初中数学竞赛跟踪辅导

（初一——初三年级适用）

刘诗雄、罗琛元　主编

武钢三中数学组编

华中师范大学出版社

初中数学竞赛跟踪辅导

（初一——初三年级适用）

刘诗雄　罗琛元　主编
武钢三中数学组编

华中师范大学出版社

初中数学竞赛跟踪辅导

（初一——初三年级适用）

刘诗雄　罗琛元　主编

华中师范大学出版社出版

（武昌桂子山）

新华书店湖北发行所发行

湖北省军区政治部印刷厂印刷

开本787×1092　1/32　印张14.625　字数350千字

1988年10月第1版　　1989年3月第2次印刷

ISBN7-5622-0228-1/O·23

印数：30 001—40 000　定价：3.50元

（胶印版）

序

《初中数学竞赛跟踪辅导》不落窠臼，独辟蹊径，将竞赛讲座进度和初中各年级数学教学进度协调一致，使课堂教学成为课外活动的基础，课外训练成为课堂学习的补充，课内课外相呼应，是一个有意义的尝试。

打开这本书，呈现在我们眼前的是一座五彩缤纷的数学花园。在这里，我们会看到，古老的几何问题闪耀着人类的智慧之光，传统的整数问题在其简单美丽的形式下蕴含着严谨的规律，……。

《初中数学竞赛跟踪辅导》深入浅出地通过典型例题的剖析，体现重要的数学知识和方法，对较难的问题也能选择一种富于启发的方式叙述，并留有思考的余地。全书以培养学生的逻辑推理和直觉、似真推理能力为主调，指点迷津，激发创造，使人读之既有高山流水之趣，又有柳暗花明之叹，于轻松自然中悄悄获益——不仅在数学花圃里采撷甚丰，而且锻炼了数学素养。

我相信，凡准备认真阅读这本书的初、高中学生，都会因为与这本书结成朋友，而使自己的课外活动变得更加丰富多彩。

王锦农

1988年7月

前　言

随着数学竞赛活动广泛、深入地开展，越来越多的数学教师感到，应该有一套能供同步配合初中各年级数学教学的课外参考资料。我们将近十年来辅导学生进行课外活动的资料整理成书，正是考虑到这种需要。

本书按初中数学教材内容顺序编写，从各年级学生的知识结构和思维发展水平的实际出发，由浅入深，由易到难，循序渐进地介绍数学知识和方法，在学生力所能及的范围帮助学生扩展知识视野，提高思维能力。本书例题和习题取材于近20个国家和国内几十个省、市、地区的数学竞赛试题，题型丰富，启发性强，有利于培养学生的创造能力。

由于水平所限，书中不足之处难免，敬请读者批评指正。

编　者

1988年7月

目　录

初一部分（上学期）

初一部分（下学期）

初一部分（夏令营）

初二部分（上学期）

初二部分（下学期）

初二部分（夏令营）

初三部分

初一部分（上学期）

第一讲　数字计算的智巧

数字计算不只依据四则运算法则，更重要的是要运用机智，而机智来自细心的观察和大胆的探索。下面让我们共同在数字计算的海洋中踏浪拾贝吧！

1、倒过来写

例1　求和$1+2+3+\cdots\cdots+999$。

分析　在高速计算机上解决这个问题太容易了，但人不是计算机！你能找到一种巧妙的算法吗？观察

$$S=1+2+3+\cdots+997+998+999, \quad ①$$

做这一长串加法的困难在于各数互不相等，但不等中包含着相等——首末两项之和与和首末两项等距离的两项之和相等！这时，机智的做法是将S倒过来写，

$$S=999+998+997+\cdots+3+2+1 \quad ②$$

将①②两式左、右分别相加，便把加法转化为乘法了，

$$2S=(1+999)\times 999。$$

这种巧妙的求和方法是德国少年高斯的杰作。请将999换成任意自然数 n 后写出解答过程

答：$S=\frac{1}{2}n(n+1)$。

2．添加括号

例2 计算 $S=1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n+1}n$．

分析 不难看出这个算式的规律——任何相邻两项之和或为“1”或为“－1”．如果按照将1、2项，3、4项，…，分别编组的方式计算，就能得到一系列的“－1”，于是一改“去括号”的习惯而取“加括号”之法得

$$S=(1-2)+(3-4)+\cdots+(-1)^{n+1}\cdot n$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{n}{2} & (n\text{ 为偶数})\\[2ex] \dfrac{n+1}{2} & (n\text{ 为奇数})。\end{cases}$$

比“加括号”更一般的思想方法是“分组求和”．

例3 七数 -1，-2，-3，1，2，3，4中任选一个数、两个数的积、三个数的积、…、七个数的积，试求它们的和。

解 （1）任选一个数的和为：

$$1+(-1)+2+(-2)+3+(-3)+4=4。$$

（2）任选二个数积（由于 $4\times(-3)$ 与 4×3，…成对出现，这些积的和为0）的和为：

$$1\times(-1)+2\times(-2)+3\times(-3)=-14。$$

（3）任选三个数积（由于 $4\times(-3)\times(-2)$ 与 $4\times3\times(-2)$，…成对出现，这些积的和为0）的和为：

$$4\times1\times(-1)+4\times2\times(-2)+4\times3\times(-3)=-56。$$

（4）任选四、五、六、七个数的和分别为：

$1\times(-1)\times2\times(-2)+2\times(-2)\times3\times(-3)+1\times(-1)\times3\times(-3)=49$；

$1\times(-1)\times2\times(-2)\times4+2\times(-2)\times3\times(-3)\times4+(-1)\times3\times(-3)\times4\times1=196$；

$1\times2\times3\times(-1)\times(-2)\times(-3)=-36$；

$1\times2\times3\times(-1)\times(-2)(-3)\times4=-144$。

所以，所求的和为-1。

3．一分为二

例4 （1978年上海中学生数学竞赛题）比较 $S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\cdots+\frac{n}{2^n}$（$n$为任意自然数）与2的大小。

分析 关键是将S_n写成宜于与2比较的简单的式子（直接的计算几乎不可能）。现依次称S_n的各项分别为第1项，第2项，…，第n项.对第k项变形

$$\frac{k}{2^k}=\frac{2(k+1)-(k+2)}{2^k}=\frac{k+1}{2^{k-1}}-\frac{k+2}{2^k},$$

这说明S_n中每一项都可以“裂”为正负两项，这时

$$S_n=\left(2-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{4}\right)+\left(\frac{4}{4}-\frac{5}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{n+1}{2^{n-1}}-\frac{n+2}{2^n}\right)=2-\frac{n+2}{2^n},$$

自然有$S_n<2$。

4. 画一个图

为了求和，$S'=1+2+\cdots+10$，可作一个阶梯形（如图1-1中阴影部分），图中每个小方格为一个面积单位，可见S'为阶梯形的面积。将两个同样的阶梯形拼在一起得一个11×10的矩形，此矩形面积的一半即S'。仿此可以求例1中的S。画图的好处由此可见一斑。

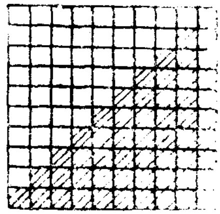

图 1-1

例5 （第十九届国际数学竞赛题）有限个实数（可以重复）按一定顺序排成一列，任意连续七个数之和为负，任意连续十一个数之和为正。确定这些实数最多有几个。

分析 文字信息有使人坠入五里雾中之感。将这有限个实数依次编号为①，②，…，画图1-2看看。

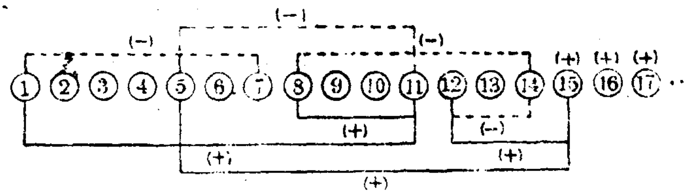

图 1-2

把图中的数字同时向前挪一位，挪二位，…，便可以看出，从第12个数起，任意连续三数之和为负；从第15个数起，每一个数都为正。因编号为⑮、⑯、⑰的三个正数之和不可能是负的，故这些实数最多有16个，例如可以验证

$$5,5,-13,5,5,5,-13,5,$$

$$5,-13,5,5,5,-13,5,5$$

这一列数满足题设条件。

表可以看成是一种特殊的图。

例6 对于n个连续的自然数$1,2,3,\cdots,n$，作出其一切可能的和数（被加数的个数从1到n），证明得到的和数中至少有$\frac{1}{2}n(n+1)$个两两互不相同。

分析 从$\frac{1}{2}n(n+1)$联想到例1的推广了的结论，即

$$\frac{1}{2}n(n+1)=1+2+\cdots+n,$$

触发猜想：所述和数至少可以分成n批，第一批一个，第二批两个，…，第n批n个，则问题获得解决。

注意到$1<2<3<\cdots<n-1<n$，取出若干和数列成下表：

1个加数的和	1	2	…	$n-2$	$n-1$	n	n个
2个加数的和	$1+n$	$2+n$	…	$(n-2)+n$	$(n-1)+n$		$n-1$个
3个加数的和	$1+(n-1)+n$	$2+(n-1)+n$	…	$(n-2)+(n-1)+n$			$n-2$个
…	…	…	…				…
n个加数的和	$1+2+\cdots+n$						1个

此表中恰有$\frac{1}{2}n(n+1)$个和数，显然它们两两互不相等。

练 习 一

1．填空题

（1）和$1+2-3+4+5-6+7+8-9+\cdots+97+98-99$等于_____.

（2）1至100所有不能被9整除的自然数的和等于_____.

（3）和$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+99^2-100^2+101^2$等于_____.

（4）$\frac{1}{13}$的分子和分母同加上整数_____后，就变成$\frac{3}{5}$.

2．选择题

(1)乘积$(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots\cdots(1-\frac{1}{9^2})(1-\frac{1}{10^2})$等于(　　)

(A) $\frac{5}{12}$　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $\frac{11}{20}$　(D) $\frac{7}{10}$

(2)（第36届美国中学数学竞赛题）从和式$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}$中，必须除去(　　)，才能使余下的项的和等于1．

(A) $\frac{1}{4}$和$\frac{1}{12}$　(B) $\frac{1}{8}$和$\frac{1}{12}$　(C) $\frac{1}{6}$和$\frac{1}{10}$　(D) $\frac{1}{8}$和$\frac{1}{10}$

(3)设a，b，c为互不相等的整数．满足$\frac{11}{a}+\frac{11}{b}+\frac{11}{c}=\frac{143}{210}$的数组$(a,b,c)$有(　　)个．

(A) 2　(B)无数多　(C) 1　(D) 3

(4)分母是1001的最简真分数共有(　　)个．

(A) 720　(B) 693　(C) 692　(D) 721

3．求和：$S=1\cdot1+2\cdot2\cdot1+3\cdot3\cdot2\cdot1+\cdots n\cdot n(n-1)\cdots\cdot2\cdot1$．

4．（第1届“从小爱数学”邀请赛试题）一串数：1；$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{2}$，$\frac{1}{2}$；$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{3}$；$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{1}{4}$；…中，

(1) $\frac{7}{10}$是第几个分数？

(2) 第400个分数是几分之几？

5．(1) 8个乒乓球队员进行循环赛，需要比赛多少场？

(2) 从全班50名学生中，选出三人分别担任班长、学习委员、文娱委员的选法有多少种？

6. (1)(1960年上海中学生数学竞赛题)求证$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{4\times6}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}=\frac{3}{4}-\frac{2n-3}{2(n+1)(n+2)}$.

(2)从1到100这100个自然数中任取10个,使它们的倒数和等于1.

7. (第5届美国数学邀请赛题)非负整数有序数对(m, n),若在求和$m+n$时无需进位(十进制下),则称它为"简单"的.求所有和为1492的简单的非负整数有序数对的个数。

8. 数字3可以有四种方式表示为一个或多个正整数之和,即 3,1+2,2+1,1+1+1.数n有多少种这样的表示法?

第二讲　带余除法与十进制

1. 整数的带余除法

我们知道用一个整数b去除另一个整数a,有时恰好除尽,有时会有余数。若设商为q余数为r,则有

$$a=bq+r\quad(0\leqslant r<b). \qquad [\mathrm{I}]$$

特别地,当$r=0$时,我们就说b整除a,记为$b\mid a$。这样,任何一个整数a都可以用[I]式表示。而且这种表示是唯一的。[I]式称余数公式,其运算过程叫带余除法。

在数学竞赛中,关于数的整除或带余除法的研究是饶有趣味的问题之一.为叙述方便,罗列常用的几条有关数的整除的基本性质:

(1) 若$a\mid b$,　$b\mid c$,那么$a\mid c$;

(2) 若$a\mid b$,　$a\mid c$,那么对任何整数k,l都有$a\mid(kb+lc)$;

（3） 若$a\mid b$，　$c\mid d$，那么$ac\mid bd$；

（4） 设$a+b+\cdots+d=g+h+\cdots+j$，若$n$能整除$b$，$c$，$\cdots$，$d$，$g$，$h$，$\cdots$，$j$，则$n$也能整除$a$．

例1 （1986年华罗庚金杯赛初赛题）71427和19的积被7除，余数是几？

解 设71427×19被7除，商q余r，则

$$71427\times19=7q+r. \qquad ①$$

但是
$$71427=7\times10203+6=7A+6,$$
$$19=7\times2+5=7B+5,$$

∴
$$71427\times19=(7A+6)(7B+5)$$
$$=49AB+42B+35A+30$$
$$=7\times(7AB+6B+5A+4)+2. \qquad ②$$

比较①②两式，由唯一性知　$r=2$．

在[1]式中，规定$0\leqslant r<b$，但$a=bq+r=b(q+1)+(r-b)$，此时余数$r-b$满足$-b\leqslant r-b\leqslant0$，即余数为负值．在研究某些问题时，若余数较大，我们也常转而研究负余数．

例2 （1985年全国高中数学联赛题）在已知数列1，4，8，10，16，19，21，25，30，43中，相邻若干数之和能被11整除的数组，共有几组？

分析 若依次求和检查是否能被11整除，情况较多，解法不简捷．但因为

$1=0\times11+1$，$4=0\times11+4$，$8=1\times11+(-3)$，

$10=1\times11+(-1)$，$16=1\times11+5$，$19=2\times11+(-3)$，

$21=2\times11+(-1)$，$25=2\times11+3$，$30=3\times11+(-3)$，

$43=4\times11+(-1)$．

显然，对于原数列若干相邻数之和是否能被11整除，只须研

究它们余数和是否能被11整除。由图2-1依次列出题设数列中各数被11除的余数，

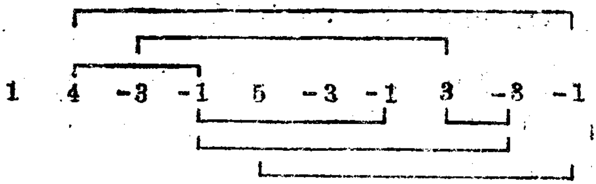

图 2-1

符号┌─┐与└─┘表示线段下（上）几个余数和，显然，它们都为零，易知满足题目要求的数组共有7组。

例3 试证购买超过17斤粮食，只需用3斤与10斤面额的粮票支付，而无需找补。

分析 此题求证的困难首先在于买粮斤数无法确定，但是注意到无论买多少斤粮食总需要用3斤票面的粮票支付，于是我们可以把购粮斤数n按3除后的余数分成三类：

（1） 若买$n=3m$斤（$3m>17$，m是正整数），显然，只需用3斤面额的粮票支付；

（2） 若买$n=3m+1$斤（$3m+1>17$），显然$m>5$。又 $3m+1=10+3(m-3)$，故可用一张面额为10斤的粮票和$(m-3)$张面额为3斤的粮票支付；

（3） 若买$n=3m+2$斤（$3m+2>17$），显然$m>5$，又 $3m+2=20+3(m-6)$，故可用2张面额为10斤的粮票和$(m-6)$张面额为3斤的粮票支付。

说明：例3中我们利用了同余概念。将任一整数依3除所得余数进行分类。按余数为0，1，2可分为三类。一般地，对于某一给定正整数m，被m除时余数相同的整数划为一类，叫做以m为模的剩余类。利用剩余类概念，我们常将整数进