中学课外科学活动丛书

数学课外活动

高中一年级

四川省数学会编

重庆出版社

·中学课外科学活动丛书·

数学课外活动

高中一年级

四 川 省 数 学 会 编

重 庆 出 版 社

一九八三年·重庆

主　编胡世荣（主编初一、初三、高二年级分册）
程汉晋　黄元正（主编初二、高一、高三年级分册）
编写人（以姓氏笔画为序）
孙道杠（编写初中三年级）　陈文立（编写高中二年级）
张正贵（编写初中一年级）　张明志（编写高中一年级）
欧述芳（编写初中一年级）　孟季和（编写高中三年级）
钟策安（编写高中三年级）　陆中权（编写高中一年级）
夏树人（编写初中三年级）　郭海清（编写初中二年级）
曹秀清（编写初中二年级）　董安东（编写高中二年级）

数学课外活动（高中一年级）
重庆出版社出版（重庆李子坝正街102号）
四川省新华书店重庆发行所发行
达县新华印刷厂印刷
*
开本 787×1092 1/32　印张 5.625　字数115 千
1983年7月第一版　1983年7月第一次印刷
印数 1—57,500册
书号 7114·86　定价 0.48 元

内 容 提 要

“课内打基础，课外出人才”。中学课外科学活动（又叫兴趣活动）有助于消化课堂知识，能培养和锻炼学生的实践能力和组织才干，使对科学有兴趣和有才能的学生得到生动活泼的、自由的发展。但系统地为课外活动提供材料的书籍，至今尚未见到。《数学课外活动》高中一年级册，紧扣本学年的大纲、教材；形式多样，有讲座、测量、制作、竞赛、游戏、……；选材有趣，叙述生动。每个活动材料既像“剧本”，又有“导演提示”，师生们拿到手就能“动”。本书也可作为高中一年级数学课的趣味性辅导读物。适宜于中学生、中学教师、自学青年使用、阅读。

出版者的话

打开名家的传记或回忆录，你几乎都会读到，他们在青少年时代曾爱上某门学科，醉心于阅读、作文、演说、实验、观察……，正是这些丰富多彩的课外活动，培养了他们的实践能力、探索精神和爱国热情，才使他们走上了成材之路。所以，有教育家作了这样的归纳和总结：课内打基础，课外出人才。

成绩合格、文凭在手的学生，讲话不知所云，实验手忙脚乱，论文词不达意的不是随处可见吗？究其原因，恐怕是课内锻炼不够。至于治学科研、号召鼓动、调度指挥、运筹决策，更难从课堂学到。而这一切，恰恰可以从课外活动中得到启蒙、锻炼、培养。

课外活动（也叫兴趣活动）历来为教育工作者所重视。尽管曾经受到过“炼钢”、“造反”、“升学率”等的冲击，它仍在有识见的校长、教师的倡导下自发地或有组织地展开着。但是，由于缺少系统的活动材料，教师找得苦，学生“饿”得慌，活动时时为之中断。

为此，我们就决定出版《中学课外科学活动丛书》，系统地为课外活动提供材料。《丛书》将包括数学、物理、化学、生物、地理、无线电、航模、舰模、医护等九门学科；每门学科均分年级出书。各科各年级的活动材料都紧扣教学大纲，密

切结合教材，而又略有延伸，“猫腰拣”的偏少，“跳着够”的略多。每册均有讲座、讨论、实验、观察、制作、讲演、竞赛、游戏、表演等多种形式；选材富有情趣，叙述力求生动。

《中国数学会1982年沈阳会议纪要》中建议：“举办多种数学课外活动，以满足那些对数学有兴趣和有才能的学生的需要，让他们生动活泼的、自由的发展。”显然，这样的话对任何学科都适用。

愿我们这套丛书对中学的课外科学活动有所推动！

祝对科学有兴趣和才能的中华青少年能从这套丛书中得到启发和鼓舞，更加生动活泼地、自由地向前发展！

一九八三年三月

本册使用说明

一、本册内容未超出高中一年级所学，先后安排与课堂教学大致相同。使用时可先后颠倒，也可跳跃进行，以不与课堂教学脱节为宜。

二、本册共有22个活动材料，若两周过一次活动，足够一学年之用。

三、每个活动材料按90分钟设计，可视具体情况适当增删。

四、绝大多数材料后面都附有参考资料目录，若认真查阅研究，大概会使该活动更加丰富多彩，收效更大。

五、活动材料既象戏剧的“脚本”，有台词、有内容；还附有少量的“导演提示”，交代活动的起承转合，希望中学师生阅读后就能“动”。

注：《数学课外活动》共出六册：初中一年级到高中三年级，每年级使用一册。

目　次

一、容斥原理

形式：阅读、学生报告、教师辅导

准备：彩色粉笔一盒（用以表示各个集合）

§1.1 阅读材料

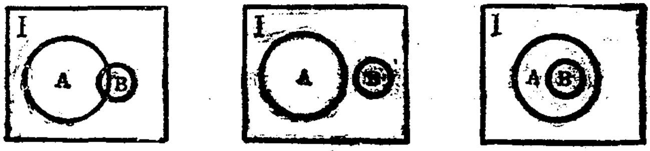
讲完集合这一节后，王老师给大家布置了一个思考题：一个班共有45名学生，其中篮球爱好者20名，排球爱好者15名，既爱好篮球又爱好排球的5名。问既不爱好篮球也不爱好排球的学生有多少名？

以反应快而闻名的李明立刻答道："10名！只消从总人数中减去篮球爱好者与排球爱好者的人数就行了，45－20－15＝10。"对此，张勇却表示怀疑："那么'既爱好篮球又爱好排球的5名'这个条件又起什么作用呢？要知道，一般题目里是不会有多余的条件的。""应该是15名！"黄丽沉着地说。王老师赞许地点了点头，说："黄丽，下次课外活动对这个问题你作一个中心发言，要注意应用集合的知识。"后来，黄丽在王老师的指导下果然作了一个精采的发言，下面是她的发言记录。

§1.2 学生发言（活动前指定一名学生准备）

王老师提出的这个问题如果只凭脑筋想是比较困难的。但是，如果我们采用集合论的方法，画出图来（通常称为韦恩图），那就一目了然了。如图1—1.（1）．设 I 为全班学生的

集合，$A=\{$篮球爱好者$\}$，$B=\{$排球爱好者$\}$，于是



(1) (2) (3)

图 1—1

$A\cap B=\{$既是篮球爱好者又是排球爱好者$\}$，

$A\cup B=\{$篮球爱好者或者排球爱好者$\}$，

$\overline{A\cup B}=\{$既不是篮球爱好者也不是排球爱好者$\}$。

用N，N_1，N_2，N_{12}，$\overline{N}$分别表示 I，A，B，$A\cap B$，$\overline{A\cup B}$中元素的个数，那么$N=45$，$N_1=20$，$N_2=15$，$N_{12}=15$，而$\overline{N}$则是所求的未知数。由图 1—1.（1）容易看出，为了求$\overline{A\cup B}$中元素的个数$\overline{N}$，应当从N中减去N_1与N_2，但这时$A\cap B$中的N_{12}个元素却被减去了两次，故应将多减去的N_{12}添加回来。所以

$$\overline{N}=N-N_1-N_2+N_{12} \qquad (1)$$
$$=45-20-15+5=15.$$

假如N_{12}不是 5 而是 0，即$A\cap B=\phi$，这时$\overline{N}=45-20-15+0=10$。这是图1—1.（2）的情形。只有这种情况才有$\overline{N}=N-N_1-N_2$。有的同学没有注意到这只是一种特殊情况，所以犯了错误。一般的情况应该用（1）式来计算。

假如$N_{12}=N_2$，这时$A\supseteq B$，$\overline{N}=N-N_1-N_2+N_{12}=N-N_1$。这一点由图1—1.(3)也可清楚地看出。

利用公式（1）我们圆满地解决了王老师提出的问题，但我们并不满足于仅仅解决一个具体问题。如果我们能从一个

具体问题中总结出一般的规律，并用它来解决其它类似的问题，那我们就更上一层楼了。

由上面的讨论我们容易看出，A是由Ⅰ中具有某种性质(爱好篮球)的元素组成的子集，B是由Ⅰ中具有另一种性质(爱好排球)的元素组成的子集，而公式(1)则是两种性质均不具备的元素的个数的计算公式．由此，我们得到下面的定理

定理1 设Ⅰ为有限集，其中有N个元素．Ⅰ中具有性质α的元素的个数为N_1，具为性质β的元素的个数为N_2，同时具有性质α与β的元素的个数为N_{12}。那么，既不具有性质α也不具有性质β的元素的个数$\overline{N}$为

$$\overline{N}=N-N_1-N_2+N_{12}.$$

在上式中，将应该排除的N_1，N_2减去．又将重复排除的N_{12}加进去，这个过程中既有排斥又有容纳，所以称为容斥原理，又称逐步淘汰原则，它是计算有限集中元素个数的一个重要公式。

上面讨论了集Ⅰ中的元素具有两种性质的情况．当集Ⅰ中的元素具有三种或三种以上的性质时也可以得到类似的公式，这里我们只推导三种性质的情况。

定理2 设Ⅰ为有限集，其中有N个元素．Ⅰ中具有性质α，β，γ的元素的个数分别为N_1，N_2，N_3。Ⅰ中具有性质α与β，α与γ，β与γ的元素的个数分别为N_{12}，N_{13}，N_{23}。Ⅰ中同时具有性质α、β、γ的元素的个数为N_{123}。那么，Ⅰ中不具有性质α、β、γ中任何一种的元素的个数$\overline{N}$为

$$\overline{N}=N-N_1-N_2-N_3+N_{12}+N_{13}+N_{23}-N_{123}. \qquad (2)$$

证：由定理1知，I中不具有性质α与β中任何一种的元素的个数为

$$N-N_1-N_2+N_{12},$$

在这些元素中有一些具有性质γ，要求$\overline{N}$，只消把这样的元素的个数减去即可。换句话说，应该把具有性质γ而不具有性质α与β的元素的个数减去。

考虑I中具有性质γ的全体元素所组成的子集I′．I′中有N_3个元素，其中具有性质α，β，α与β的元素的个数分别为N_{13}，N_{23}，N_{123}。对I′应用定理1，可知I′中性质α与β均不具有的元素的个数为

$$N_3-N_{13}-N_{23}+N_{123},$$

于是 $$\overline{N}=(N-N_1-N_2+N_{12})-(N_3-N_{13}-N_{23}+N_{123})$$
$$=N-N_1-N_2-N_3+N_{12}+N_{13}+N_{23}-N_{123}.$$

〔证毕〕

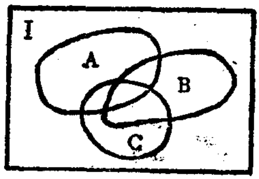


图 1—2

（2）式的结论也可以由图1—2直观地看出来。A，B，C分别表示I中具有性质α，β，γ的元素所组成的子集，故$\overline{N}$即$(\overline{A\cup B\cup C})$中元素的个数。要求$\overline{N}$，应从$N$中减去$N_1$，$N_2$，$N_3$，但这时$A\cap B$，$A\cap C$，$B\cap C$中的元素多减了一次，故应加上$N_{12}$，$N_{13}$，$N_{23}$。但对$A\cap B\cap C$中的元素，在减去$N_1$，$N_2$，$N_3$时减去了三次，在加上$N_{12}$，$N_{13}$，$N_{23}$时又加上了三次，所以应再减去一次，从而（2）式成立。

有了公式（1）与（2）我们就可以比较容易地解决一些初

看起来头绪很多的问题，下面试举数例。

例 1　某校举行数理化三科竞赛。参加数学竞赛者75名，物理52名，化学38名。同时参加数学与物理竞赛者26名，数学与化学22名，物理与化学10名，三科均参加者 2 名。问参加竞赛的总人数是多少？

解：设 I 为参加竞赛的人组成的集合，性质α，β，γ分别表示参加数学，物理，化学竞赛。于是$N_1=75$，$N_2=52$，$N_3=38$，$N_{12}=26$，$N_{13}=22$，$N_{23}=10$，$N_{123}=2$，$\overline{N}=0$（因为 I 中的人至少参加一种竞赛）。由公式（ 2 ）得

$$N=N_1+N_2+N_3-N_{12}-N_{13}-N_{23}+N_{123}-\overline{N}$$
$$=75+52+38-26-22-10+2-0=109.$$

例 2　不超过105且与105互质的正整数有多少个？

解：将105分解为素数的乘积：$105=3\times5\times7$。与105互质的数也即是不被 3 ， 5 ， 7 整除的数。设 $I=\{1,2,3,\cdots,105\}$，性质α，β，γ分别表示被 3 ， 5 ， 7 整除，则$\overline{N}$即为 I 中与105互质的数的个数。

I 中 3 的倍数为

$$3\times1,\ 3\times2,\ 3\times3,\ \cdots,\ 3\times35.$$

故$N_1=35$。同理

$N_2=$ I 中 5 的倍数的个数$=3\times7=21$，

$N_3=$ I 中 7 的倍数的个数$=3\times5=15$，

$N_{12}=$ I 中15的倍数的个数$=7$，

$N_{13}=$ I 中21的倍数的个数$=5$，

$N_{23}=$ I 中35的倍数的个数$=3$，

$N_{123}=$ I 中105的倍数的个数$=1$。

$\therefore\overline{N}=105-35-21-15+7+5+3-1=48.$

例 3　某班共有学生45名．小李向周老师汇报，为庆祝元旦，有40人报名参加合唱，有22人报名跳舞，同时报名参加合唱与跳舞者15人．周老师想了一会说："你的统计数字一定有错．"小李核实后果然发现统计有误．周老师是怎样作出判断的？

解：周老师实际是根据公式（2）作出判断的．设 I 为全班学生组成的集合，性质α与β分别为参加合唱与跳舞．由公式（2）知既不参加合唱也不参加跳舞的人数$\overline{N}$应为

$$\begin{aligned}\overline{N} &= N - N_1 - {}_2N + N_{12}\\ &= 45 - 40 - 22 + 15 = -2.\end{aligned}$$

这是不可能的，因为人数$\overline{N}\geqslant 0$，所以统计必然有误．

§1.3　教师辅导

今天我们学会了容斥原理，学会了公式（1）和（2）．如果我们仔细思考，反复思考，还可以从今天的活动中受到一些教益．我们所应用的"集合""元素""性质"都是非常一般的概念（又称为抽象的概念），元素就是我们研究的对象，它可以是人、数字、图形、星星、原子、脑袋上的头发或者其它任何东西．而性质也可以是任何一种性质．所以公式（1）和（2）是普遍适用的，只要我们研究的对象是有限个就可以用上去．我们之所以能得到公式（1）与（2）关键在于进行了推广．我们不满足于仅仅解决一个班里的篮球爱好者与排球爱好者这个具体的问题，而是在解决这个具体问题之后进一步把"一个班的学生"推广为"一个集合"，把"爱好篮球"推广为"具有性质α"等，这样才得到普遍适用的公式的．那么公式（1）和（2）是否就到头了呢？也不是．例如，集合 I 中的元素具

有4种、5种性质以至更多种性质的情况就是值得进一步考虑的问题。总而言之，我们要勤于思考，注意总结、归纳，这样就会有更大的收获。最后，希望每个同学都来争取作中心发言，因为大家是课外活动的主人！

练 习 一

1.求出不超过70且与70互质的正整数的个数，并把这些数找出来。

2.某农场给土地施肥，施用各种肥料的土地亩数如下表

施肥种类	氮	磷	钾	氮、磷	氮、钾	磷、钾	氮、磷、钾
施肥亩数	1200	800	450	670	300	100	50

问农场至少有多少亩土地？仅施氮，磷，钾中一种肥的土地各多少亩？

3.由数字1，2，3组成n位数，且在n位数中1，2，3每一个数字至少出现一次，问这样的n位数有多少个？（匈牙利奥林匹克数学竞赛题）。

4.设有限集I中的元素具有性质α，β，γ，δ.试找出并证明与公式（1）、（2）类似的公式。

参考资料

（1）库尔沙克等．匈牙利奥林匹克数学竞赛题解　科学普及出版社．

(2)陈定中　有穷集元素个数的计算公式及其应用　数学通报．1980(9)．

(3)Дж．Риордан．Введние в комбинаморный анашэ．1963．

二、除得尽吗

形式：打擂、朗读、讲座

§2.1　任选一名学生当擂主摆下擂台，与挑战者比，看谁判断整除性迅速准确。题目由挑战者指定（限定除数在3至11之间）。比如

挑战者甲：164388能否被3整除？

擂主：能。

甲：能否被11整除？

主：能。

（擂主答错，则改由挑战者任擂主。）

§2.2　（由一名学生朗读）

一天，李明带着热情的微笑问张勇："考考你，$\frac{2}{3}$除以$\frac{3}{5}$能除尽吗？"张勇心中合计，$\frac{2}{3}\div\frac{3}{5}=\frac{2}{3}\times\frac{5}{3}=\frac{10}{9}$，答案是分数，便答道："除不尽，因为$\frac{2}{3}$不是$\frac{3}{5}$的整数倍，除得的商$\frac{10}{9}$是分数。"李明说："分数又怎么样呢？我的问题中给出的$\frac{2}{3}$和$\frac{3}{5}$本来就是分数，所以应该在有理数集Q中来考虑而不是整