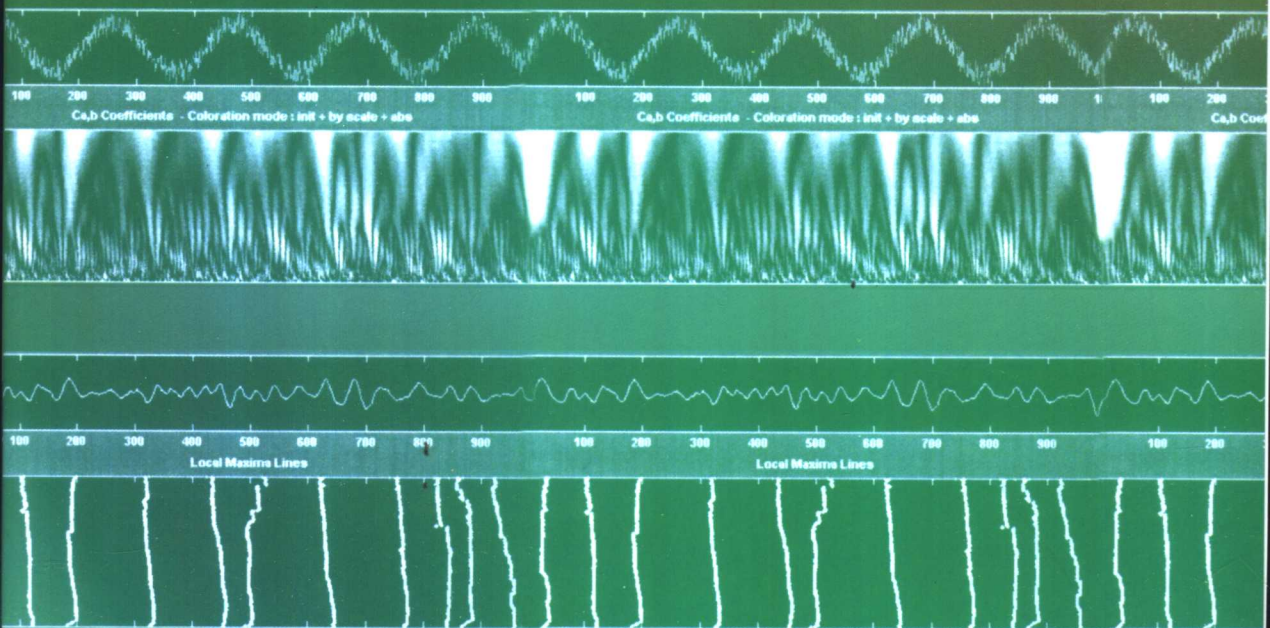


实用小波 分析入门

刘涛 曾祥利 曾军 主编 冼劲 审



国防工业出版社
National Defense Industry Press

实用小波分析入门

刘 涛 曾祥利 曾 军 主编
冼 劲 审

国防工业出版社

· 北京 ·

图书在版编目(CIP)数据

实用小波分析入门/刘涛等主编. —北京:国防工业出版社, 2006.4

ISBN 7-118-04448-2

I. 实... II. 刘... III. 小波分析—教材 IV. 0177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 017596 号

※

国防工业出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100044)

天利华印刷装订有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 710×960 1/16 印张 12 字数 208 千字

2006 年 4 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—4000 册 定价 21.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店: (010)68428422

发行邮购: (010)68414474

发行传真: (010)68411535

发行业务: (010)68472764

前 言

小波分析是建立在泛函分析、调和分析、数值分析、逼近论和傅里叶分析等的基础上发展起来的新的时频分析方法。与经典的傅里叶分析相比较,小波分析有着许多显著的优点。小波分析是一种在时域和频域上同时具有良好的局部化特性的分析方法,因此,小波分析可以根据实际分析的需要,自适应地调节时频窗口,能够聚焦到信号时域和频域的任意细节,被誉为信号分析的“显微镜”。经过 10 多年的发展,小波分析被广泛地应用于信号处理、图像处理、模式识别、语音识别、数字水印等专业和相关技术中。

然而,由于小波分析是建立在众多的数学理论的基础之上的分析方法,所以通常介绍小波分析理论的书籍中往往不可避免地会有大量的枯燥晦涩的数学推导和定理证明,这对读者的数学基础提出了较高的要求,妨碍了小波分析在实际工程中的使用。

主要内容

本书共 8 章,具体的内容安排如下。

第 1 章傅里叶分析。小波理论是建立在傅里叶分析和泛函分析基础之上的视频分析工具之一。本章作为一个导读,简要介绍了傅里叶分析和泛函分析的基本概念。

第 2 章窗口傅里叶变换。本章也从卷积角度定义了窗口傅里叶变换。在离散化处理中,从数字化滤波器的角度分别对时窗处理和频窗处理进行了分析。

第3章小波变换。本章从最基本的小波变换定义出发,介绍了连续小波变换、离散小波变换、二进小波变换(半离散小波变换)、正交小波变换等诸多概念,深入分析了小波基函数的自适应时频窗结构和小波变换系数的物理含义。

第4章多分辨率分析与正交小波。多尺度分析是小波分析的重要内容。所以,在本章中重点介绍了如何实现多尺度分析。与此同时,还介绍了应用较为广泛的双正交小波及分析方法。

第5章正交小波的快速算法。多分辨率分析(MRA)为深刻理解小波原理和小波构造提供了一个极好的框架。根据MRA理论发展出了小波分解与重构的快速算法,这种算法是由法国学者Mallat最先提出来的,故称为Mallat算法。所以本章重点介绍了正交小波快速算法的相关知识。

第6章小波分析在滤波和消噪方面的应用。本章重点介绍了如何在滤波和消噪中使用小波分析解决实际应用中的难题。

第7章小波分析在信号检测方面的应用。本章重点介绍了如何在信号检测中使用小波分析解决实际应用中的难题。

第8章二维小波变换和图像处理。本章重点介绍了如何实现二维多分辨率分析,以及如何对二维小波空间进行分解。同时,还分析了图像的数据特点,以及对小波变换应用到图像的分析中的一些基本原理和方法进行了相应讲解。

本书特点

本书完整地介绍了小波分析的体系结构,全书理论翔实、语言通俗易懂、实例实用性和针对性强。现在小波分析是比较热门的领域,但是其复杂的数学推导,往往让许多人望而却步,本书避开了枯燥的数学推导,以实用的角度,通过大量的源程序解释,让读者尽快掌握小

波分析的相关知识的技能,并使用其解决实际难题。

适应对象

本书既可作为高等院校理工类本科高年级学生的教材,也可作为从事信号处理的技术人员学习小波分析的参考书。

编写分工

本书由刘涛、曾祥利、曾军担任主要编写工作。其中,刘涛负责第1章~第4章的编写工作;曾祥利和曾军负责第5章~第8章的编写工作。同时参与本书编写的人员还有:邹素琼、冼劲、赵秋云、赵继军、彭艺、曲辉辉、周章、蒋波、徐留旺、曹振宇、张婷、温凌霜、鲁得翠、蒋泽平、魏乐、韩翔、程小英、谭小丽、卢丽娟、李小琼、周宏、罗吉、许翔燕、陈春、张忠、方小马、黄姵英、周明、宋晶、邓勇等,也向他们表示衷心的感谢。

由于编写时间仓促,书中疏漏之处在所难免,欢迎广大读者和同行批评指正。

配套服务

为充分展现本书编写特点,帮助读者深刻理解本书编写意图与内涵,进一步提高对本书教学的使用效率,我们建立本书使用指导联络方式,是读者与编者之间交流沟通的直通车。欢迎读者将图书使用过程中的问题与各种探讨、建议反馈给我们,本书编者会竭诚给您满意的答复。同时,我们也将围绕本书开展“实用小波分析入门”的教学培训工作,让读者的学习更加实用和高效。联系方式 E-mail:bojia@bojia.net。

编 者

目 录

第 1 章 傅里叶分析	1
1.1 傅里叶级数和傅里叶变换	1
1.1.1 傅里叶级数的两种表现形式	2
1.1.2 傅里叶变换	3
1.1.3 傅里叶变换与傅里叶级数的联系	4
1.2 傅里叶变换的性质	5
1.3 泛函初步	7
1.3.1 函数空间	7
1.3.2 基底及展开	10
1.4 从泛函角度描述傅里叶分析	13
1.4.1 用内积表示傅里叶变换	13
1.4.2 用基底表示的函数展开	13
1.4.3 用基底表示周期函数的傅里叶级数展开	15
1.5 离散傅里叶变换	15
1.5.1 DTFT 和 DFT	16
1.5.2 基于 MATLAB 的傅里叶变换实验	18
1.6 傅里叶分析的统一	19
1.6.1 4 种傅里叶变换的类型	19
1.6.2 4 种类型的对应关系	19
1.7 小结	21
第 2 章 窗口傅里叶变换	22
2.1 时频分析	23
2.1.1 传统傅里叶分析的局限性	23
2.1.2 时域—频域联合分析	23
2.2 加窗时频分析	24
2.2.1 时窗处理	24

2.2.2	频窗处理	25
2.2.3	时频窗处理	26
2.3	窗口傅里叶变换的基本思想	27
2.4	时窗、频窗和时频窗	27
2.4.1	时窗与其度量	28
2.4.2	频窗与其度量	29
2.4.3	时频窗	30
2.4.4	窗函数的条件	31
2.4.5	窗函数示例	32
2.5	WFT 反演公式	33
2.6	WFT 的局限	34
2.7	离散化的窗口傅里叶变换	34
2.7.1	时域表示	34
2.7.2	频域表示	35
2.8	基于 MATLAB 的窗口傅里叶变换	36
2.8.1	窗口傅里叶变换的 MATLAB 程序示例	36
2.8.2	线调频信号的加窗傅里叶分析结果	37
2.9	小结	39
第 3 章	小波变换	40
3.1	连续小波变换	40
3.1.1	母小波	41
3.1.2	连续小波基函数	43
3.1.3	连续小波变换的定义	45
3.1.4	连续小波变换系数的物理含义及实例演示	45
3.1.5	小波变换与傅里叶变换的对比	46
3.1.6	小波基的自适应时频窗及其度量	47
3.1.7	再生核和再生核方程	50
3.1.8	连续小波变换的性质	52
3.1.9	连续小波逆变换	53
3.2	离散小波变换	53
3.2.1	尺度—位移参数的离散化	53
3.2.2	小波框架	55

3.2.3	离散小波逆变换	56
3.3	二进小波	59
3.3.1	卷积型的小波变换	59
3.3.2	二进小波变换的定义	59
3.3.3	二进小波变换的逆变换	60
3.3.4	二进小波变换的性质	61
3.4	正交小波和正交小波变换	61
3.4.1	正交小波和正交小波变换的定义	61
3.4.2	3种常见的正交小波	62
3.5	连续小波变换的数字化实现方法	65
3.5.1	常用的数字化实现方法	65
3.5.2	基于 chirp z 变换(CZT)的数字化方法	66
3.6	小结	69
第4章	多分辨率分析与正交小波	70
4.1	多分辨率分析的基本概念	70
4.1.1	重温函数空间的概念以及常用的函数空间	71
4.1.2	从滤波器组角度引入多分辨率分析	73
4.1.3	从函数空间角度引入多分辨率分析	75
4.1.4	多分辨率分析的严格数学定义	77
4.2	尺度空间和小波空间	78
4.2.1	尺度空间和尺度函数	78
4.2.2	小波空间和小波函数	82
4.2.3	函数的分解和投影	83
4.2.4	尺度因子与分辨率的对应	85
4.3	二尺度方程和滤波器组	85
4.3.1	二尺度方程的简单推导及时域频域表示方法	85
4.3.2	用滤波器组进行离散信号的多分辨率分析	87
4.3.3	滤波器组的性质	88
4.4	正交小波变换和双正交小波变换	89
4.4.1	正交小波变换	89
4.4.2	构造正交小波	91
4.4.3	双正交小波	92

4.4.4	双正交小波举例	93
4.5	离散序列的多尺度分析	95
4.5.1	分解系数的快速算法	95
4.5.2	初始系数 $c_{0,k}$ 的求法	97
4.5.3	离散序列分解的滤波器表示	97
4.5.4	离散序列的双正交分解和重构	99
4.6	小结	100
第5章	正交小波的快速算法	101
5.1	Mallat 算法	101
5.1.1	双尺度方程	101
5.1.2	尺度空间的分解	102
5.1.3	分解算法	103
5.1.4	重构算法	104
5.2	小波的 Mallat 算法分析及 Java 源代码	105
5.3	Mallat 算法的 MATLAB 源代码分析	110
5.4	小结	112
第6章	小波分析在滤波和消噪方面的应用	113
6.1	小波分析在常规滤波方面的应用	113
6.1.1	常见滤波的分类	113
6.1.2	基于 MATLAB 的小波滤波实现	114
6.2	小波分析在除噪的应用	116
6.3	基于 MATLAB 的小波除噪实验图解	120
6.3.1	一维信号除噪实例	120
6.3.2	局部阈值法去除图像噪声	127
6.3.3	用小波分析对音频信号消噪	129
6.4	小结	131
第7章	小波分析在信号检测方面的应用	132
7.1	检测信号突变方法的原理	132
7.1.1	小波分析用于突变信号检测的原理	132
7.1.2	小波变换模极大值的确定方法	134
7.2	基于 MATLAB 的小波突变信号检测实验	137
7.2.1	小波变换与傅里叶变换的效果对比	137

7.2.2	小波变换与傅里叶变换用于检测阶跃信号	140
7.2.3	小波变换用于检测含有两个突变点的信号	141
7.2.4	小波类型的选择对于检测突变信号的影响	144
7.2.5	小波用于检测实际故障信号	146
7.2.6	小波用于检测奇异点	148
7.3	小结	151
第 8 章	二维小波变换和图像处理	152
8.1	二维多分辨率分析与小波空间分解	152
8.1.1	二维离散小波变换	152
8.1.2	二维离散小波变换	152
8.1.3	二维离散小波变换后的系数分布	154
8.2	快速算法及数据存储	156
8.3	基于 MATLAB 的小波图像处理实验	157
8.3.1	基于 MATLAB 的小波图像分析	157
8.3.2	利用小波变换对图像进行消除噪声处理	165
8.3.3	利用小波变换对图像进行压缩处理	166
8.3.4	小波去噪用于检测图像的边缘	175
8.4	小结	178
参考文献		179

第 1 章

傅里叶分析

知识点:

- 傅里叶分析的 4 种常见类型。
- 泛函基本概念。
- 用泛函概念描述傅里叶分析。

本章导读

傅里叶(Fourier)分析是数字信号处理的基础,也是现代信号处理的出发点。它将信号分析从熟知的时间域变换到了频率域,这种处理使得对信号变换的物理概念更加清晰。

泛函分析是 20 世纪初开始发展起来的一个重要的数学分支,它是以集合论为基础的现代分析手段,它用更加抽象的概念来描述熟知的对象。

小波理论是建立在傅里叶分析和泛函分析基础之上的视频分析工具之一。本章作为一个导读,简要介绍了傅里叶分析和泛函分析的基本概念。

1.1 傅里叶级数和傅里叶变换

几乎所有信号处理的参考书都对傅里叶分析进行了深入的探讨,在此,本书不再深入研究,而只是简要介绍傅里叶分析的定义和性质,重点介绍对傅里叶分析的理解,尤其是工程理解,并适当加入了泛函知识。这对于工科学生快速入门和使用小波是十分有用的。

傅里叶级数和傅里叶变换之间既有区别,也有很大的联系,并且可以相互推导得出。本书将二者平行列出,并给出重要的物理解释。

1.1.1 傅里叶级数的两种表现形式

根据经典的傅里叶级数(FS)定义,任何一个周期为 T 的函数 $f(t)$ 都可以表示为(或者展开为)多个正弦和余弦函数之和,即

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t) \quad (1.1.1)$$

或者表示为更简洁的复指数形式,即

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (1.1.2)$$

其中,式(1.1.1)就是在高等数学中用到的傅里叶级数定义公式。它的特点是工程物理概念清楚。其中系数可以根据式(1.1.3)求得

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2n\pi}{T} t dt, k = 0, 1, 2, \dots \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{2n\pi}{T} t dt, k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

其中, a_k 和 b_k 分别代表了第 k 次谐波的正弦分量和余弦分量的大小。

式(1.1.2)是信号处理书籍中常用的简洁形式,它实际上是将谐波 $\cos k\omega_0 t$ 和 $\sin k\omega_0 t$ 合并为一个复谐波分量信号 $e^{jk\omega_0 t}$ 进行分析。两种表达式可以通过欧拉公式相互推导得出。采用复谐波分量信号进行分析有很多优点。需要注意的是,式(1.1.2)只是信号分析中常用的公式,而最终的工程实现尤其是硬件实现中,仍然需要利用式(1.1.1)对正弦和余弦分量分别计算。

在式(1.1.2)中,系数 c_k 的计算通过式(1.1.4)进行,即

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (1.1.4)$$

对于某一个固定的 k 而言,系数 c_k 实际上表征了原信号 $f(t)$ 中第 k 次谐波成分 $e^{jk\omega_0 t}$ 的大小。因此,通过傅里叶级数系数 c_k 可以对原信号的谐波成分进行定量的分析。在数字信号处理中进行傅里叶分析正是利用了这一特点。由于系数结果只出现在 k 次谐波的位置,而其他位置为 0,因此,在频率轴上可以认为傅里叶级数是一个离散信号。

综上所述,任何一个周期函数都能表示为一组正弦函数和余弦函数之和。用更数学化的语言描述,任何一个周期函数都可以展开成一组规范正交基的线性组合,这里的规范正交基就是我们熟知的谐波 $\{\cos k\omega_0 t\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 和 $\{\sin k\omega_0 t\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 。

关于“展开”、“规范正交基”、“线性组合”和“空间”等名词,在本书后续的章

节中都会频繁出现。它们的数学严密定义可以参考信号分析和泛函分析的有关教材。在本章中稍后的位置,简要地给出这些常用数学术语的定义以及物理含义的解释。它对于工科硕士研究生和高年级本科生理解和应用小波有很大帮助。

1.1.2 傅里叶变换

傅里叶级数主要表征的是周期信号的性质,但是工程应用中大量的的是非周期的信号,因此,引入了傅里叶变换对非周期信号进行分析。

经典的傅里叶变换(FT)定义如下,即

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.1.5)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1.1.6)$$

其中,式(1.1.6)称为傅里叶反变换(IFT)。

当然,传统的傅里叶定义中指出,原信号 $f(t)$ 还必须满足狄里赫里条件。对于大多数工程信号来说,这个条件是容易满足的。

在式(1.1.5)中, $F(\omega)$ 实际上是对原信号 $f(t)$ 做了频谱分析。对于某一个固定的频率 $\omega = \omega_1$, 变换结果如下,即

$$F(\omega)|_{\omega=\omega_1} = F(\omega_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega_1 t} dt \quad (1.1.7)$$

式(1.1.7)给出了变换 $F(\omega)$ 在 $\omega = \omega_1$ 处频率的大小,可以理解为原信号中包含频率分量 $e^{j\omega_1 t}$ 的大小。因此,对非周期信号 $f(t)$, 通过傅里叶变换可以方便地分析各个频率分量。需要注意的, $F(\omega)$ 是关于频率 ω 的连续函数,也就意味着它表示的频率成分是丰富的,而不仅仅限于 k 次谐波,这与傅里叶级数是不同的。

从另外一个角度看,傅里叶变换也可以认为是对信号进行了相干积累。根据 1.2 节将要介绍的傅里叶变换的性质有

$$F(\omega)|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \quad (1.1.8)$$

它既是原信号的零频分量,也是原信号在零频处的相干累积。

而在某一个固定的频率位置 $\omega = \omega_1$, 乘积 $f'(t) = f(t) e^{-j\omega_1 t}$ 实际上是将信号 $f(t)$ 的频谱左移 ω_1 位置。再通过 $\int_{-\infty}^{+\infty} \cdot dt$ 进行相干累积,结果得到了原信号 $f(t)$ 在频率位置 $\omega = \omega_1$ 处相干累积的大小,即

$$\text{Coh} = F(\omega_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega_1 t} dt \quad (1.1.9)$$

因此,此相干积累结果就是 $f(t)$ 在 ω_1 频率处的分量大小。

1.1.3 傅里叶变换与傅里叶级数的联系

通常情况下,将 $T \rightarrow \infty$ 求极限,就会从周期函数的傅里叶级数推导出非周期函数的傅里叶变换。傅里叶变换的定义为

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.1.10)$$

其中, $\omega = 2\pi f$ 称为角频率,单位为 rad/s。 $F(\omega)$ 是 ω 的连续函数,称为信号 $f(t)$ 的频谱密度,简称频谱。

严格地讲,只有非周期信号才有傅里叶变换。若 $f(t)$ 是连续时间周期信号,那么,它不满足绝对可积的条件,或者说 $f(t) \notin L^1(R)$,也就不能用式 (1.1.10) 求傅里叶变换。但是,如果它满足 Dirichlet 条件,就可以将其展开为傅里叶级数,即

$$f(t) = \sum_k c_k e^{jk\omega_0 t} \quad (1.1.11)$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.1.12)$$

其中, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ 称为基波频率, T 为信号的周期, $k\omega_0$ 称为第 k 次谐波频率, c_k 称为第 k 次谐波处的傅里叶系数,它的幅度反映了原信号中包含的第 k 次谐波 $e^{jk\omega_0 t}$ 的大小。因此,式 (1.1.11) 中的周期信号 $f(t)$ 可以看成是由无数多个复正弦信号 $e^{jk\omega_0 t}$ 的加权线性组合,而权值正好是傅里叶系数 c_k 。

直观理解,周期信号的傅里叶系数 c_k 与非周期信号的傅里叶变换 $F(\omega)$ 都可以认为是频率分量的一种度量,定量地描述原信号的局部频率特征,但是它们的物理意义略有区别。

(1) c_k 是关于频率的离散函数,而 $F(\omega)$ 是连续函数。

(2) c_k 是谐波幅度的概念,而 $F(\omega)$ 是频谱密度的概念。

非周期信号可以看成是周期信号当 $T \rightarrow \infty$ 的极限情况,即

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T \cdot c_k = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{2\pi c_k}{\omega_0} = F(\omega) \quad (1.1.13)$$

从量纲上看, $F(\omega)$ 的量纲等于 c_k 的量纲除以频率 ω_0 的量纲。

从定量的角度推导 $F(\omega)$ 与 c_k 的关系。当中,要引入 Dirac 函数 $\delta(t)$ 。如果暂不考虑绝对可积条件,利用傅里叶变换公式求取周期信号 $f(t)$ 的傅里叶变换,即

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \right] e^{-j\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega - k\omega_0) t} dt \quad (1.1.14)$$

利用熟知的积分公式, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm j\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega) \quad (1.1.15)$$

得到周期信号的傅里叶变换结果为

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \delta(\omega - k\omega_0) \quad (1.1.16)$$

从式(1.1.16)可以清楚地看出, 周期信号的傅里叶变换由频率轴上间隔为 ω_0 的冲激序列组成, 且每一个位置冲激的强度恰好正比于其傅里叶级数 c_k , 如图 1-1 所示。这种离散的冲击谱又称为线谱。它应该理解为在“无穷小”的频率范围内取得了一个“无穷大”的频谱密度。此处的“无穷大”是从冲激函数的角度来理解的, 冲击强度为 $2\pi c_k$ 。单纯从 c_k 来理解, 它没有密度的概念, 仅仅代表了在 $k\omega_0$ 处的谐波的大小。

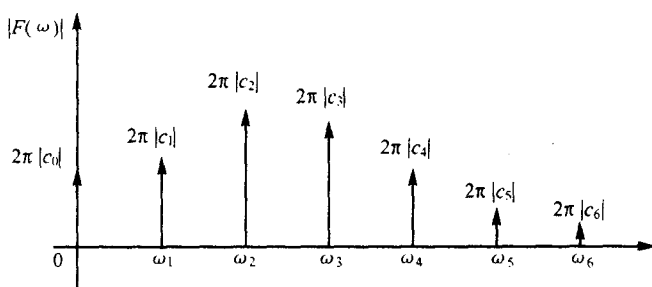


图 1-1 用 Dirac 函数表示的周期函数的傅里叶变换

1.2 傅里叶变换的性质

在信号处理的参考书籍中都给出了傅里叶变换性质的具体推导, 在这里就不再详述, 而仅仅列举其中重要的几个性质, 尤其与小波处理联系较为密切的性质。

设 $f(t)$ 和 $F(\omega)$ 为傅里叶变换对, 用 $f(t) \xrightarrow{F} F(\omega)$ 简单表示, 重要的性质列举如下。

(1) 对偶性。利用对偶性可以方便地得到一些函数的傅里叶变换或反变换公式,即

$$F(t) \xrightarrow{F} 2\pi f(-\omega) \quad (1.2.1)$$

(2) 共轭性。该性质表明原信号对应的共轭信号的频谱与原频谱之间是成共轭镜像对称的关系,即

$$f^*(t) \xrightarrow{F} F^*(-\omega) \quad (1.2.2)$$

(3) 位移。时域位移将导致信号频谱增加一个附加相位,但是幅频特性不变,即

$$f(t-a) \xrightarrow{F} F(\omega)e^{-ja\omega} \quad (1.2.3)$$

(4) 调制。调制特性是通信中最重要的特性,它将信号“搬移”到特定的频段,多个信号占用不同的频段,可以实现频分复用,即

$$f(t)e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{F} F(\omega - \omega_0) \quad (1.2.4)$$

$$f(t)\cos\omega_0 t \xrightarrow{F} \frac{1}{2}[F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)] \quad (1.2.5)$$

(5) 卷积。卷积特性分为时域卷积和频域卷积,其卷积公式很相似,即

$$f_1(t) * f_2(t) \xrightarrow{F} F_1(\omega)F_2(\omega) \quad (1.2.6)$$

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \xrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega) \quad (1.2.7)$$

(6) Parseval 定理。又称为内积定理,它表明两个信号在时域和频域中的内积之间的关系,即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega)F_2^*(\omega)d\omega \quad (1.2.8)$$

特别当 $f_1(t) \equiv f_2(t)$ 时,有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(f)|^2 df \quad (1.2.9)$$

式(1.2.9)实际上给出了信号的能量关系。在时域和频域的总能量是相等的,因此,式(1.2.9)也称为能量守恒定理。在稍后的泛函分析中,将进一步给出 Parseval 定理的更一般的定义和解释。

(7) 尺度伸缩。在传统的傅里叶分析中,伸缩性质不属于主要性质。但是在小波分析中,大量涉及信号在时域和频域的伸缩和变尺度分析,因此,伸缩性质在此显得尤为重要。

$$f\left(\frac{t}{a}\right) \xrightarrow{F} |a| F(a\omega) \quad (1.2.10)$$