

徐 征
徐宝昌
滕仁奎

编

立体几何
高考 复习指导

黑龙江教育出版社

立体几何高考复习指导

徐 征 徐宝昌 滕仁奎 编

黑龙江教育出版社

1985年·哈尔滨

责任编辑：田兆民

封面设计：蒋 明

立体几何高考复习指导

litijie gaokao fuxi zhidao

徐征 徐宝昌 滕仁奎 编

黑龙江教育出版社出版

(哈尔滨市道里森林街42号)

黑龙江克山印刷厂印刷 黑龙江省新华书店发行

开本 787×1092 毫米 1/32 · 印张 13 14/16 · 字数 280,000

1985年10月第1版

1985年10月第1次印刷

印数 1—9,275

统一书号：7857·24

定价：2.70 元

前 言

为了帮助参加高考的在校学生和自学青年复习好高中立体几何，我们编写了这本《立体几何高考复习指导》。在编写过程中，我们力求做到以下几点：

（一）系统性：本书以现行教材的基本知识为主，兼顾重点中学的教学要求，做到内容系统联贯，知识归类清晰，重点明确，易学易记。

（二）典型性：书内范例中的例题，无一不经过精心选编，力求做到典型性突出，代表性较强。从而使读者每学习一个例题都能掌握一个基本方法，通晓一类试题的解答。

（三）规律性：按照“讲知识，教规律，学方法”的教学原则，全书每一部分内容都在知识的理解和运用方面做出了规律性和方法的指导。每一类典型题的解答，都在分析的基础上给出不同的解法。这样，一题多问，一题多解，示范性较强，能够帮助读者开拓思路，掌握解题规律和方法。

（四）灵活性：在每一部分的复习题中，由易到难，由浅入深，编选了不同类型、不同梯度的“双基”训练题目，也有难度较大的习题，以供读者选答。凡初学者，均可选作前面的基础题；对课本知识掌握较好的读者，可选答其中不曾见过的题目；具有一定基础的同学或数学爱好者，可选作后

面难度较大的题目。每个题目都给出了答案或提示，可供读者解题时参考。

(五) 综合性：本书在编写过程中，注意了立体几何知识与平面几何、三角、代数、解析几何、微积分等知识的有机联系，注意了立体几何知识在实际问题中的应用。在每一部分中还编选了若干综合性题目，以便读者从中得到综合性训练，从而培养自己灵活运用数学各科知识的能力。

(六) 针对性：为了满足应届考生参加全国高校考试的需要，本书在知识归类和例题、习题的编选上，注意紧扣现行中学教学大纲和教材的实际，并竭力渗透了高考的拟题规律，为了使读者了解高考试题实际和增加临考经验，书后选编了历年高考数学试题中的立体几何题，并逐题给以解答或提示。针对某些数学爱好者学有余力的实际情况，书中还选编了多面角和正多面体的知识和习题，以帮助他们深入钻研立体几何知识。

本书在编写过程中，承蒙不少同志给予鼓励和支持，特别是徐良玉同志协助完成了书中的插图，在此一并表示感谢。

由于水平所限，书中难免存在不少缺点和错误，诚恳希望广大读者给予批评指正。

编 者

1984年12月于哈尔滨

目 录

一 平面	1
基础知识	1
1. 平面的基本性质	1
2. 用斜二测投影画水平放置的平面图形的 直观图的画法规则	1
复习指导	2
范 例	5
复习题一	16
二 空间两条直线	18
(一) 直线与直线所成角的概念和距离	18
基础知识	18
1. 位置关系	18
2. 等角定理	18
3. 异面直线所成的角和距离	18
复习指导	19
范 例	21
复习题二	39
(二) 直线与直线平行、垂直的判定	41
基础知识	41
1. 直线与直线平行的判定	41
2. 直线与直线垂直的判定	41
复习指导	42

范 例	43
复习题三	54
三 空间直线和平面	56
(一) 直线与平面所成的角及距离	56
基础知识	56
1. 位置关系	56
2. 点、斜线在平面上的射影	56
3. 直线和平面所成角的概念及其计算	57
4. 点和直线到平面的距离	57
复习指导	57
范 例	59
复习题四	82
(二) 直线与平面平行、垂直的判定	84
基础知识	84
1. 直线与平面平行的判定	84
2. 直线与平面垂直的判定	85
3. 直线在平面内	85
复习指导	85
范 例	87
复习题五	102
四 空间两个平面	105
(一) 平面与平面所成的角	105
基础知识	105
1. 不重合的两个平面的位置关系	105
2. 平面与平面所成角的概念及其计算	105
3. 两个平行平面的距离	106

复习指导	106
范 例	107
复习题六	131
(二) 平面与平面平行、垂直的判定	134
基础知识	134
1. 两个平面平行的判定	134
2. 两个平面垂直的判定	134
复习指导	134
范 例	135
复习题七	149
五 柱体	154
基础知识	154
1. 棱柱的概念和性质	154
2. 圆柱的概念和性质	155
3. 棱柱和圆柱的侧面积	156
4. 棱柱和圆柱的体积	156
复习指导	157
范 例	158
复习题八	188
六 锥体	193
基础知识	193
1. 棱锥的概念和性质	193
2. 圆锥的概念和性质	194
3. 棱锥和圆锥的侧面积	194
4. 棱锥和圆锥的体积	195
复习指导	195

范 例	197
复习题九	231
七 台 体	237
基础知识	237
1. 棱台的概念和性质	237
2. 圆台的概念和性质	238
3. 棱台和圆台的侧面积	238
4. 棱台和圆台的体积	238
5. 正棱台和圆台的直观图画法	239
复习指导	240
范 例	243
复习题十	281
八 球	287
基础知识	287
1. 球的概念和性质	287
2. 球面和球体的求积公式	289
3. 半径为 R 的球的直观图画法	290
复习指导	290
范 例	292
复习题十一	322
九 多面角、正多面体和欧拉公式	328
基础知识	328
1. 多面角的概念和性质	328
2. 正多面体的概念和性质	329
3. 简单多面体	329
复习指导	330

范 例	332
复习题十二	348
复习题答案或提示	351
附录：历年高考立体几何试题选编	395
试题	395
答案或提示	401

一 平 面

基 础 知 识

1. 平面的基本性质

(1) 公理 1: 如果一条直线上的两个点在一个平面内, 那么这条直线上所有的点都在这个平面内。

(2) 公理 2: 如果两个平面有一个公共点, 那么它们有且只有一条通过这个点的直线。

(3) 公理 3: 经过不在同一直线上的三点, 有且只有一个平面。

推论 1: 经过一条直线和这条直线外的一点, 有且只有一个平面。

推论 2: 经过两条相交直线, 有且只有一个平面。

推论 3: 经过两条平行直线, 有且只有一个平面。

2. 用斜二测投影画水平放置的平面图形的直观图的画法 规则

(1) 在已知图形中取互相垂直的轴 ox 、 oy 。画直观图时, 把它画成对应的轴 ox' 、 oy' , 使 $\angle x'oy' = 45^\circ$ (或 135°);

(2) 已知图形中平行于 x 轴或 y 轴的线段, 在直观图中分别画成平行于 x' 轴或 y' 轴的线段;

(3) 已知图形中平行于 x 轴的线段，在直观图中保持原长度不变；已知图形中平行于 y 轴的线段，在直观图中，长度为原长度的一半。

3. 有关符号

- (1) 用大写字母 A 、 B 、 C 、... 表示点；
- (2) 用小写字母 a 、 b 、 c 、...、 l 、 k 、 m 、 n 、... 表示直线；
- (3) 用 α 、 β 、 γ 、... 或大写字母 M 、 N 、 P 、... 表示平面；
- (4) 用 $A \in a$ 表示点 A 在直线 a 上；
- (5) 用 $A \in \alpha$ 表示点 A 在平面 α 上；
- (6) 用 $A \notin a$ 表示点 A 在直线 a 外；
- (7) 用 $A \notin \alpha$ 表示点 A 在平面 α 外；
- (8) 用 $a \cap b = A$ 表示直线 a 、 b 相交于 A 点；
- (9) 用 $a \subset \alpha$ 表示直线 a 在 α 内，或平面经过直线 a ；
- (10) 用 $a // \alpha$ 表示直线 a 和平面 α 平行；
- (11) 用 $a \cap \alpha = A$ 表示直线 a 和平面 α 相交于 A 点；
- (12) 用 $a \perp \alpha$ 表示直线 a 和平面 α 垂直；
- (13) 用 $\alpha \cap \beta = l$ 表示平面 α 和平面 β 相交于直线 l ；
- (14) 用 $\alpha \perp \beta$ 表示平面 α 和平面 β 垂直；
- (15) 用 $\alpha // \beta$ 表示平面 α 和平面 β 平行。

注：对上面符号中的 $\in$ 、 $\subset$ 、 $\cap$ 不使用集合语言，而使
用几何语言表达其意。

复习指导

本单元知识的重点内容是平面的概念和平面的基本性质。

平面是一个只能描述而不定义的最基本的数学概念。对它既要理解到平面的形象如同平静的水面一样，又要理解到平面具有无限延展的特征，它把空间分为两大部分。在画法上用平行四边形表示平面，这是用“有限”表示“无限”的一种方法，绝不能影响对平面的无限延展性的理解。

具体检验一个平面是否为平面，根据公理 1，把直尺的直边（直线）放在所要检验的平面上任意滑动，如果直尺的直边和这个面处处密合，那末这个面就是平面，如果直尺的直边和这个面有一处不能密合，这个面就不是平面。

平面的基本性质是研究空间图形性质的理论基础。对三个公理和公理 3 的三个推论，不但要熟悉其内容，还要掌握它的应用。

如公理 1，是判定直线在平面内和检验平面的根据。公理 2，是判定两个平面相交的根据。空间的两个平面相交于一条直线类似于平面几何中两条直线相交于一点。这个公理还说明当两个平面相交时，两个平面的公共点都在交线上，这一性质常用来作为证明“点共线”或“线共点”等一类问题的根据。公理 3 及其三个推论，给出了确定平面的条件。确定平面是把空间图形问题转化为平面图形问题来解决的重要条件，“立体几何平面化”是学好立体几何的一个重要方法。解答立体几何问题的一般途径是要先画出空间图形，然后作出平面或作出相应的辅助平面，把有关的点、线归结到一个平面内，或在平面内作出辅助线，利用平面图形的有关性质来解决问题。平面的确定，是立体几何中作图、计算、证明和分析思考问题的基础。因此，牢固掌握确定平面的条件，在

解题中熟练地确定平面或作出辅助平面，是立体几何中解题能力的一项基本功，每个同学在学习过程中都要注意这方面能力的培养。

证明公理3的三个推论时，要注意到两点：①要理解结论“有且只有一个平面”的含意，“有”说明平面的存在，“只有一个”说明平面是唯一的，两者不能互相代替。如仅说“有一个平面”只说明存在一个平面而不能保证唯一性；如仅说“只有一个平面”是说在有的前提下顶多只有一个平面，但不保证平面的存在性。在证明此类命题时既要证明存在性，也要证明唯一性。②在证明唯一性时，要用到反证法。

反证法在立体几何中多用于证明基本定理或部分习题，应用较多。每个同学都要了解反证法的实质，并会应用反证法证题。反证法的基本思想是在直接证明原命题比较困难时而改证与原命题等价的逆否命题，间接地达到证明原命题的目的。反证法所采取的形式是：从待证命题的结论的反面入手，即假定结论的反面是正确的，然后由此引出一个与题设相矛盾（或者与已知的定义、公理或定理相矛盾，或者自相矛盾）的结论，得出原结论的反面不正确，从而肯定原结论是正确的。反证法是间接证明的一种思考形式，其步骤是：

- (1) 作出与要证明的结论相反的假设；
- (2) 在此假设的前提下用正确的逻辑推理得出结论；
- (3) 确认所得出的结论与题设矛盾，或与定义、公理、定理相矛盾，从而证明假设不成立，肯定原命题是正确的。

如果待证命题的结论的反面有多种情况，则要一一列举出来加以否定，之后，才能肯定原命题的正确性。这种反证

法叫做穷举法。应用穷举法证题，必须全面考虑所有可能存在的反面情况，如果漏掉了一种情况，对结论的判断是不可能准确的。

在立体几何的学习过程中，总是要通过画出直观图来研究空间图形的性质。画直观图，就是把空间图形画在平面内，要画得既富有立体感，又能表达出图形各主要部分的位置关系和变量关系，这就要严格遵守规定的画图规则。三个公理同时规定了立体几何的基本作图规则：

(1) 如果已知确定一个平面的位置条件，就认为此平面是可以作出的；

(2) 如果已知两个相交平面，就认为它们的交线是可以作出的；

(3) 如果已知空间的一个平面，就认为可在此平面内用直尺和圆规来完成平面几何的作图。

课本所列立体直观图画法有两种，即斜二测画法和正等测画法，这些画法规则，课本中是分散在各章节里来讲的，同学们在复习时要重视这部分知识的复习，要准确掌握画图的步骤和方法。

画直观图的目的是为了加深对问题的理解和认识，更好地培养空间想象能力。正确的图形对理解、思考问题很有帮助。在学习和复习过程中，同学们要自觉地培养和提高自已的画图能力。

范 例

例 1 求证：经过一条直线和这条直线外的一点，有且

只有一个平面。

已知 直线 α 及点 A , $A \notin \alpha$.

求证 直线 α 与点 A 有且只有一个平面。

分析 “有且只有一个”的含意是存在且唯一，因此证明要体现两点：①存在性，唯一性。要证明存在性就要从已知条件中找出具有公理3的条件，即不共线的三点。 $A \notin \alpha$ ，只要在 α 上任取两点，就可以得到不共线的三点，符合公理3的条件。证明唯一性时可用反证法。(图1)。

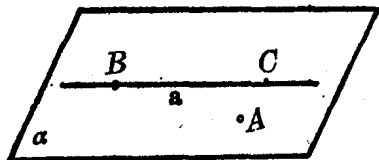


图1

证明 (1) 存在性：在直线 α 上任取相异二点 B 、 C ，点 A 是直线 α 外的一点。根据公理3，经过不共线的三点 A 、 B 、 C 有一个平面 α 。

因为点 B 、 C 都在平面 α 内，所以根据公理1，直线 α 在平面 α 内。即平面 α 是经过直线 α 和点 A 的平面。

(2) 唯一性：假定过 α 、 A 还有另一平面 β $\left. \begin{array}{l} B \in \alpha, C \in \alpha \\ \Rightarrow B \in \beta, C \in \beta \end{array} \right\}$ ，则过不共线三点 A 、 B 、 C 有两个平面 α 和 β 。此与公理3矛盾，故假定不成立，过直线 α 及其外一点 A 的平面只有一个。

例2 空间三个平面两两相交，试问这三个平面把空间分成几部分？最多分成多少部分？最少分成多少部分？

分析 这是提高空间想象力的一个问题，可用类比法去思考。在平面几何中，一条直线把平面分成两部分(公理)，在立体几何中也有类似情况——一个平面把空间分成两部分。

在题给条件中没有指明三个平面两两相交的具体情况，因此在解此类问题时，要想象出三个平面两两相交的各种不同情况，才能得出结论（图2）。

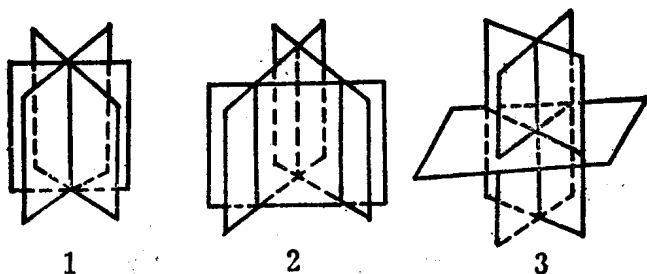


图2

解 (1) 当三个平面相交于一条直线时，可把空间分为6部分（图2—1）；

(2) 当三个平面两两相交于三条直线（不相交）时，可把空间分为7部分（图2—2）；

(3) 当三个平面两两相交，其交线过同一点时，可把空间分为8部分（图2—3）。

空间三个平面两两相交，可把空间分成6、7、8部分，其中最少为6部分；最多为8部分。

例3 求证：三个平面两两相交于三条直线，若有两条交线相交，则第三条交线必过其交点。

已知 $\alpha \cap \beta = a$, $\beta \cap \gamma = b$, $\alpha \cap \gamma = c$, $a \cap b = A$.

求证 $A \in c$.

分析 因 $\alpha \cap \gamma = c$, 故只需证 $A \in \alpha$, 且 $A \in \gamma$. 由 $a \cap b = A$, $a \subset \alpha$, $b \subset \gamma$ 可证得（图3）。