

部 定 大 學 用 書

物 理 化 學 實 驗 學

國立編譯館大學用書編審委員會主編

編 著 者 曹 簡 禹
黃 定 加

國 立 編 譯 館 出 版
正 中 書 局 印 行

版權所有



翻印必究

中華民國五十二年十月臺初版

中華民國六十七年十月臺十六版

部定 大學用書 物理化學實驗學

全一冊 基本定價 精裝三元九角
平裝二元八角

(外埠酌加運費滙費)

主編者 國立編譯館大學用書編審委員會
編著者 曹簡禹 黃定加
出版者 國立編譯館
發行人 黎元馨
發行印刷 正中書局

新聞局出版事業登記證 局版臺業字第〇一九九號(4522)川
(2000)

正 中 書 局

CHENG CHUNG BOOK COMPANY

地址：臺灣臺北市衡陽路二十號

Address: 20 Heng Yang Road Taipei, Taiwan, Republic of China

經理室電話：3821145 編審部電話：3821147

業務部電話：3821153 門市部電話：3822214

郵政劃撥：九九一四號

海 外 總 經 銷

OVERSEAS AGENCIES

香港總經銷：集成圖書公司

總辦事處：香港九龍油蔴地北海街七號

電話：3—886172—4

日本總經銷：海風書店

地址：東京都千代田區神田神保町一丁目五六番地

電話：291—4345

東海書店

地址：京都市左京區田中門町九八番地

電話：791—6592

泰國總經銷：集成圖書公司

地址：泰國曼谷耀華力路233號

美國總經銷：華強圖書公司

Address: 41 Division St., New York, N.Y. 10002 U.S.A.

歐洲總經銷：英華圖書公司

Address: 14 Gerrard Street London W.L. England

加拿大總經銷：嘉華圖書公司

Address: China Court, Suite 212, 208 Spadina Avenue Toronto
Ontario, CANADA M5T 2C2

編輯要旨

1. 編本書之目的，在於訓練初學者自作實驗，以養成研究之基礎。故凡所論述，均限於四小時內能完成之基本實驗。
2. 各實驗所用儀器，儘量採取簡單而能自行裝置或較易購得者，以符實際而利進行。又各裝置均有附圖及說明，以便參考。
3. 爲引起學者研究之興趣，及養成其活用原理之能力，凡實驗引用之原理，均加以證明。又每實驗之後，均附有練習，以供作進一步之研究。
4. 本書中所舉實例，大都爲筆者數年來實驗之結果，而取較爲滿意之數據。其間因裝置過簡，或其他關係，容有若干錯誤。
5. 每章之後，均列舉有關文獻，以供參考。

又本書編撰之際，參考下列各專門著作者特多，特附列於後：

- E. Daniels, J. Mathews and J. Williams: *Experimental Physical Chemistry*, McGrawHill, New York (1949)
- H. Willard, L. Marritt and J. Dean: *Instrumental Methods of Analysis*. D. van Nostrand Co. Inc., (1948)
- Davison, Klooster and Bauer; *Laboratory Manual of Physical Chemistry*, John Wiley and Sons Inc., New York (1950)
- F. Steinbach and V. King: *Experiments in Physical Chemistry* Arnold Weissberger: *Physical Methods of Organic Chemistry*, Interscience Publishers. Inc., New York (1949)
- Reilly and Rae: *Physicochemical Methods*, Dvan Nostrand Company, Inc., New York (1953)
- 鮫島實三郎：物理化學實驗法，裳華房 (1959)
- 小寺明：物理化學實驗法，朝倉書店 (1959)
- 後藤廉平：物理化學實驗法，共立全書 (1959)
- 松野吉松：理論化學實驗法，山海堂 (1936)
- 緒方章，近藤龍：化學實驗操作法，南江堂 (1958)
- 化學實驗學、河出書店 (1940)

序

物理化學爲化學上主要科目之一，不僅爲專攻化學者所必修，且爲研究化工，礦冶，生物，及醫藥等者之基礎。物理化學，亦如其他實驗科學，須以實際之操作，與切身之體驗，對書本上之知識及理論，方有深切之認識。故物理化學實驗，亦爲學習、化工、礦冶、生物、醫藥等者所必需。

目前國內尙少物理化學之實驗用書。作者等不揣譾陋，搜集國內外參考書刊，益以多年來在成功大學教學實驗所得之資料，彙編成書，名爲物理化學實驗學。其目的在對物理化學實驗有關之儀器如何裝置，實驗如何操作，數據如何讀取，結果如何計算，與理論及事實之比較等，均加以詳細之論述。其材料足敷大學初步物理化學實驗一學年之用。倘能對教師與學生參考有所貢獻，則幸甚矣。

本書之編著，雖經縝密注意，錯誤或遺漏之處，在所難免。尙祈海內外諸先進，惠予指正，俾能改善，實所切盼。

本書編著時承成功大學工學院院長萬冊先先生與化學系教授林一民先生之熱誠鼓勵，得以順利完成，深爲感謝。

曹 簡 禹 謹 識
黃 定 加

於 臺灣省立成功大學化工系
中華民國四十九年十二月一日

目 次

I 緒論	1
1-1 誤差	1
1-2 最小自乘法	4
1-3 真空中之秤量	9
溫度計之補正	11
物質之精製	20
氣體壓力之測定	28
2-1 壓力之單位	28
2-2 壓力計及其補正	29
2-3 壓力計	33
密度之測定	40
液體密度之測定	40
3-2 固體密度之測定	50
3-3 蒸氣密度之測定	53
3-4 氣體密度之測定	61
3-5 膠質溶液之密度	69
表面張力之測定	72
4-1 表面張力之概念	72
4-2 測定法之理論基礎	75
4-3 溫度對於表面張力之影響	76
4-4 表面張力，密度及溫度之關係	78
4-5 表面張力與分子會合	80

4-6	表面張力與構造式	82
4-7	表面張力之測定法	84
4-8	液體間之界面張力	103
4-9	固體之表面張力	105
4-10	膠質溶液之表面張力	110
V	粘度之測定	113
5-1	粘度	113
5-2	粘度係數與化學構造之關係	114
5-3	粘度係數與溫度之關係	116
5-4	粘度之測定	117
5-5	高分子溶液之粘度	129
VI	折射率之測定	136
6-1	折射率	136
6-2	比折射與分子折射	131
6-3	折射率之測定	147
VII	熱化學	149
7-1	溶解熱	149
7-2	中和熱	156
7-3	汽化熱	161
VIII	稀薄溶液之性質	168
8-1	沸點上昇	168
8-2	解離及會合	180
8-3	冰點下降	181
8-4	滲透壓	190

IX 多相物質之平衡	195
9-1 液體之蒸氣壓	195
9-2 固體之溶解度	202
9-3 分配率	207
9-4 轉相點	213
9-5 液體之相互溶解度	219
9-6 三成分系之溶解曲線	225
9-7 混合物之熔融曲線	233
9-8 二成分系之液體——蒸氣平衡	243
9-9 水蒸氣蒸餾	251
X 反應速度	259
10-1 一次反應	259
10-2 二次反應	275
10-3 催化反應	283
XI 電化學	289
11-1 法拉第定律	289
11-2 離子之運電數	293
11-3 導電度	298
11-4 電動勢	308
11-5 分解電壓	313
XII 膠質化學	317
12-1 膠液之生成	317
12-2 膠液之精製	325
12-3 溶質之吸着	329
12-4 電泳動	336

實驗目次

1. 液體密度之測定 I —— 比重瓶法	41
2. 液體密度之測定 II —— 漢埃氏法	48
3. 粒狀或粉狀固體之比重 —— 比重瓶法	50
4. 蒸氣密度之測定 —— Victor Meyer 氏法	53
5. 氣體密度或分子量之測定 —— 流出速度法	65
6. 表面張力之測定 I —— 毛細管上昇法	84
7. 表面張力之測定 II —— 丟奴張力計法	91
8. 表面張力之測定 III —— 液滴重量法	97
9. 表面張力之測定 IV —— 最大泡壓法	101
10. 液體粘度之測定 I —— 毛細管法	120
11. 液體粘度之測定 II —— 落體粘度計法	126
12. 高分子物質之分子量測定法 —— 粘度法	130
13. 折射率之測定	143
14. 溶解熱之測定	151
15. 中和熱之測定	157
16. 汽化熱之測定	162
17. 分子量之測定 —— 沸點上昇法	168
18. 分子量之測定 —— 冰點下降法	182
19. 高分子化合物之分子量測定 —— 滲透壓法	190
20. 液體蒸氣壓之測定	196
21. 溶解度之測定	202
22. 容質於相互不溶解二溶媒間之分配率	207
23. 轉相點之測定	213

24. 水—酚之溶解曲線·····	219
25. 苯、醋酸、水三成分系之溶解度曲線·····	225
26. 鉛、錫二成分系之熔融曲線·····	233
27. 二成分系之氣，液二相平衡圖·····	244
28. 二成分系之沸點·····	247
29. 水蒸氣蒸餾·····	251
30. 蔗糖之轉化速度——一次反應 I ·····	262
31. 醋酸酯之分解速度——一次反應 II ·····	271
32. 醋酸乙酯之皂化速度——二次反應·····	277
33. 過氧化氫之分解·····	283
34. 法拉第定律之驗證·····	289
35. 硝酸銀水溶液中之銀離子及硝酸根離子之輸率·····	293
36. 當量導電度之測定·····	301
37. 電池之電動勢及單極電位之測定·····	308
38. 電解質溶液之分解電壓·····	313
39. Von Weimarn 膠粒生成說之檢證·····	323
40. 溶液中之吸着·····	329
41. 電泳動之測定·····	336

物理化學實驗學

I 緒 論

1-1 誤差

在實驗過程中,用任何精密的儀器與作任何細心的測驗,所得測驗總難免有若干誤差(error)。但由於數次反覆實驗之結果,取其平均數(mean value)可得較近於正確之數值。若在同一條件下做同一實驗時,可取其算術平均值,或幾何平均值,以減少其誤差。假定在同一條件下做 n 次同一實驗所得之測驗值為 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, 則其算術平均值(arithmetic mean) Ma 及幾何平均值 Mg , 各為

$$M_a = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \dots\dots\dots (1.1)$$

$$M_g = \sqrt[n]{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2} \dots\dots\dots (1.2)$$

假定每次實驗的偏差(deviation)各為 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$, 若以算術平均值為例,則 $\alpha_1 = a_1 - M_a, \alpha_2 = a_2 - M_a, \alpha_3 = a_3 - M_a, \dots, \alpha_i = a_i - M_a, \dots$ 。偏差是每次實驗值與平均值的差,並不是真正的誤差,依據或然率理論的結論,做 n 次實驗時,每次實驗所可能發生的平均誤差(mean error) α 為

$$\pm \alpha = \pm \sqrt{\frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2}{n-1}} \dots\dots\dots (1.3a)$$

由上述方法所求得之算術平均值,或幾何平均值,僅是比較近於正確結果之數值。即它與真正數值間,尚有誤差之存在。此誤差稱為平均值的

平均誤差 (mean error of means)。可用下式表示之。

$$\pm \sqrt{\frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2}{n(n-1)}} \cdots \cdots (1.3b)$$

誤差又可由下式考慮之：

$$Ma \pm e \cdots \cdots (1.4)$$

e 為真正數值之存在範圍，式(1-4)當實驗次數愈大，愈接近真正之值。但若用有限實驗次數所測得之數值時，則其在 $Ma + e$ 與 $Ma - e$ 間之可能率，及其在此範圍外之可能率並非 $\frac{1}{2}$ 。不過近來由於統計學之發達，可能由有限次數之測定值，推測出做無限次數測定時之結果。根據統計學得知真正數值之存在範圍 e 為

$$e = t \cdot \sqrt{\frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2}{n(n-1)}} \cdots \cdots (1.5)$$

(1-5) 式中之 t 為測定次數 n 及危險率 P 之函數。危險率 P 即為真正數值不在上述之範圍內之百分率。於是公算誤差之危險率為50%。

【例】測定某物質之熔點，得如下之結果，試求其平均值及信賴度。

$$\begin{array}{cccccc} 111.4^\circ\text{C}, & 111.4 & 111.7 & 111.4 & 111.6 \\ 111.7 & 111.7 & 111.5 & 111.0 & 111.6 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{【解】} Ma &= \frac{111.4 + 111.4 + 111.7 + 111.4 + 111.6 + 111.7 + 111.7 + 111.5 + 111.0 + 111.6}{10} \\ &= 111.50 \end{aligned}$$

$$\alpha_1 = 111.4 - 111.50 = -0.1 \quad \alpha_2 = -0.1, \quad \alpha_3 = 0.2$$

$$\alpha_4 = -0.1 \quad \alpha_5 = 0.1 \quad \alpha_6 = 0.2, \quad \alpha_7 = 0.2$$

$$\alpha_8 = 0.0 \quad \alpha_9 = -0.5 \quad \alpha_{10} = 0.1$$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_{10}^2 = 0.42$$

平均值的平均誤差 (Mean error of means)

$$= \sqrt{\frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2}{n(n-1)}}$$

$$\text{因 } n=10 = \sqrt{\frac{0.42}{10 \times 9}} = \frac{1}{3} \sqrt{0.042} = \frac{1}{3} \times 0.205$$

$$=0.068$$

由表 1-1 查 $n=10$, q (可變數之數) $=1$, $P=0.5, 0.05, 0.01$ 時之 t 值, $t_{0.5}=0.703$, $t_{0.05}=2.262$, $t_{0.01}=3.250$ 。故信賴度限界爲

公算誤差		$\pm 0.046^{\circ}\text{C}$
危險率	50%	$\pm 0.048^{\circ}\text{C}$
危險率	5%	$\pm 0.155^{\circ}\text{C}$
危險率	1%	$\pm 0.222^{\circ}\text{C}$

表 1-1 t 分 布 表

P $n-q$	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001
1	0.158	0.325	0.510	0.727	1.000	1.376	1.963	3.078	1.314	12.706	3.821	33.657	636.619
2	0.142	0.289	0.445	0.617	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	0.137	0.277	0.424	0.584	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.941
4	0.134	0.271	0.414	0.569	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	0.132	0.267	0.408	0.559	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.859
6	0.131	0.265	0.404	0.553	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	0.130	0.263	0.402	0.549	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.405
8	0.130	0.262	0.399	0.546	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	0.129	0.261	0.398	0.543	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	0.129	0.260	0.397	0.542	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.589
11	0.129	0.260	0.396	0.540	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	0.128	0.259	0.395	0.539	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	0.128	0.259	0.394	0.538	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	0.128	0.258	0.393	0.537	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	0.128	0.258	0.393	0.536	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	0.128	0.258	0.392	0.535	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	0.128	0.257	0.392	0.534	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	0.127	0.257	0.392	0.534	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.879	3.922
19	0.127	0.257	0.391	0.533	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	0.127	0.257	0.391	0.533	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850

21	0.127	0.257	0.391	0.532	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	0.127	0.256	0.390	0.532	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	0.127	0.256	0.390	0.532	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	0.127	0.256	0.390	0.531	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	0.127	0.256	0.389	0.531	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.767	3.674
29	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.640
40	0.126	0.255	0.388	0.529	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	0.126	0.254	0.387	0.527	0.679	0.848	1.046	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	0.126	0.254	0.386	0.526	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	2.773
∞	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

但因測定值 111.0 之偏差太大，若棄之，則

$$M_a = \frac{111.4 + 111.4 + 111.7 + 111.4 + 111.6 + 111.7 + 111.7 + 111.5 + 111.6}{9}$$

$$= 111.5555 \dots \dots$$

由表 1-1 取 $P=0.01$, $q=1$, $n=9$ 時之 $t_{0.01}=3.355$,

得 $e=0.0300$

所以該物質之熔點為 $111.556 \pm 0.030^\circ\text{C}$

1-2 最小自乘法 (Method of Least Squares)

吾人若在同一條件下做幾次同一實驗時，可依平均值法求其最可靠之測定值。但若每次實驗時之條件改變，則僅由上述算術平均或幾何平均值法不能得最可靠之測定值。此時若採用最小自乘法，則可得滿意之結果。現將最小自乘法之原理簡述於下：

設 $x, y, z, \dots$ 等為測定值，且其間有如下式之關係。

$$x = f(y, z, \dots) \dots \dots \dots (1.6)$$

又函數 $f(y, z, \dots)$ 中含有 $A, B, C, \dots$ 等之未知恒數；若做 n 次實驗而將所得之 n 組測定值分別代入(1.6)式。

得
$$x_1 = f(y_1, z_1, \dots)$$

$$x_2 = f(y_2, z_2, \dots)$$

.....

$$x_n = f(y_n, z_n, \dots)$$

設
$$\alpha_1 = x_1 - f(y_1, z_1, \dots)$$

$$\alpha_2 = x_2 - f(y_2, z_2, \dots)$$

.....

$$\alpha_n = x_n - f(y_n, z_n, \dots)$$

若每次測定均完全正確時，則 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 應均為零。但事實上決不可能。且其大小亦必因所選之 $A, B, C, \dots$ 等恒數之值而變。吾人若選取使 $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \dots + \alpha_n^2$ 之值變為最小時之 $A, B, C, \dots$ 等恒數值，則其誤差最小，此為最小二乘法之原理也。

為求使 $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \dots + \alpha_n^2$ 之值變為最小時之 $A, B, C, \dots$ 等恒數值，可利用微分學之法則，分別求 $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \dots + \alpha_n^2$ 對於 $A, B, C, \dots$ 等之一級微分，並設為零，解其聯立方程式，則可求得。即

$$\frac{\partial}{\partial A} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial B} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial C} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2) = 0$$

.....

因上面聯立方程式之數與 $A, B, C, \dots$ 等恒數之數相等，所以只要用常法解上面聯立方程式，則可求得最滿意之 $A, B, C, \dots$ 等恒數值。若在同一條件下進行測定時(1.6)之關係式即為

$$x_1 = A$$

$$x_2 = A$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_n = A$$

同樣設 $\alpha_1 = x_1 - A$, $\alpha_2 = x_2 - A$, $\dots\dots$, $\alpha_n = x_n - A$. 將 α 之平方和對 A 微分之,

$$\frac{\partial}{\partial A} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots\dots + \alpha_n^2) = 0$$

即 $-2(x_1 - A) - 2(x_2 - A) \dots\dots - 2(x_n - A) = 0$

$$\therefore A = \frac{x_1 + x_2 + \dots\dots + x_n}{n}$$

上式即為上述之算術平均值,與(1-1)式相同。由此得知,若在同一條件下做實驗時,只要求其平均值則可得最可靠之測定值,這事實和最小自乘法之原理亦相符合。

以下為使容易了解起見,關於最小自乘法舉例說明之。

【例 1】 溫度為 0°C 時,在各種壓力下測定氯化甲基之密度。所得結果如下,試求氯化甲基之分子量。

壓力 (大氣壓)	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
密度 (克/升)	2.3074	1.5263	1.1401	0.75713	0.56660

【解】 因測定時之條件均不相同,故不能用算術平均或幾何平均法求之,利用最小自乘法解之如下。

由氣體方程式 $PV = nRT$, 或 $PV = \frac{g}{M} RT$.

$$P = \frac{g}{V} \cdot \frac{1}{M} RT$$

$$PM = dRT \dots\dots\dots (1-7)$$

上式中 P 為壓力(大氣壓), d 為密度(克/升), T 為絕對溫度, M 為分子量, R 為氣體常數 $= 0.082054 \text{ l-atm/deg mole}$, 若將 P, d 之一組值代入(1.7)式,則可求得分子量 M 。這樣則必須於將其他之值捨棄不顧,於是不能得到精確分子

量，同時失去上面實驗之意義。

若將實驗值各分別代入(1.7)式，即

$$M = 2.3074 \times 0.08205 \times 273.16$$

$$\frac{2}{3}M = 1.5263 \times 0.08205 \times 273.16$$

$$\frac{1}{2}M = 1.1401 \times 0.08205 \times 273.16$$

$$\frac{1}{3}M = 0.75713 \times 0.08205 \times 273.16$$

$$\frac{1}{4}M = 0.56660 \times 0.08205 \times 273.16$$

設 $\alpha_1 = M - 2.3074 \times 0.08205 \times 273.16$

$$\alpha_2 = \frac{2}{3}M - 1.5263 \times 0.08205 \times 273.16$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2}M - 1.1401 \times 0.08205 \times 273.16$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{3}M - 0.75713 \times 0.08205 \times 273.16$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{4}M - 0.56660 \times 0.08205 \times 273.16, \text{ 則}$$

若上面實驗值完全沒有誤差時， α 應皆為零。但事實決不可能，且其大小亦必因所選 M 之值而定，根據最小自乘法及微分學之法則，設 $\frac{\partial}{\partial M}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \alpha_5^2) = 0$ ，所求得之 M ，即為最正確之分子量。

$$\text{因 } \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \alpha_5^2 = (M - 51.70)^2 + \left(\frac{2}{3}M - 34.14\right)^2 + \left(\frac{1}{2}M - 25.50\right)^2 \\ + \left(\frac{1}{3}M - 16.92\right)^2 + \left(\frac{1}{4}M - 12.67\right)^2.$$

$$\therefore \frac{d}{dM} \left(\sum_{i=1}^5 \alpha_i^2 \right) = 2 \left[(M - 51.70) + \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}M - 34.14 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}M - 25.50 \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}M - 16.92 \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}M - 12.67 \right) \right] = 0$$

$$M + \frac{4}{9}M + \frac{1}{4}M + \frac{1}{9}M + \frac{1}{16}M = 51.70 + \frac{2}{3} \times 34.14 + \frac{1}{2} \times 25.50 +$$

$$\frac{1}{3} \times 16.92 + \frac{1}{4} \times 12.67$$

$$\frac{269}{144} M = 51.70 + 22.76 + 12.75 + 5.64 + 3.165$$

$$\frac{269}{144} M = 96.012$$

$$\therefore M = 96.012 \times \frac{144}{269} = 51.32$$

【例 2】於各溫度下測定一定量 (100 克) 水銀之體積, 所得結果如下, 假定液體體積因溫度上昇成正比例增加, 試求其關係式。

溫度 °C	體積(v) 測定值	溫度 °C	體積(v) 測定值
10	7.3689 c.c.	30	7.3950
15	7.3750	35	7.4018
20	7.3824	40	7.4091
25	7.3892		

【解】因液體之體積因溫度上昇成正比例增加, 於是可用下式表之則:

$$V = V_0 + kt \dots\dots\dots (1.8)$$

(1.8) 式中, t 為溫度, V 為液體在溫度 t 時之體積, 將測得結果分別代入 (1.8) 式, 得

$$7.3689 = V_0 + 10k$$

$$7.3750 = V_0 + 15k$$

$$7.3824 = V_0 + 20k$$

$$7.3892 = V_0 + 25k$$

$$7.3950 = V_0 + 30k$$

$$7.4018 = V_0 + 35k$$

$$7.4091 = V_0 + 40k$$

設 $\alpha_1 = 7.3689 - V_0 - 10k$

$$\alpha_2 = 7.3750 - V_0 - 15k$$

$$\alpha_3 = 7.3824 - V_0 - 20k$$

$$\alpha_4 = 7.3892 - V_0 - 25k$$

$$\alpha_5 = 7.3950 - V_0 - 30k$$

$$\alpha_6 = 7.4018 - V_0 - 35k$$

$$\alpha_7 = 7.4091 - V_0 - 40k$$

由最小自乘法, $\frac{\partial}{\partial V_0} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \dots + \alpha_7^2) = 0$

即 $(7.3689 - V_0 - 10k) + (7.3750 - V_0 - 15k) + \dots$
 $+ (7.4091 - V_0 - 40k) = 0$