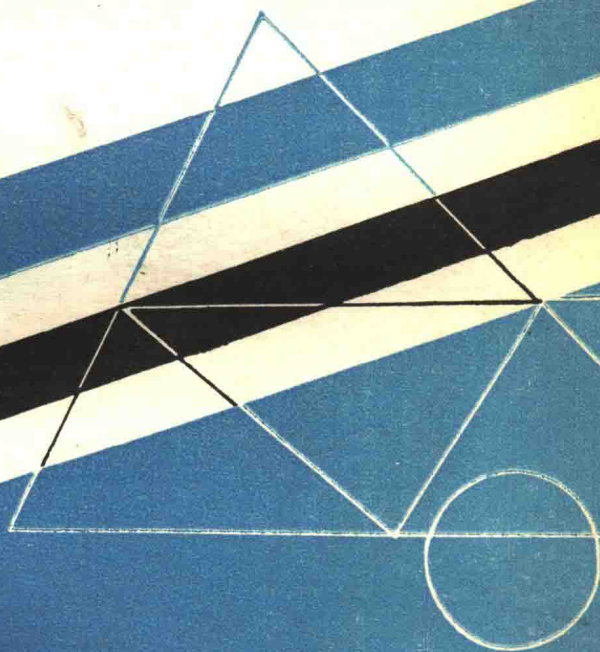


集合与映射

JIHE YU YINGSHE



云南人民出版社

集合与映射



云南人民出版社

集合与映射

李陈恩

*

云南人民出版社出版

(昆明市书林街100号)

云南新华印刷厂印刷 云南省新华书店发行

*

开本: $787 \times 1092 \frac{1}{32}$ 印张: 3 字数: 58,000

1980年5月第一版 1980年5月第一次印刷

印数: 1—5,470

统一书号: 7116·709 定价: 0.23 元

前 言

近半世纪以来,集合论对数学发展的影响是巨大的.集合论和函数论一样,已成为数学的重要支柱,而集合论又是数学理论的基础,因此,在大学的数学教学中,集合论的思想占有重要的位置.有些国家,在中小学里就开始学习集合论的基础知识.在我国,1978年教育部制定的中学数学教学大纲中,也已经规定集合论作为中学数学的教学内容之一.由于上述原因,我们编写这本小册子供中学数学教学参考.

《集合与映射》将介绍集合论中一些最基本的知识.虽然集合的理论是非常严谨的,但我们在叙述方面力求简洁,说理方面力求易懂,读者只要具备中学低年级的一些数学知识,即可阅读本书的所有内容.

本书共三章,包括集合、关系和映射.书中内容大部分取材于C. André著:《mathématiques modernes》一书,每章附有一定量的习题.通过这些习题的实践,将会进一步提高读者的分析和判断能力.

编 者

一九七九 . 八.

目 录

第一章 集合	(1)
§ 1 集合的概念	(1)
§ 2 子集合	(7)
§ 3 两集合的相等	(14)
§ 4 两集的交	(16)
§ 5 两集的和集	(19)
§ 6 差集与补集	(22)
§ 7 基数	(23)
§ 8 集合的分划	(32)
§ 9 直积集	(34)
第二章 关系	(40)
§ 1 关系的概念	(40)
§ 2 等价关系	(45)
§ 3 顺序关系	(54)
第三章 映射	(58)
§ 1 集合 E 到集合 F 的映射	(58)
§ 2 映射与关系	(62)
§ 3 由集合 E 到集合 F 上的映射	(67)
§ 4 由集合 E 到集合 F 中的映射	(70)
§ 5 一一映射	(72)
§ 6 原像	(74)
§ 7 一一对应	(80)
§ 8 函数及其图象	(85)

第一章 集 合

§ 1 集合的概念

如同几何学中“点”与“直线”的概念一样，集合的概念是最“原始”的，它的涵义只能用各种各样的例子来说明。在日常生活中，我们也经常遇到集合这个概念。例如在数学中，要考察所有自然数的全体、或者要研究大于10小于1000的奇数所构成的集合；又如某班学生也成为一集合，其中每个学生就是这个集合的元素。总之，我们称具有某种特定性质的抽象的或具体的事物的全体为集合，有时简称为集。集合中的事物称为元素。对于一个集合来说，任何事物或是这个集的元素（即属于这个集），或不是这个集的元素（即不属于这个集）。例如，若昆明市全体公民构成一集，则昆明市的每个公民都是这个集合的元素，此外别的任何人或任何事物都不是这个集合的元素。

在以上所举的例子中，我们看到，有一些集合显然是由一定的有限个元素组成的，如某班的学生所构成的集合；也有一些集合，虽然在实际上未能指出它们的元素的个数，但至少原则上能指出它们是由有限个元素组成的，如昆明市所有公民组成的集合。象这种由有限个元素所组成的集合叫有限集。

在数学里还经常遇到另一种集合——非有限集，我们称为无限集。比方，一切自然数所组成的集，一切偶数所组成的集，直线上所有的点构成的集等等。

以后我们常用大写字母 $A, B, X, Y, \dots$ 表示集，而用小写字母 $a, b, x, y, \dots$ 表示元素。

集合是数学中的一个重要基础概念。

例：

(1) 自然数集 N ；

(2) 整数集 Z ；

(3) 直线上的点集 $\mathcal{D}$ ($\mathcal{D}$ 是法文 *droite* 的第一个字母的大写)。

从以上的例子中又看到，集合中的元素可以是各种各样的对象：数，点，学生，公民等等。这就使我们从一开始学习集合的时候，便了解到集合理论的广泛性。

下面所列出的都是一些集合：

$$A = \{a, b, c, d\};$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\};$$

$$C = \{\text{张, 王, 李, 赵, 黄}\};$$

$$D = \{*, !, ?, :, , =\}.$$

上面的集合 A 含有元素 a, b, c, d ，就是说 a, b, c, d 分别属于集合 A 。用符号 $\in$ 表示属于 ($\in$ 是希腊字母 *epsilon*)，于是 $a \in A, b \in A, c \in A, d \in A$ 。

如果这个符号加上一画 $\notin$ ，便表示不属于，例如：

$$e \notin A, f \notin A, 2 \notin A, \text{王} \notin A.$$

因此，如果 x 是集 E 的元素，或者说 x 属于 E ，则记为

$$x \in E \quad \text{或} \quad E \ni x.$$

如果 x 不是集 E 的元素, 或者说 x 不属于 E , 则记为

$$x \notin E.$$

例：

- 1) $2 \in N$, 2 属于自然数集 N .
- 2) $-5 \notin N$, -5 不属于自然数集 N .
- 3) $A \in \mathcal{D}$, A 是直线 $\mathcal{D}$ 上的点.

2 属于自然数集 N .

- $$2) - 5 \notin N,$$

- 5 不属于自然数集 N .

- 3) $A \in \mathcal{D}$,

A 是直线 l 上的点.

集合中元素的书写次序一般是不考虑的，因此集合中元素书写次序更改后所得的集仍是看作同一个集，例如：

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 2\}, \{2, 1, 3\}, \{2, 3, 1\},$$

$$\{3, 1, 2\}, \{3, 2, 1\}$$

都表示相同的集.

又当一个集合中所含有的元素有相同时，它们都只算作一个元素。例如 $\{a, b, a, b, c\}$ 只能算含有三个元素 a, b, c 所构成的集合 $\{a, b, c\}$ 。

我们常用下面两种方法来表示一个集合：

第一种方法：列举出属于集合的所有元素，（不能遗漏其中任何一个），例如

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$
$$B = \{2, 3, 5, 7\}.$$
$$C = \{2, 6, 12, 20, 30, 42\},$$
$$D = \{\text{张, 王, 李, 赵, 黄}\}.$$

当集合所含元素的个数比较少的时候，用这种方法来表示集合是较为方便的，但是，当集合所含元素的个数比较多时，或者所论集合是无限集的时候，要列举出集合中所有元素，那是比较困难的，甚至是根本不可能的。由于这样的理由，就需要考虑用另一种较简单的记集的方法。

第二种方法：给出集合中所有元素的特征性，即给出集合中所有元素所满足的某些规则。详细地说，就是把集合中的元素的特征性表述出来。这里所说的特征性是指只为集合中的元素所具有，而另外的任何对象所没有的某些特定性质。因此，一旦表述出这种特征性，就完全规定了集合中的元素，从而也就完全规定了集合本身。例如对于集合 $A = \{2, 3, 5, 7\}$ ，我们可以定义 A 的元素为质数，且又不能大于10，于是 A 便可写为

$$A = \{x; x \text{ 为质数}, x \leq 10\}.$$

同样 $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 可写为

$$B = \{x; x \text{ 为整数}, 1 \leq x \leq 6\},$$

$$C = \{1, 4, 9, 16, 25\} \text{ 可写为}$$

$$C = \{x; x = n^2, n \text{ 为整数且 } 1 \leq n \leq 5\}.$$

第一种方法称为列举法，第二种方法称为构造法。为了更清楚地表示集合的这两种方法，我们用下表列出一些例子进行比较。

列 举 式	构 造 式
$\{2, 6, 12, 20, 30, 42\}$	$\{x; x = n(n+1) \text{ } n \text{ 为整数且 } 1 \leq n < 7\}$
$\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$	$\{x; x \text{ 为质数且 } x \leq 13\}$
$\{8, -2, 75\}$	$\{x; (x-8)(x+2)(x-75)=0\}$
$\{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$	$\{x; x \text{ 为偶数}\}$
$\{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$	$\{(x, y); x \text{ 为整数且 } 1 \leq x \leq 4, y = x+1\}$
$\{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$	$\{(x, y); x, y \text{ 皆为整数且 } x+y=6\}$
$\{\text{北京}\}$	$\{x; x \text{ 是中华人民共和国的首都}\}$

一个集合的构造式并不是唯一的，这是由于集合的元素可以往往用多种不同的定义来确定。例如集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的元素可定义为不大于 4 的自然数，也可定义为小于 6 而能整除 12 的数；集合 $\{2, 3\}$ 的元素可定义为最小的两个质数，也可定义为方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的解。

一个集合由它的元素完全确定，详细地说，设有二集合 A 与 B ，如果它们所含的元素相同，则 A 与 B 就是同一集合。此时，我们说 A 与 B 两集相等，并且用等号来表示。

定义 如果两集都由相同的元素构成，则称此二集相等。

例：

$$(1) \text{ 若 } A = \{a, b, c\}, B = \{a, c, b\},$$

$$\text{则 } A = B;$$

$$(2) \text{ 若 } A = \{x; (x+2)^2 - (x-2)^2 = 8\}, B = \{1\},$$

$$\text{则 } A = B;$$

$$(3) \text{ 若 } A = \{-1, +1\}, B = \{x; x^2 - 1 = 0\},$$

$$\text{则 } A = B.$$

今后，我们经常用到下列数集的概念，并用一些特定的字母表示。

自然数集	N
自然数集与零	N_0
仅由零构成的数集	O
整数集	Z
正整数集	Z_+
负整数集	Z_-
有理数集	Q

正有理数集	Q^+
负有理数集	Q^-
实数集	R
正实数集	R^+
负实数集	R^-

集合本身也可以成为另一集合的元素。此时后一集合的元素都是集合。例如

$$2 \in N, \quad N \in \{N, Z, Q, R\} = T.$$

但要注意，不能写为

$$2 \in T.$$

这是因为 T 含有四个元素，这四个元素都是集合，而 2 不是集合。

习 题

1. 元素 $0, 2, 5, 7, \frac{1}{7}$ 是否属于下列集合？

$$S = \{x; x^2 = 12x + 35 = 0\};$$

$$T = \{x; 7x - 1 = 0\};$$

$$U = \{x; x^2 - 0.2x = 0\}.$$

2. 列举下列集合中的元素：

$$A = \{x; x^2 - 9 = 0, x \in N\};$$

$$B = \{x; x^2 - 9 = 0, x \in Z\};$$

$$C = \{x; x = 10n + 5, n \in N_0\};$$

$$D = \left\{ y; \frac{y-2}{3} - \frac{y-3}{2} = 1 \right\};$$

$$F = \left\{ z; z = \frac{|u|}{u}, u \neq 0, u \in Z \right\};$$

$$G = \{ z; (z+1)^2 - (z-1)^2 = 4z \};$$

$$H = \left\{ t; \frac{t+1}{2} \in N \right\}.$$

3. 给出下列每一集合的构造式:

$$A = \{ 3, 10, 17, 24, 31, 38, \dots \};$$

$$B = \{ 2, 12, 72, 432, \dots \};$$

$$C = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \};$$

$$D = \{ 1, 2, 4, 8, 16, \dots, 256 \};$$

$$K = \{ 1, 8, 27, 64, 125, 216, 243, 152 \}.$$

§ 2 子 集 合

我们先来考虑正偶数集 P 与自然数集 N 的关系。很明显，集合 P 的任何元素都是集合 N 的元素。此时，我们说集合 P 是集合 N 的子集合，记为

$$P \subseteq N \text{ 或 } N \supseteq P,$$

读为 P 包含于 N 或 N 包含 P 。

例:

1. 任何菱形都是四边形。菱形集合 L 是四边形集合 K 的子集合，即

$$L \subseteq K.$$

2. 设有位于平面上的一直线。直线上的点的集合 $\mathcal{D}$ 是平面上的点集合 $\mathcal{A}$ 的一个子集合，即

$$\mathcal{D} \subseteq \pi.$$

定义 如果集合 A 的任一元素都是集合 B 的元素，那么我们说集合 A 是集合 B 的子集合，或称集合 A 是集合 B 的部分，写为

$$A \subseteq B \quad \text{或} \quad B \supseteq A,$$

即集合 A 包含于集合 B 或集合 B 包含集合 A 。

包含关系 $A \subseteq B$ 意味着：对于任一元素 x ，只要具有集合 A 的特征性就一定具有集合 B 的特征性，这句话又可用一系列的符号表示，即

$$\forall x, \quad x \in A \implies x \in B,$$

读为：《对于任何元素 x 》，若《 x 属于 A 》，则《 x 属于 B 》。

上面所说的包含关系是广义的包含关系。广义的包含关系不排除集合 A 与集合 B 相等。特别，任何集合包含于自身，即

$$\forall A, \quad A \subseteq A.$$

为了直观起见，我们经常用图形来表示两个集合 A 与 B 的包含关系。

例：

$$A = \{1, 4, 5, 7, 9\},$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

此时，

$$A \subseteq B.$$

这个包含关系用下图表示

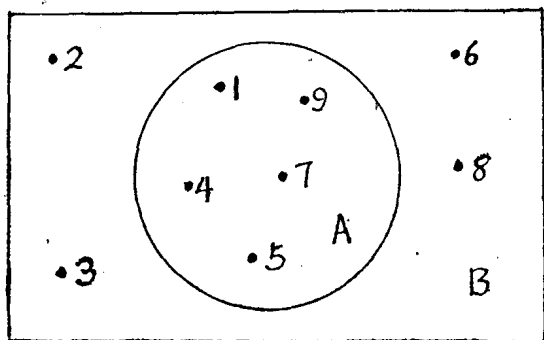


图1—1

图中符号·表示元素.方框内部表示集 B ,围线内部表示集 A .

如果集合 A 具有特征性 p 而集合 B 具有特征性 q ,那末包含关系

$$A \subseteq B.$$

等价于

$$p \Rightarrow q.$$

例:

$$\begin{aligned} A &= \{4, 8, 12, 16, \dots\} \\ &= \{x; x \in N, x \text{ 被 } 4 \text{ 整除}\}, \\ B &= \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\} \\ &= \{x; x \in N, x \text{ 被 } 2 \text{ 整除}\}, \end{aligned}$$

A 具有被4整除的特征性,

B 具有被2整除的特征性,

由被4整除的可除性推出被2整除的可除性,即

$$p \Rightarrow q, A \subseteq B.$$

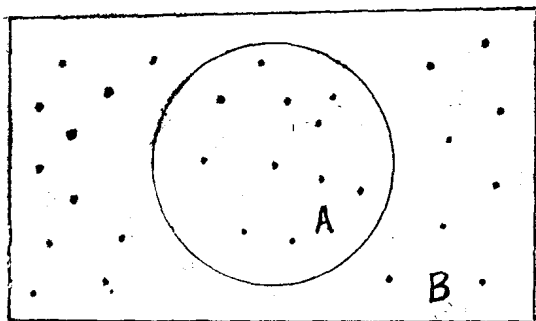


图1-2

如果集合 A 包含于集合 B , 并且 B 中至少存在一个不属于集合 A 的元素 y , 则称这种包含关系为严格的包含关系, 用下面的式子表示, 即

$$A \subset B \quad \text{或} \quad B \supset A,$$

有时写为

$\forall x, x \in A \implies x \in B$, 并且 $\exists y, y \in B, y \notin A$. 也就是说, 对于任意的元素 x , 若《 x 属于 A 》, 则《 x 属于 B 》, 并且至少存在一个元素 y , 使得《 y 属于 B 》而《 y 不属于 A 》.

例:

$$\{1, 3, 4, 7\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$

$$O \subset N_0, \quad N \subset N_0, \quad N \subset Z,$$

$$N \subset Q, \quad Z \subset Q, \quad Z \subset R,$$

$$Q \subset R, \quad R^+ \subset R,$$

定义 我们称不含有任何元素的集合为空集合, 并用符

号 ϕ 或 $\{ \}$ 表示空集合。

我们允许任何集合 E 都包含空集合，也就是说，任何集合 E 都可以把空集作为它的子集合，即

$$\forall E, \quad \phi \subseteq E.$$

特别，

$$\phi \subseteq \phi.$$

注意：不要混清空集和只含有元素0的单元集。
 $A=\phi$ 是空集，它不含有任何元素； $B=\{0\}$ 是单元集，它含有唯一的元素0。

定义 若非空子集 A 严格地包含于 B ，则称集合 A 是集合 B 的真子集，以符号表示，即

$$\phi \subset A \subset B.$$

用符号 $\subseteq$ 表示的关系称为包含关系，用符号 $\in$ 表示的称为从属关系。应该注意，用符号 $\subseteq$ 和符号 $\in$ 表示的两个关系有着原则性的区别。关系 $x \in A$ 表示元素 x 属于集合 A 这一事实，它是元素与集合之间的从属关系；而 $A \subseteq B$ 表示集合 A 包含于集合 B ，它说明集合与集合之间的关系。

因此，应该严格区分《属于》与《包含》这两个不同的概念。

$$\begin{aligned} a \in \{a, b\}, & \quad \{a\} \subset \{a, b\}, \\ a \in \{a\}; & \quad \{a\} \subseteq \{a\}. \end{aligned}$$

集的构成和集的相互关系可以用图解来表示，这主要是为了更直观一些，这种图称为范恩—欧拉(Venn-Euler)图，范恩—欧拉图就是在平面上用一个封闭曲线围绕着集的元素以表示一个集合，如

集合 $A=\{a, b, c, d\}$ 是图1—3

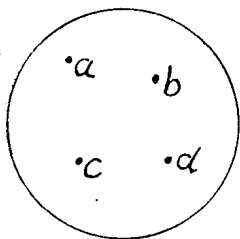


图1-3

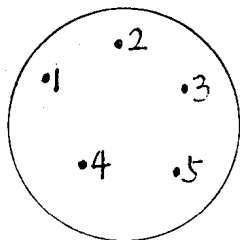


图1-4

集合 $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 是图 1-4

这一条封闭曲线便把属于与不属于的元素区分开来，例如：

$$A = \{a, b, c, d\},$$

$$D = \{a, b, c, d, e, f\}.$$

此时可表示如图

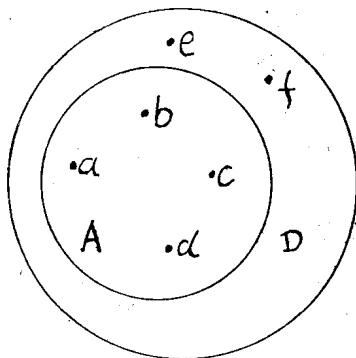


图1-5