2 .