

华东计算力学 论文选集

复旦大学出版社

华东计算力学论文选集

主 编 马文华 丁浩江 卓家寿

复旦大学出版社

《华东计算力学论文选集》编辑委员会

主 编 马文华 丁浩江 卓家寿

编 委 (按姓氏笔划排列)

丁浩江	马文华	刘正兴	朱宗麟	陈天虎
吴连元	吴家骥	杨志清	余扶健	李定坤
余颖禾	张圣坤	周旭飞	武良知	卓家寿
赵锡钱	徐博侯			

华东计算力学论文选集

主 编 马文华 丁浩江 卓家寿
责任编辑 范仁梅

*

复旦大学出版社出版
(上海国权路579号)

浙江良渚印刷厂印刷
(杭州莫干山路良化站)

*

开本787×1092 1/16 印张22.25 字数555 000
1990年8月第1版 1990年8月第1次印刷
印数1—500
ISBN 7-309-00577-5/O·84 定价: 20.00元

序 言

早在1984年于杭州召开的全国软件会议期间，参加会议的沪浙苏三地区的代表，为进一步活跃地区与地区间的学术交流活动，推动有关计算力学的教学、科研和工程应用的相互学习、交流，决定于1985年4月在南京召开有限元教学和科研交流会。同年12月，借上海召开计算力学年会之机，三地区的代表又一次聚会进行了学术交流活动，这活动深受学会150余名代表的欢迎。同时，会议还倡议要成立地区联络组，以加强学术联系，并扩大到华东地区，旨在活跃经济区的计算力学的学术活动。该倡议得到安徽、山东、福建、江西四个省力学会的支持，并委派代表参加联络组。在此基础上于1986年3月在上海华东师范大学支持下，召开了联络组的成立会议，与会的六省一市26名代表举行了第一次联络组的工作会议，明确了联络组的宗旨、性质和任务。指出团结、友谊、协作、交流、提高和发展是我们共同的奋斗目标，并作出了定期召开地区学术交流会议的决定，且由各学会轮流安排，组织会议。

1987年8月，在江西省力学会和江西工业大学的主持下，在庐山召开了“第一届华东地区计算力学学术交流会”，汇报和交流了各地区的基础理论和应用成果，引起了学会的工程和学术界同志的广泛兴趣。但由于条件所限，时间紧促，未能及时出版会议文集，颇感遗憾。

1989年10月，在浙江省力学会和浙江大学主持下，于杭州电子工业学院召开了“第二届华东地区计算力学学术交流会”，会议得到了杭州市城建设计院的热情支持，与会同志普遍感到这届会议上交流的论文的质量均有所提高，范围较广，内容较深，较全面地反映了华东地区的近年来计算力学学科及其在工程实践中应用的情况。为了便于交流和发展，在征得了与会同志的同意后，决定将本届会议的部分论文以及第一届会议中少部分未发表的论文共六十一篇，按学科分类，汇编成集，经编委会两次审阅后，予以出版。

由于我们水平有限和时间仓促，难免发生差错，如有不当之处恳希同行们给予批评指正，谨致谢意。

《华东计算力学论文选集》编委会

1989年12月

目 录

综 述

计算力学在工程设计中的应用	金问鲁 (1)
计算力学在电子设备结构设计中的应用	朱宗麟 (4)

一般理论方法及软件

扭转问题的断续附设边界单元解法	徐汉忠 (7)
利用主从结点法协调不同类型的有限单元	李康元 余武平 殷传新 (12)
状态递归法及其应用	李延和 薛祖卫 刁爱国 (17)
弹塑性有限变形的混合变分原理与应用	狄生林 宋启根 (25)
弹塑性结构的有限元分析	孙金文 (33)
任意区域空间曲面的消隐方法	彭宣茂 (37)
任意网格参数变换的两种差分格式	卓家寿 陈振雷 许丽雅 (42)
一些边界元程序及其基本理论	徐汉忠 (49)
岔管有限元分析、CAD程序系统的工程应用	华伯浩 费建中 华诚等 (54)
微机有限元计算的前后处理	王顺玉 (60)

结 构 力 学

权残法求解一种考虑剪切影响的厚板问题	马文华 李振钱 (63)
间断配点法分析中厚板	罗昌林 吴逸群 (69)
最小二乘配点法分析各向异性厚板	张伟星 陈志敏 (78)
弹性圆薄板轴对称弯曲的挠度通用公式	王林生 章 青 (84)
各向异性任意四边形板的特性分析	李振钱 马文华 (91)
一种改进的板弯曲问题的杂交应力三角形单元	李振钱 (97)
用三维有限条方法分析斜桥的三维内力	黄 卫 (103)
钢筋混凝土板的非线性有限元分析和试验研究	胥健松 宋启根 (108)
混凝土道面板弯曲损伤及其损伤变量	俞建荣 邓学钧 (116)
层合板有限元法在钢筋混凝土板全过程分析中的应用	范志良 宋启根 (123)
水下结构端部耐压隔壁的应力分析	汪庠宝 施德培 (129)
一类新型的杂交轴对称壳单元	任永坚 丁浩江 (135)
用弹塑性有限元计算圆筒内壁对称双裂纹的 J 积分	黄士振 (143)
变厚度扁球壳的几何非线性分析	肖 凡 杨志清 (147)
缺陷对圆柱壳安全性能影响的数值分析	孙 雁 刘正兴 (155)
压力容器联接系统刚性分析的矩阵方法	虞乔琪 (163)
“筒中筒”结构——宁波天封塔的模型试验与力学分析	薛永骀 薛国平 张正中 (167)
关于两种截面的弯曲中心计算公式和数值结果	王 炜 赵建华 (171)

钢吊车梁体系在偏心集中荷载作用下的有限元分析及试验	邓其莹 (177)
高层框架——剪力墙结构的一种快速算法	陈心耿 (182)
空间悬索结构超级单元分析法	郑国发 (189)
膜块组合结构弹塑性数值分析方法	刘正兴 强 律 (197)
荷载分配法在结构分析中的应用	陈心耿 (203)

三 维 问 题

用三维边界元进行齿轮接触应力分析	徐 兴 徐 晓 (209)
轴对称横观各向同性有限深地基问题基本解	江隆植 (218)
三维热弹性边界元法及其在工程中的应用	黄慧春 熊焕国 (224)

动 力 学

混合界面动态子结构法及其在求解坝—基体系的自振特性中的应用	曾三平 卓家寿 (230)
球壳在无限大不可压缩流体中轴对称振动的固有频率	王 清 徐博候 (237)
大型火箭捆绑联接刚度对系统固有频率的影响	李康元 余武平 朱宇凡等 (241)
梁弯曲振动高阶特征值计算的若干问题	陈贞钜 刘瑞茂 (244)
冲击荷载下弹性矩形薄板的响应	陈天虎 (250)
声波在无限大层合板上的反射和透射 (I)	徐博候 谢贻权 王宝文 (254)
声波在无限大层合板上的反射和透射 (II)	徐博候 谢贻权 王宝文 (259)
随机荷载的统计分析方法	符晓陵 徐道远 张林兵 (265)
高层空间框架抗震优化设计	胡维俊 何雄君 (270)
铰接浮箱栈桥动力问题的初步分析	杨效中 沈 庆 (278)

稳定性、温度应力

用弹粘塑性有限元和无限元方法分析岩基的空间稳定性	许丽雅 卓家寿 (285)
优化方法在岩体稳定分析中的应用	任青文 (292)
弹性梁结构的后屈曲分析有限元计算	饶江平 吴洪泰 朱文骅 (296)
空间刚架屈曲的有限元摄动解	张圣坤 (301)
传导—对流热应力问题的力学新模型	余颖禾 陈善年 郭小明 (306)
计算瞬态温度场的广义有限元法	陈 昕 朱宗麟 (309)
积分方程法解基础梁的温度应力问题	徐汉忠 (313)
混凝土温度徐变应力场空间有限元分析	徐道远 符晓陵 李国英 (319)

其 它

槽约束片簧的负刚度特性计算	范元卿 (324)
混凝土蠕变本构关系的几个问题	林 洋 (329)
一种新型振动筛的设计构思	包忠有 扶名福 (333)
应用SAP5 程序进行间歇式球磨机筒体的强度分析	李震华 (338)
砖烟囱结构计算实例	陈爱民 (343)

计算力学在工程设计中的应用

金 问 鲁

(杭州市城建设计院)

我个人参加工程设计四十多年,体会到计算力学在设计中是非常重要的,借此机会向各位专家汇报个人的一点看法。

(1) 设计是一项创造性的工作。无疑,在各种工程中已制订出许多规范,这些规范对设计有很大的指导意义。但是设计是创造性的工作,对某一工程,一般由于出发点不同,规划师、建筑师、工程师的设计不会雷同,也不应雷同。工程设计中或多或少地会出现规范中不曾规定的问题,这就要求设计人按照计算力学的基本原理进行计算,甚至要求在计算力学范围中作创造性的工作。值得提出,工程项目越巨大,越重要,越复杂,则越需要计算力学。

(2) 设计工作是一个由粗略到精确的过程。40年代我们在学习设计教材时,无论在结构工程和基础工程中常常遇到的是一些经验公式。那时在杆件系框架设计中,Hardy Cross的弯矩分析法是最新的结构理论,我们青年学生都以能深入理解和熟练应用这种方法为荣,那时在土力学中 Tarzaghi 的理论问世不久,太沙基提出了地基承载能力和饱和粘土固结理论,开展了现代土力学的研究,太沙基本人也被誉为近代土力学之父。由于当时的工程人员普遍轻视计算力学的倾向,太沙基的公式要求较高深的、严格的数学推导,因此只有很少的人能深刻理解。50年代以后,这种情况有了改进。60年代以后,电子计算机得到迅速地发展,很多的复杂工程问题,可用现成的程序,在计算机上进行计算,使设计人员可以更广泛地了解结构的内部性能。

(3) 计算力学在工程设计中迅速发展,学无止境。当前设计人员中不少人有一种看法,认为设计的计算工作完全可由电子计算机代替,设计人员的责任不过是根据计算结果画图。我认为这种看法是错误的,至少是不够全面的。设计工作的重要性在于它是一项指导工程实践的蓝图。设计人应当缜密地考虑实践中可能发生各种情况。设计过程,特别是施工、使用阶段中的实践过程,不断向计算力学提出新的问题,可以不夸张地说,设计和实践是计算力学发展的一个丰富的源泉。举例说来,虽然数学家对有限元法理论的发展有着不可磨灭的功绩,但是只有当 Zenkiewicz 等将这个办法广泛地应用在各种实际问题中后,才使它成为工程界不可缺少的工具。辛克威茨即是根据大坝设计的实际要求,作出三维有限元法分析。我本人在工程设计特别是在处理一些工程事故中深深感到当前一些程序库虽然丰富多采,但是处理一些工程问题却远远不够。当前还存在很多疑难问题,例如地震,大跨和高层结构的稳定性,软土地基的沉降,桩、土共同作用,以及随机过程理论、优化控制等如何在工程设计中作出实际有效的应用。这些困难不在于计算机能力不足,而是在于如何作出实际有效的计算模型。有很多问题亟待发掘和研究。

(4) 工程设计中所要求的计算力学是综合性的知识,而不是分科很细的专门性研究。这里

声明一下，我决无贬低计算力学在基础理论方面如理性力学等的研究，以及对某些专门性问题的深入探讨，这些研究是计算力学中的瑰宝，无疑地，从长期观点看来，它也必然能更好地指导实践。但是工程实践需要广泛的知识。举例说来，结构工程中上层结构和下部基础是不可分割的，但50年代后学习课程分割太细，设计人员常常只管上部结构，而将地基部分交给工程、勘探人员，由他们提出地基承载力，并不加分析地应用。这样就可能会对设计造成不良后果，这方面的工作有待改进。据我们所知，二十世纪著名的力学家，如Karman, Biot对结构中的壳体，土力学，地震谱分析，随机优化控制等各方面都作出贡献，似乎值得我们学习。进一步说，工程咨询解决一些工程难题，还是应当进行提倡的，他们将一项总的课题提出，他们不会分成各个组成的课题，应当是自然的。

(5) 工程设计中虽然有精确化的趋势，但由于目前我们对自然的认识还是不足的，而且这种认识不足的情况以后还会继续出现，因此，难以很快地找出问题的精确解。工程的实践决不允许等待作出全部精确理论后再行设计，必须找出适当的处理方法。这里举两个例子。在最近将要出版的设计手册中有设计方法论的内容，其中两章由我撰写，其中一部分是模糊数学的应用，着重介绍了王光远教授对地震工程的分析。众所周知，地震工程设计中有两个重要的参数，一个是烈度，另一个是地基土壤的分类。两个参数都是离散的整数，跳越一级将使工程的安全度及造价有巨大差异。王光远教授用模糊数学的方法使这些参数连续化，这是一个良好的开端。另一章是我本人所提出的设计中的比较方法，主要用于地震中沙土和亚粘土的液化问题。液化问题在力学中还未解决，用比较法，可以提出一些防止液化的措施，并通过某些简单的验算，算出所增加的安全系数，以确定设计方案。

(6) 优化问题。优化是计算力学的一个重要方面，而它在设计中则特别重要。优化设计在决定一些构件截面中已有不少论文。但是由于预制厂必然要使用已有的现成模板，而且优化的目标函数是否真正代表厂方的目标，因此，要影响到构件优化的真正使用。这里特别要说明两种优化问题。首先要注意到优化问题必然是在某些条件约束下的优化。这些条件可能是实用的截面尺寸，在容许的应力和变形范围内的稳定和动力性能等。第一类问题是可能性问题。我们常见到报导所写：建造了最大跨度的桥梁，最高的房屋等，便是计算力学在现有的施工条件，特别是在某种特定材料的条件下的最大跨度，最大高度、最大空间等。这便是研究在这些约束条件下是否有解。若放松某些约束条件或改换所用的材料或革新施工方法，则能扩充这些可能范围。约束条件中最重要的是材料，通过对这个问题的研究可以看到钢结构及混凝土结构的适用范围。第二类问题是方案优化问题。众所周知，从方案优化所得的经济效益远比构件优化所得者为多，但是方案优化的研究较少，应当加强研究。

第二部分是简单汇报我本人在有关方面的一些工作。早期我曾从事悬挂结构的系统研究，写过两本著作。悬挂结构属于几何非线性问题。土力学地基中极限平衡理论及二维、三维的饱和粘土固结、次固结问题，以及预应力混凝土的徐变。由于我个人的课题都是由于工程需要产生的，所以从事的题目比较庞杂。从50年代后期开始，我除从事房屋、桥梁、给排水结构设计外，又从事路面设计，当时所遵守的是Иванов路面理论，和Коган的多层路面弹性理论。在实际中我们看到新筑的路面不会在瞬间被破坏，而是被逐渐破坏。因此，我首先提出了路面的流变理论，并在上海1964年土木年会上作了报告。当前国内对路面流变作了很多研究，提出大量成果。近来我着重提出了预应力混凝土弹性徐变的统一计算理论，发表了几篇

论文，这个理论比当前国际上通行的林同炎方法精确，已应用于杭州某体育馆的设计中，并获得了安全与经济的效果。

在土建工程中，基础部分的造价占了很大的比例，在杭州这个比例可达20~30%。如何进行经济合理的设计是一个重要任务。桩、土能否共同合作是一个古老的问题。50年代初期，就这个问题我曾和一些老工程师进行过辩论，他们根据欧、美当时的通常看法，认为桩、土是不能共同作用的。一位老工程师形象地说：“将筷子和棉花放在一起，能否共同作用？”但是这和传统的工程经验是不符合的，重力式桥台中常用12cm梢径、5m长的木桩，间距70cm，仅考虑桩承重无论如何是不够的，但在实际中却收到良好效果。桩、土共同承载问题从70年代起在国际上受到重视，由于计算的复杂性，一些国际会议上，仅考虑了单桩和土的共同作用。3年来我们在这方面开展了研究，考虑了桩土的共同作用，仅在一个住宅小区就节约了338万元，从而受到奖励。处理这个问题的方法，是将桩基和以下土层看成双层地基，用极限平衡理论计算它的承载能力，并用连续化公设，将桩、土看成复合材料，折算其弹性张量和渗透张量，再用有限元法进行计算。

我认为连续化公设是一个重要的方法，使离散体连续化后可进行计算。最近我正在考虑高层结构连续化的新方法，它可以考虑到压缩、剪切、扭转等各种影响，同样可适用于超高层中常用的框筒结构。剪力墙一般可看作薄壁结构，大家熟知，Власов开口薄壁理论和Уманский的闭口薄壁理论是不同的，在计算中使用不同理论编制程序是很不方便的。为了解决这个问题，我考查了符拉索夫理论，他用了两个基本假定。第一个是周边刚性的假定，这个假定符合圣维南扭转理论及一般梁理论，同时也符合高层结构中楼层平面内刚度无穷大的假定。第二个是中曲面无剪应变的假定，这个假定仅符合普通梁理论，即欧拉梁理论。这个假定阻碍了向闭口薄壁结构的应用。如同Timoshenko在考虑了剪切变形影响后提出了提摩辛珂梁理论那样，我也在薄壁结构中放弃了符拉索夫的第二假定，使得在计算力学中，两种结构可用统一的计算方法，从而在电子计算机中可采用统一的计算程序。

限于时间不能作详细介绍，在座各位都是某些方面研究极深的专家，也具有丰富的实践经验。我能够有机会在各位面前谈些不成熟的想法，觉得非常荣幸。我认为大家紧密团结必然会获得丰富成果，作出重大贡献。我只是抛砖引玉，浪费了大家时间。我的话完了，谢谢大家。

计算力学在电子设备结构设计中的应用

朱宗麟

(杭州电子工业学院)

力学与生产技术的密切关系是众所周知的事实。根据力学的理论与实验建立的模型,可以直接为工程设计服务;同时,力学学科发展的原动力又来源于生产。由于高速电子计算机的发展及相应的数值分析方法的兴起,已形成了以力学理论、计算机科学与数值分析方法相结合的一门新学科——计算力学。近年来,计算力学又正在向数值分析方法广义化及程序实施微机化的方向发展,从而更能适应现代工程设计的需要。

电子设备结构设计不同于一般的结构设计,所控制的设计指标不仅是结构本身的性能,而更重要地是控制由结构的分析与综合设计达到特定的电性能的要求。一般地说,下列几类问题具有广泛应用的价值。

在电子设备中,由于外界及结构内部的温度场变化,会影响电子器件的特性变化,从而影响整个设备的功能。因此,在结构设计时,除了考虑必要的辅助措施外,对于结构本身的构型、环境条件及内部布局等均需进行分析与优化计算,并尽量对温度场进行精确的分布情况计算。

还要慎重考虑的问题,是电子设备结构设计时所进行的动态分析与综合计算。在此,不只是针对结构本身而言,而更重要地是如何在电子设备的结构设计时,进行有关振动与冲击的精确分析以及提出一些辅助措施,以保证所设计的设备会在预定的条件下正常工作。这点在机载或舰载电子设备结构设计时更为突出。

最具有特殊性的一类问题,是在天线结构设计时,碰到最棘手的问题是结构位移场直接对天线射频性能影响的复合场问题。这对精度要求特高的毫米波射电望远镜的天线结构设计来说,则更加难以处理。本文准备针对这一问题,进行一些讨论,旨在阐明如何在天线结构设计的分析与综合时运用计算力学方法来解决位移场与电磁场的复合场问题。讨论的天线型式是大型可动的抛物面天线及以抛物面为主面、以双曲面为副面的卡氏(Cassegrain)天线。

总的来说,完整的天线结构设计应包含以下几方面内容:

- (1) 建立天线结构的计算力学模型,进行刚度、强度等数值分析,特别是根据天线射频性能对结构的要求,进行天线反射面变形及系统变形对于天线增益及指向精度影响的分析;
- (2) 有关天线结构的动态分析,其内容有风荷响应、地震响应分析及固有频率计算等;
- (3) 静力优化与动力优化设计,包括与上述分析内容相关的一些优化设计,如最佳吻合抛物面问题、最佳调整角问题、保型设计、重量优化及频率优化设计等。

可以看出,这些内容均与计算力学休戚相关,只是在应用时需慎重考虑电子设备结构的一些固有特性而已。当然,有关电子设备结构设计的一些必要的硬实验也是不可缺少的。

国内外有关天线结构设计的方法,我们认为可分为三大类,即“直接折 算 设计法”、“全面考虑电性能的设计法”及“自适应动态构型设计法”。

所谓“直接折算设计法”，是根据电设计者对结构设计者的要求，直接按折算成的结构设计指标进行设计。对于反射面精度的指标，按Ruze公式^[1]，得有表面误差的天线增益 G 与理想天线增益 G_0 的比值——有效度为

$$\eta_s = \frac{G}{G_0} = e^{-(2k\varepsilon)^2} = e^{-(4\pi\varepsilon/\lambda)^2} \quad (1)$$

式中 $k = 2\pi/\lambda$ 为相位常数， λ 为该天线所用的最短的波长， ε 为天线由于变形而形成的半光程差的均方根值(rms)。一般情况， $\eta_s = 0.5 \sim 0.7$ ，故有指标

$$\varepsilon = \frac{1}{16} \lambda \sim \frac{1}{20} \lambda \quad (2)$$

对于指向误差，即电轴与机械轴的重合度指标，用半功率宽度表为

$$\varphi_H = 70 \frac{\lambda}{D} (\text{度}) = 1.22 \frac{\lambda}{D} (\text{弧度}) \quad (3)$$

式中 D 为反射面口径。指向精度（考虑了非重复性误差及重复性误差校正后的残差）通常限为

$$\theta_p \leq \varphi_H / 10 \quad (4)$$

据此，天线结构设计就可用计算力学方法的复杂结构分析与综合的程序来实现。遗憾的是，在高精度要求且波长短的天线结构设计中，很难达到预期的设计目标。不过，在分米波以上的天线，这种方法仍然不失为简单的实用设计方法。

对于高精度大型天线结构设计而言，采用“全面考虑电性能的设计法”是完全必要的，而且也是可能的。在西德、英国、日本及美国等研制建造的一些高精度大型射电望远镜的结构设计中，大都采用此类方法，且获得了较好的效果。我国亦曾进行过有关的研制工作，对此我们曾提出过这类设计的实用分析方法^[2,3]，以下再就有关问题进行一些讨论。

由于近年来计算力学突飞猛进的发展，对于复杂结构的分析与综合，提供了非常有利的条件，大大促进了结构CAD的发展。然而，对于天线结构设计，可以说还需进一步搞清结构有关变形与电性能的关系，才能使天线电设计与天线结构设计有机地结合起来，真正解决全面的系统的天线设计问题。也就是说，要能在天线结构设计领域中，建立一种全面考虑电性能要求的“计算天线结构力学”模型，给出具有实用价值的分析与综合的数值计算方法。

目前，就我们所了解的情况来看，已形成的这类设计法基本上有以下的一些内容。首先是分析反射面变形及其对于电性能的影响。预测天线电性能可以根据标量远场方向图进行数值积分计算分析；亦可用最小二乘法计算反射面各变形点的射束半光程差加权均方根值(rms)的最佳吻合方法，即可结合有限元离散化的反射面计算结点，将半光程差 δ 的均方根值 ε 表为

$$\varepsilon = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^N (\delta_i - \bar{\delta})^2 \cdot f(r_i, \phi_i) \cdot A_i}{\sum_{i=1}^N f(r_i, \phi_i) \cdot A_i} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

式中 $\bar{\delta}$ 表示半光程差在口径面上的算术平均值； A_i 表示 i 点在口径面上所代表的小块面积，视为加权系数； $f(r_i, \phi_i)$ 为用口径坐标 r_i, ϕ_i 表示的同相照明函数，由电设计决定。 δ_i 是根据反射面计算点变位后相对于最佳吻合抛物面(BFP)的偏差来决定的，而使 ε 为极值的基准面是最佳吻合抛物面，具体推导请见[3]。天线反射面半光程差均方根值随仰角的变化而变化，因而可以选择观察最多的角度范围的中间位置，把反射面调到理想抛物面，预先计算出一个固有

偏差以提高反射面在结构变形影响下的精度。通过这样一些措施,就易于达到电性能的要求。

在考虑到BFP基准面后,就出现偏焦现象。若不采用自动调焦措施,纵偏会使得天线增益降低,方向图旁瓣电平升高,但最大辐射方向不变;横偏则增益损失较小,旁瓣电平升高较多,而且波束发生偏转,这是形成指向误差的一个重要原因。有关偏焦的计算,均是在有限元分析中得出的,因而计算模型要相当精确可靠。

另一个内容就是有关指向误差的分析,卡氏天线系统的指向误差主要是由主面变形与副面及馈源相位中心的位移等因素综合形成,总的指向误差为

$$\theta_{CFS} = \theta_C + \theta_H + \theta_{hr} + \theta_P \quad (6)$$

式中 θ_C 为馈源横偏引起的偏角; θ_H 与 θ_{hr} 分别为副面横偏与转动所引起的偏角; θ_P 为主面变形所引起的偏角。有些情况下,还要计及天线座的位移与倾斜及地基倾斜等,这又涉及到结构与地基的计算力学方法问题。

在大型天线结构设计时,必然要同时进行分析与综合,而且要反复实施才能满足电性能对于结构的要求。其中一个重要的优化计算,就是要使结构重量轻,并要在选定构型及结构重量下使得基频最大。由此可见这与计算力学的密切性。

一类比较理想的天线结构设计方法是“自适应动态构型设计法”,即使天线结构在各个仰角情况下,其反射面仍为抛物面或仍为抛物面与双曲面,其它变量如焦距等亦采用自适应的变动。这种设计概念,首先是S.von Hoerner提出的“保形设计”^[4],亦称“柔性设计”,其概念相当于反射面变形后与BFP面的偏差为零。不过,这只适用于荷载是自重,结构是由铰接杆组成,且以杆截面为变量的情况。用迭代法借助计算机自动优化,就可得到准确的保形解,使各点与BFP面的偏差的rms减至零。西德的Effelsberg处的100m口径射电望远镜是在1972年按保形理论设计建造的,其拓扑构型甚繁。

我们认为,像日本的45m口径、英国的15m口径及我国曾研制过的15m口径的高精度大型射电望远镜天线,在构型及分析设计方面均未按原来的“保形设计”处理,但仍然被认为是保形的设计或近于保形的设计。其原因之一,也许是重要的方面,是由于计算力学的发展及其与结构CAD的紧密结合,易于达到理想的分析与综合的目标。上述的一些天线结构,大都采用多类型的构件,包括杆、梁、膜、板与壳,反射体的中心圆筒具有很大的刚性,幅射结构还尽量考虑到轴对称性,反射体本身的支撑亦考虑到轴对称性。在分析与综合时,采用了最佳吻合及预调等方法,并在天线系统安置了自动调焦装置。这样也就达到了“自适应动态构型设计法”。当然,具体的做法各有特色。

最后,顺便说明一点,计算力学方法现今不仅已可应用于电场与磁场等场问题的数值计算,而且亦被引用于一些电子工程的设计中。我们将在另文讨论计算力学用于非结构设计的一些问题。

参 考 文 献

1. Ruze J., Antenna Tolerance Theory—A Review, Proc. IEEE, Vol. 54, No. 4, 633-640, April 1966.
2. 朱宗麟,大型天线结构的计算机辅助分析与设计,杭州电子工业学院学报,第1卷第2期,第53—78页,1981年。
3. 朱宗麟,高精度大型天线结构的实用分析方法,工程中数值方法学术会议论文,合肥工业大学学报,4(1983),141—146。
4. Von Hoerner S. Homologous Deformations of Tilttable Telescopes, Proc. ASCE, Journal of Structural Division, S3, 5(1967), 461—486.

扭转问题的断续附设边界单元解法

徐 汉 忠

(河海大学)

一、引 言

文献^[1]用直接边界元法按应力函数求解了任意横截面的等截面直杆在两端扭矩 M 作用下的问题,由于应力函数所满足的方程为泊松方程,所以该方法需处理两个域内积分:积分方程中的域内积分和求单位长度的扭转角的域内积分。也有的文献按扭转函数求解,此时虽然扭转函数所满足的方程为Laplace方程,但第二类边界条件的处理是麻烦的。本文建议按扭转函数的共轭函数求解,这样求解的方程为拉普拉斯方程,积分方程就不会出现域内积分项,同时,边界条件为第一类而最易于处理,求单位长度的扭转角的域内积分项也能转化为简单的边界线积分公式。

用边界元法求解扭转函数的共轭函数时,本文建议将虚源作用在一种特殊附设边界上,该附设边界单元和原边界单元互相平行,长度相等,在有的地方为断续的。这样做,避免了奇异积分,提高了精度,文中用有理论解的三角形截面杆的算例直观地说明了精度提高的程度。

本文仅讨论单连域的情况,因为复连域的处理方法在[1]中已有详细的讨论。

二、欲求问题

扭转函数的共轭函数 u 所要满足的基本方程和边界条件为

$$\begin{cases} \nabla^2 u(x, y) = 0 & (x, y) \in v \\ u(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) & (x, y) \in s \end{cases} \quad (1)$$

其中 v 为所研究的等截面直杆的横截面区域, s 为横截面的边界。

单位长度的扭转角 A 可表示为

$$A = \frac{M}{G \iint_V (x^2 + y^2 - x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y}) dv} \quad (2)$$

其中 M 为直杆两端所受的扭矩, G 为剪切模量。

剪应力 τ_{xz} , τ_{xy} 为

$$\begin{cases} \tau_{xz} = GA(\frac{\partial u}{\partial y} - y) \\ \tau_{xy} = GA(-\frac{\partial u}{\partial x} + x) \end{cases} \quad (3)$$

等截面直杆在两端受扭矩 M 作用下的问题,可归结为从(1)求解扭转函数的共轭函数 u ,然后由(2)求扭转角 A ,再由(3)计算剪应力。

由于求扭转角 A 的(2)中有面积分而需在域 V 内划分单元进行数值计算,这样用边界元法解此问题就显不出很多的优越性。为此,我们首先将(2)中的域 V 内的积分转化为边界 S 的线积分。

三、单位长度扭转角的边界线积分公式的获得

设单位长度扭转角的公式(2)中的域内积分用 I 表示,即

$$I = \iint_V (x^2 + y^2 - x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y}) dv \quad (4)$$

$$\text{令} \begin{cases} \nabla^2 I = x^2 + y^2 - x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} - u \\ \nabla^2 \varphi = 1 \end{cases} \quad (5)$$

则(4)式为

$$I = \iint_V (\nabla^2 T + u \nabla^2 \varphi) dv$$

利用奥高公式和格林第二恒等式并注意到 $\nabla^2 n = 0$,则上式成为

$$I = \int_S \left(\frac{\partial T}{\partial n} + u \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds \quad (6)$$

其中 n 为边界的外法线方向。

$$\text{从(5)解得} \begin{cases} T = \frac{1}{16} (x^2 + y^2)^2 - \frac{1}{4} (x^2 + y^2) u \\ \varphi = \frac{1}{4} (x^2 + y^2) \end{cases}$$

代入(6)后将(6)代入(2)得

$$A = \frac{M}{G \int_S \frac{1}{8} (x^2 + y^2) \frac{\partial}{\partial n} (x^2 + y^2 - 4u) ds} \quad (7)$$

上式为精确公式,该公式本身及推求过程都比文献^[1]简单得多。这样,求解扭转问题的基本公式由原来的(1)、(2)、(3)变成了(1)、(7)、(3)。

四、断续附设边界单元法及算例

我们将给出图1所示的等边三角形截面的直杆在两端扭矩 M 作用下的算例^[2]。三角形边长为 $2\sqrt{3}a$,杆的剪切弹性模量为 G 。

我们以该算例为例来说明本文方法的基本原理。将图1的实际系统嵌入到无限大平面区域中,如图2所示,图1的边界 S 在图2中的位置称为相应线,并仍用 S 表示,将 S 划分为 N 个单元,该例中 $N=9$,即每边三个单元。 S 上的每个单元都沿自己单元的外法线方向外推相同距离 d 而得到断续附设边界单元。设 S 上一个典型的单元用大写字母例如 J 表示,和 J

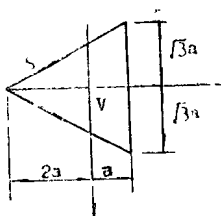


图1 三角形截面杆的扭转

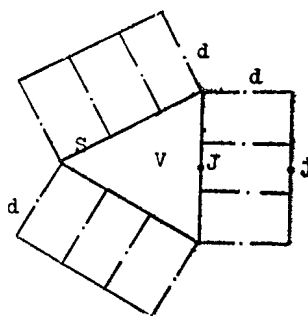


图2 计算模型

相对应的断续附设边界单元用小写字母 j 表示, 在附设边界单元上作用未知虚源, 这些虚源在单元上为常量, 但各单元各不相同, 对 j 单元该虚源用 W_j 表示。 N 个单元上 N 个未知虚源共同作用下任一点 P 的 u 为

$$u(P) = \sum_{j=1}^N W_j \int_{S_j} u^*(P, Q) ds(Q) \quad (8)$$

其中 S_j 为断续附设边界上 j 单元; $u^*(P, Q)$ 为无限域中在点 Q 作用单位集中源在点 P 引起的势, 它是拉普拉斯方程对应的基本解

$$u^*(P, Q) = -\frac{1}{2\pi} \ln r \quad (9)$$

其中 r 为点 P 和点 Q 两点之间的距离。式 (8) 中 N 个未知虚源 W_j 可通过使 $u(P)$ 在 S 上 N 个单元的中点满足边界单元建立方程来求解, 即让 (8) 中 P 取为 S 上 i 单元的中点 $P_i(x_i, y_i)$ 和应用式 (1) 中边界条件得:

$$\sum_{j=1}^N W_j \int_{S_j} u^*(P_i, Q) ds(Q) = \frac{1}{2} (x_i^2 + y_i^2) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (10)$$

$$\text{上式写成 } \sum_{j=1}^N A_{ij} W_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (11)$$

其中

$$\begin{cases} A_{ij} = \int_{S_j} u^*(P_i, Q) ds(Q) \\ b_i = \frac{1}{2} (x_i^2 + y_i^2) \end{cases} \quad (12)$$

将 (9) 代入 (12) 第一式可解析积分得 A_{ij} (略)。

由 (11) 可解得 $W_j (j = 1, 2, \dots, N)$, 代入 (8) 就得到解 u , u 代入 (7) 并采用和上面相同的边界剖分后用高斯求积公式求得单位长度扭转角 A (略)。

将本文所得图 1 问题的数值结果列于表 1 和表 2, 并与理论值和传统的奇异间接法结果比较。见表 1 和表 2。

表中 $d/a = 0$ 即为传统的虚源作用在原边界上的奇异间接法, 从表中可知, 本文方法中的从 $d/a = 1$ 到 $d/a = 15$ 时的数值解的精度都比奇异间接法高。

表1

 $y=0$ 上的无因次剪应力 $\frac{2\tau_{yz}}{GAa}$ 的比较

x/a	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0	
$d/a=0$		-1.4242	-1.0278	-0.7185	0.0000	1.2887	3.1651	趋 近 ↓
$d/a=1$	-2.3554	-1.3961	-1.0503	-0.7362	0.0000	1.2718	3.2064	
$d/a=5$	-0.3670	-0.8312	-1.0059	-0.7486	0.0000	1.2522	3.0203	
$d/a=10$	-0.0715	-0.7654	-1.0012	-0.7498	0.0000	1.2504	3.0037	
$d/a=15$	-0.0241	-0.7550	-1.0002	-0.7498	0.0003	1.2504	3.0014	
理论值	0.0000	-0.7500	-1.0000	-0.7500	0.0000	1.2500	3.0000	理论值

表2

单位长扭转角 $A = \frac{M}{6a^4 A^*}$ 中的 A^* 的比较

	理 论 值	$d/a=15$	$d/a=10$	$d/a=7$	$d/a=2$	$d/a=1$	$d/a=0$
A^*	3.12	3.14	3.15	3.16	3.37	3.57	3.80

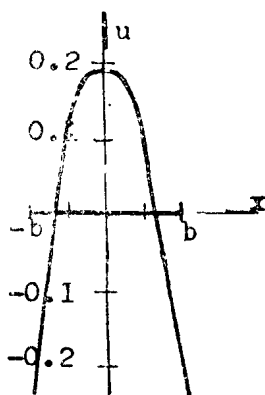
五、提高精度的原因

设 S 的 J 单元上作用未知虚源 W_J , 将坐标 xy 的原点取在 J 单元的中点, 且 x 坐标沿单元切向, J 单元半长为 d , 则 W_J 在本单元 J 上产生的势为

$$u(x, 0) = W_J \int_{-b}^b -\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \Big|_{y=\eta=0} d\xi$$

$$= -\frac{1}{2\pi} W_J \left[(x+b) \ln |x+b| - (x-b) \ln |x-b| - 2b \right] \quad (13)$$

由上式算得的 u 随 x 的变化绘于图 3 中 (取 $W_J=1, b=2$)。从图 3 可知, J 单元的虚源

图3 u 在本单元的变化

在本单元中点产生正值的 u , 但在单元端点产生负值的 u , 而一个单元的给定边界条件 u 不可能出现有正有负的情况, 在扭转问题中边界条件 $u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 永为正值, 在其它问题中即使边界上给定的 u 值有正有负, 但边界划分单元时, 总使一个单元上 u 为同号。因此奇异间接法在各单元中点满足了边界条件, 但在各单元端点数值解 u 将和给定的边界条件 u 相差较大而影响精度。当虚源作用在域外的附设边界上时, j 单元上的虚源在 S 的相应单元 J 上产生的势为同号且沿 J 单元的变化趋于平缓, 因而当各单元的中点满足边界条件后, 单元端点上满足的程度也比奇异间接法好且提高了精度。

理论上附设边界和原边界 S 的距离 d 可取为任何数值, 但若 d 取得太小, 则精度提高得不多, 若 d 取得过分大, 由于附设边界各单元到 S 上各单元距离趋于相等, 则又会使方程组的系数矩阵状态不好而影响精度。

六、结 语

(1) 本文得到了求单位长度扭转角的边界积分精确公式(7), 该公式本身和推导过程都比其它文献^[1]简单

(2) 用边界元法按扭转函数的共轭函数求解, 比按应力函数或扭转函数求解都方便。

(3) 采用断续附设边界间接法求解有以下优点。

(I) 不管附设边界和原边界的距离 d 多大, 相应单元总互相平行, 长度相等。附设边界坐标极易计算得, 因此它是一种最简单的附设边界。

(II) 避免了奇异积分。

(III) 本文方法可计算单元上任一点的 u 值, 克服了奇异间接法难于求单元端点的 u 和 u 的导数值的缺点。

(IV) 提高了计算精度。

参 考 文 献

1. Danson D. J., Kuich G, Using Beasy to Solve Torsion Problems, Boundary Elements, Proceedings of the Fifth International Conference, Nov 1983, 821-834 Editors: C. A. Brebbia, T. Futagami, M. Tanaka, Springer-Verlag.
2. 王龙甫编, 弹性理论, 第二版, 第十章, 科学出版社。