大学数学立体化教材

高等数学

（理工类） 下册

吴赣昌 主编

中国人民大学出版社

大学数学立体化教材

高等数学

（理工类） 下册

吴赣昌　主编

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．理工类/吴赣昌主编．
北京：中国人民大学出版社，2006
大学数学立体化教材
ISBN 7-300-07128-7

Ⅰ．高…
Ⅱ．吴…
Ⅲ．高等数学-高等学校-教材
Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 016175 号

大学数学立体化教材
高等数学（理工类）
吴赣昌　主编

出版发行	中国人民大学出版社		
社　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　话	010－62511242（总编室）		010－62511239（出版部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　址	http://www.crup.com.cn http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　销	新华书店		
印　刷	北京东君印刷有限公司		
开　本	720×965 毫米 1/16	**版　次**	2006 年 4 月第 1 版
印　张	50.5 插页 2	**印　次**	2006 年 4 月第 1 次印刷
字　数	926 000	**定　价**	72.00 元（上、下册，含光盘）

总　序

1999 年的暑假，经过近半年的调研和思考之后，笔者义无反顾地选择了“大学数学教育信息化研究”作为自己的一个中期研究目标，促使笔者作出这样的选择主要基于以下几点：

1. 教育信息化是 21 世纪教育改革和发展的大方向. 借助信息技术提高教与学的效率和效果、培养学生的实践能力和创新能力是教育追求的目标.

2. 20 世纪 90 年代以来，我国高等教育迅速从“精英型教育”向“大众化教育”转化，教育规模的迅速扩大，给我国大学教育带来了一系列的问题，例如，现阶段大学数学的教育正面临生源录取分数下降、教学课时减少、教学内容增加、对数学实践能力的培养要求提高等一系列似乎矛盾的问题.

3. 大学应以教学为中心，但长期以来，教学研究没有得到应有的重视，天女散花式的教研投入，造成国内高校在同一水平上的大量重复建设和浪费，而重点研究项目的投入又严重不足，难以为继.

4. 与其他学科的教育信息化研究相比，大学数学教育信息化的研究进展缓慢. 随着大众化教育阶段的到来，过去所谓“经典”的教材已渐渐不能适应教育改革和发展的需要.

由针对上述问题的分析可见，如何将教育技术与信息技术相结合，针对所面临的问题建设一系列“新型教材”就有其非常的紧迫性. 在笔者的设想中，这种“新型教材”就是“教学资源库式的立体化教材”. 它至少要包含以下两个方面：一是教学资源的多元化、教学方式的现代化、教学知识的立体化；二是教、学、考多层次、全方位的建设. 此类“新型教材”的使用应在提高教学效率、增强教学效果、加大教学信息量、培养学生的数学应用与实践能力，利于学生的课后学习辅导和优秀学生的提高训练与考研训练，以及全方位提升学生的综合素质和创新能力等方面起到积极的作用. 基于这一设想和预期，笔者组织和带领一个团队，开始了大学数学立体化教材的研发工作.

大学数学立体化教材的研发工作迄今已历时 6 年，期间历经多次升级改版，从 2001 年起，先后被全国 200 多所高等院校采用或试用，形成了现在全新的“教学资源库式”的立体化教材——中国人民大学出版社推出的“大学数学立体化教材”，它包含两大类，共六册. 理工类：《高等数学》，《线性代数》与《概率论与数理统计》；经济类：《微积分》，《线性代数》与《概率论与数理统计》. 下面，笔者以其中

的一套来简单介绍该立体化教材的形式与内涵.

立体化教材的形式：

1.《 * * * * 》(书)

2.《 * * * * 多媒体学习系统》(光盘,学生专用)

与上述立体化教材配套建设的还有

3.《 * * * * 多媒体教学系统》(光盘,教师专用)

(将随教材免费配送给教材采用单位的教师使用.)

《 * * * * 》(书)的编写具有下列特点：

● 书中融入了数学历史与数学文化的教育.

● 在重要概念引入之前,深刻、简明地阐述了其产生的背景及应用的总体思想.

● 以评注方式对定理、概念、公式的理解、应用给出了进一步的总结.

● 依循序渐进的原则,以适当的难度梯度选编了教学例题.

● 与教材同步配套,简明实用地编写了"大学数学实验指导".该实验指导在按教学内容设计了相应的基础实验的基础上,还选择部分数学建模案例设计了部分综合实验.

《 * * * * 多媒体学习系统》是一套大型的集成性、交互式和教学资源立体化的学习软件,其中设计了多媒体教案、习题详解、数学实验、题型分析、考研真题剖析等功能模块,内容包含从课程学习到考研提高的全部内容.具体来说,其特点如下：

● 多媒体教案：按动态仿真教学方式设计了大量的教学动画,直击数学思想本质.

● 习题详解：以动态解析方式给出了习题的求解过程,并逐题配备了相关知识点链接.

● 数学实验：以交互、集成方式,设计了数学实验教学演示系统和实验案例库.

● 题型分析：总结解题思路,并通过精选的例题揭示出解题的一般规律和技巧.

● 考研真题：收录历届数学考研真题,并逐题作了深入剖析.

《 * * * * 多媒体教学系统》(光盘),除包含了《 * * * * 多媒体学习系统》的主要功能模块和特点之外,它还具有以下特点：

● 多媒体教案：教学过程设计更适合教师进行课堂教学,补充了类型丰富的教学例题供教师选用,增加了课堂练习环节.

● 教学备课系统：搜集并整理了大量的教学资源和备课元素,供教师修改选

用，便于充分展现各位老师的个性化授课特点.

● 鼠标笔、文件放大以及知识点层叠交互功能，使教师在采用多媒体教学的同时，可以很好地保持传统教学的优势.

● 数学实验案例库与数学实验演示系统结合，可供教师现场与 Mathematica 系统交互进行实验演示.

同步建设的《大学数学试题库系统》包含高等数学、线性代数、概率论与数理统计三大模块，试题量 20 000 余道，具有以下特点：

● 试题类型丰富：含选择题、填空题、计算题、证明题、综合应用题等.

● 组卷功能强大：教师只需根据考试要求直接选择考点和题型，通过智能组卷按钮，几秒钟内即可生成试卷和相应的答卷，通过预览，对不满意的试题，可通过人工调整按钮，方便地对该试卷中的试题进行增删与替换.

● 大容量试卷库：试卷库可存放 3 300 余套各类试卷，库内存有数百套各类全真试卷，供用户参考；用户可将自组试卷或交流试卷存人该试卷库内. 试卷库管理功能使用户能方便地实现对库内的试卷进行调用、修改及增删.

● 二次开发功能：用户可对系统进行试题的增删与替换，试卷库的存储管理，试题的分类标识加注以及试题难度的重新区分等.

立体化教材的建设是一项崭新的事业. 令笔者欣慰的是，与当初启动这个项目的时候相比，大面积采用立体化教材和多媒体教学的软硬件环境（从教育部的文件精神到大学的多媒体教室建设）和软硬件技术（从软件开发平台到计算机相关硬件技术）都已经成熟了. 当初许多专家认为多媒体教学无法发挥教师的教学个性化问题也因鼠标笔和手写屏系统的问世而迎刃而解了.

作为一项长期的事业，笔者今后将长期致力于大学数学立体化教材的建设工作，不断跟踪教育技术和信息化技术的发展，并及时应用到有关课程的教材建设之中，逐年提升、精益求精. 同时，笔者还将通过中国人民大学出版社的网站（在主页中点击“大学数学”按钮进人“大学数学立体化教材服务网站”，或直接输人网址 http://www.math123.cn 进人该服务网站）提供各种相关教学服务，包括：各类最新建设或升级的立体化教材的介绍、各类系统软件的演示等，尤其是还会提供丰富的下载内容，如各类系统软件的最新演示版本，有关各门课程的备课系统与数学实验案例库的最新升级版本、教学大纲、教学日历等.

6 年以来，尤其是 2002 年 9 月第一个《高等数学多媒体教学系统》（理工类）出版以来，笔者的工作得到了许多国内同行的长期支持和鼓励，在此特别表示感谢.

吴赣昌

2006 年 3 月 1 日

目　录

第8章　多元函数微分学

在第1章至第6章中，我们讨论的函数都只有一个自变量，这种函数称为一元函数．但在许多实际问题中，我们往往要考虑多个变量之间的关系，反映到数学上，就是要考虑一个变量（因变量）与另外多个变量（自变量）的相互依赖关系．由此引入了多元函数以及多元函数的微积分问题．本章将在一元函数微分学的基础上，进一步讨论多元函数的微分学．讨论中将以二元函数为主要对象，这不仅因为有关的概念和方法大多有比较直观的解释，便于理解，而且这些概念和方法大多能自然推广到二元以上的多元函数．

§8.1　多元函数的基本概念

一、平面区域的概念

与数轴上邻域的概念类似，我们引入平面上点的邻域概念．

设$P(x_0, y_0)$为直角坐标平面上一点，δ为一正数，称点集

$$\{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$

为点P的δ**邻域**，记为$U_\delta(P)$，或简称为邻域，记为$U(P)$．

根据这一定义，点P的δ邻域实际上是以点P为圆心、δ为半径的圆的内部（见图8-1-1）．

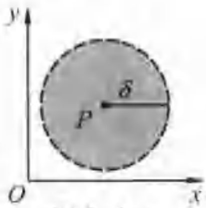

图 8-1-1

下面我们利用邻域来描述平面上点和点集之间的关系．

设E是平面上的一个点集，P是平面上的一个点．则点P与点集E之间必存在以下三种关系之一：

(1) 如果存在点P的某一邻域$U(P)$，使得$U(P)\subset E$，则称P为E的**内点**（见图8-1-2中的点P_1）．

(2) 如果存在点P的某个邻域$U(P)$，使得$U(P)\cap E=\varnothing$，则称点P为E的**外点**（见图8-1-2中的点P_2）．

(3) 如果点P的任意一个邻域内既有属于E的点也有不属于E的点，则称点P为E的**边界点**（见图8-1-2中的P_3）．

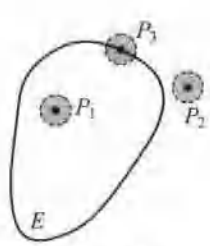

图 8-1-2

点集E的边界点的全体称为E的**边界**．

根据上述定义可知，点集 E 的内点必属于 E，而 E 的边界点则可能属于 E 也可能不属于 E.

如果按点 P 的邻近是否有无穷多个点来分类，则有

(1) 如果对于任意给定的 $\delta>0$，点 P 的去心邻域 $\mathring{U}_{\delta}(P)$ 内总有点集 E 中的点，则称 P 是 E 的**聚点**；

(2) 设点 $P\in E$，如果存在点 P 的某个邻域 $U(P)$，使得

$$U(P)\cap E=\varnothing,$$

则称点 P 为 E 的**孤立点**.

根据点集所属点的特征，可进一步定义一些重要的平面点集.

(1) 如果点集 E 内任意一点均为 E 的内点，则称 E 为**开集**.

(2) 如果点集 E 的余集 $\overline{E}$ 为开集，则称 E 为**闭集**.

(3) 如果点集 E 内的任何两点，都可用折线连结起来，且该折线上的点都属于 E，则称 E 为**连通集**（见图 8-1-3）.

图 8-1-3

(4) 连通的开集称为**区域**或**开区域**.

(5) 开区域连同它的边界一起称为**闭区域**.

(6) 对于点集 E，如果存在某一正数 K，使得 $E\subset U_K(O)$，则称 E 为**有界集**，其中 O 为坐标原点.

(7) 一个点集如果不是有界集，就称它为**无界集**.

例如，点集 $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$ 是一区域，并且是一有界区域（见图 8-1-4）.

点集 $\{(x,y)\mid 1\le x^2+y^2\le 4\}$ 是一闭区域，并且是一有界闭区域（见图 8-1-5），而点集 $\{(x,y)\mid x+y>0\}$ 是一无界区域（见图 8-1-6）.

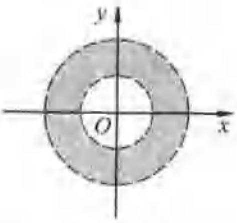

图 8-1-4

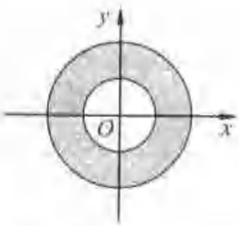

图 8-1-5

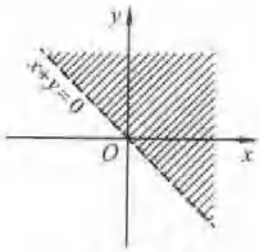

图 8-1-6

二、n 维空间的概念

我们知道，数轴上的点与实数一一对应，实数的全体记为 $\mathbf{R}$；平面上的点与有序数组 (x,y) 一一对应，有序数组 (x,y) 的全体记为 $\mathbf{R}^2$；空间中的点与有序数组 (x,y,z) 一一对应，有序数组 (x,y,z) 的全体记为 $\mathbf{R}^3$. 这样，$\mathbf{R}$，$\mathbf{R}^2$ 和 $\mathbf{R}^3$ 就分别对应于数轴、平面和空间.

一般地，设 n 为取定的一个自然数，我们称 n 元有序实数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的全体为 n **维空间**，记为 $\mathbf{R}^n$，而每个 n 元有序数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为 **n 维空间的点**，$\mathbf{R}^n$ 中的点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 有时也用单个字母 $\boldsymbol{x}$ 来表示，即 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，数 x_i 称为点 x 的第 i 个坐标．当所有的 $x_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 都为零时，这个点称为 $\mathbf{R}^n$ 的**坐标原点**，记为 O.

n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中两点 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $Q(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 之间的距离，规定为

$$|PQ|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

显然，$n=1,2,3$ 时，上述规定与数轴上、平面直角坐标系及空间直角坐标系中两点间的距离的定义是一致的．

前面就平面点集所叙述的一系列概念，可推广到 $\mathbf{R}^n$ 中去．

例如，设点 $P_0\in\mathbf{R}^n$，δ 是某一正数，则 n 维空间内的点集

$$U(P_0,\delta)=\{P\,|\,|PP_0|<\delta,\ P\in\mathbf{R}^n\}$$

就称为 $\mathbf{R}^n$ 中点 P 的 **δ 邻域**．以邻域为基础，可以进一步定义点集的内点、外点、边界点和聚点，以及开集、闭集、区域等一系列概念．这里不再赘述．

三、多元函数的概念

定义1 设 D 是平面上的一个非空点集，如果对于 D 内的任一点 (x, y)，按照某种法则 f，都有唯一确定的实数 z 与之对应，则称 f 是 D 上的二元函数，它在 (x, y) 处的函数值记为 $f(x, y)$，即 $z=f(x, y)$，其中 x, y 称为**自变量**，z 称为**因变量**．点集 D 称为该函数的**定义域**，数集 $\{z\,|\,z=f(x, y),\ (x, y)\in D\}$ 称为该函数的**值域**．

*注：关于二元函数的定义域，我们仍做如下约定：如果一个用算式表示的函数没有明确指出定义域，则该函数的定义域理解为使算式有意义的所有点 (x, y) 所成的集合，并称其为*__自然定义域__．

类似地，可定义三元及三元以上函数．当 $n\geq 2$ 时，n 元函数统称为**多元函数**．

例1 求二元函数

$$f(x, y)=\frac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$$

的定义域．

解 要使表达式有意义，必须

$$\begin{cases}|3-x^2-y^2|\leq 1\\ x-y^2>0\end{cases},$$

即
$$\begin{cases}2\leq x^2+y^2\leq 4\\ x>y^2\end{cases}$$

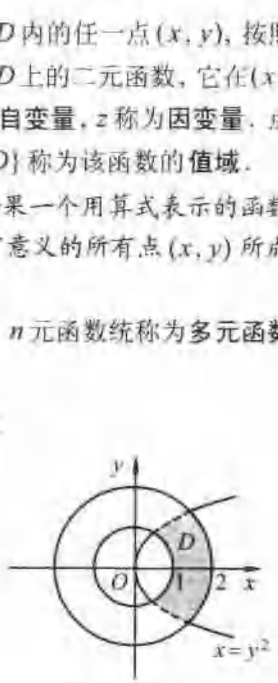

图 8-1-7

故所求定义域（见图8-1-7）

$$D=\{(x,y)\mid 2\le x^2+y^2\le 4,\ x>y^2\}.$$

例 2　已知函数 $f(x+y,x-y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$，求 $f(x,y)$.

解　设 $u=x+y$，$v=x-y$，则

$$x=\frac{u+v}{2},\quad y=\frac{u-v}{2},$$

所以

$$f(u,v)=\frac{\left(\dfrac{u+v}{2}\right)^2-\left(\dfrac{u-v}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{u+v}{2}\right)^2+\left(\dfrac{u-v}{2}\right)^2}=\frac{2uv}{u^2+v^2}.$$

即有

$$f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

二元函数的几何意义

设 $z=f(x,y)$ 是定义在区域 D 上的一个二元函数，点集

$$S=\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

称为二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形．易见，属于 S 的点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 满足三元方程

$$F(x,y,z)=z-f(x,y)=0,$$

故二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形就是空间中区域 D 上的一张曲面(见图 8-1-8)，定义域 D 就是该曲面在 xOy 面上的投影．

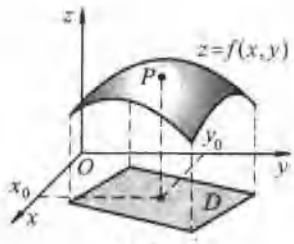

图 8-1-8

例如，二元函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 表示以原点为中心、半径为 1 的上半球面(见图 8-1-9)，它的定义域 D 是 xOy 面上以原点为中心的单位圆．

又如，二元函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 表示顶点在原点的圆锥面(见图 8-1-10)，它的定义域 D 是整个 xOy 面．

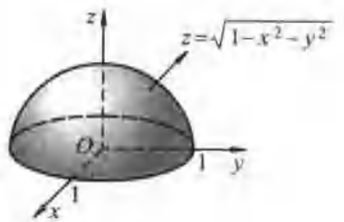

图 8-1-9

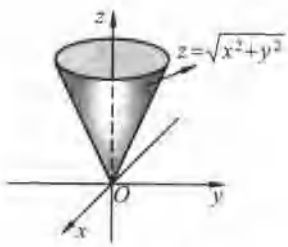

图 8-1-10

四、二元函数的极限

与一元函数极限概念类似，二元函数的极限也是反映函数值随自变量变化而变

化的趋势.

定义2 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一去心邻域内有定义，如果对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得当

$$0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

时，恒有

$$|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

则称常数 A 为函数 $z=f(x,y)$ 当 $P(x,y)$ 趋于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时的极限. 记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \text{ 或 } f(x,y)\to A\ ((x,y)\to(x_0,y_0))$$

也记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \text{ 或 } f(P)\to A\ (P\to P_0)$$

二元函数的极限与一元函数的极限具有相同的性质和运算法则，在此不再详述. 为了区别于一元函数的极限，我们称二元函数的极限为**二重极限**.

值得注意的是，在定义2中，动点 P 趋向点 P_0 的方式是任意的(见图8–1–11). 即若 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$，则无论动点 P 以何种方式趋于点 P_0 都有 $f(P)\to A$. 这个命题的逆否命题常常用来证明一个二元函数的二重极限不存在.

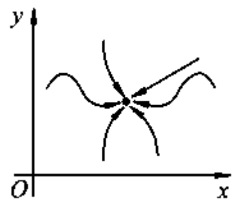

图 8–1–11

例3 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

解 令 $u=x^2+y^2$，则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=\lim_{u\to 0}u\sin\frac{1}{u}=0.$$

例4 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$.

解 因为当 $xy\neq 0$ 时，有

$$0\le\left|\frac{x+y}{x^2+y^2}\right|\le\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\le\frac{|x|+|y|}{2|xy|}=\frac{1}{2|y|}+\frac{1}{2|x|}\to 0\ (x\to\infty,\ y\to\infty),$$

所以

$$\lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\frac{x+y}{x^2+y^2}=0.$$

例5 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{xy}$.

解 因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{xy}=e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}xy\ln(x^2+y^2)}$，而

$$|xy\ln(x^2+y^2)|=\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\cdot(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)\right|\le|(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)|.$$

由 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)\overset{t=x^2+y^2}{=\!=\!=}\lim\limits_{t\to0^+}t\ln t=0$, 得

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}xy\ln(x^2+y^2)=0,$$

所以
$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)^{xy}=e^0=1.$$

例6 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

证明 取 $y=kx$ (k 为常数), 则

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to0\\y=kx}}\frac{x\cdot kx}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

易见题设极限的值随 k 的变化而变化, 故题设极限不存在.

五、二元函数的连续性

定义3 设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义, 如果

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处**连续**. 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处不连续, 则称函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处间断.

例如, 从例6知道, 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在, 所以, 无论怎样定义函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 点处的值, $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处都不连续, 即在 $(0,0)$ 点处间断.

例7 讨论二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处的连续性.

解 由 $f(x,y)$ 表达式的特征, 利用极坐标变换.

令 $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, 则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{\rho\to0}\rho(\sin^3\theta+\cos^3\theta)=0=f(0,0),$$

所以函数在 $(0,0)$ 点处连续.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点都连续, 则称该函数在**区域 D 内连续**. 在区域 D 上连续的二元函数的图形是区域 D 上一张连续曲面.

与一元函数类似，二元连续函数经过四则运算和复合运算后仍为二元连续函数.由 x 和 y 的基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算所构成的一个可用式子表示的二元函数称为**二元初等函数**．一切二元初等函数在其定义区域内是连续的．这里所说的定义区域是指包含在定义域内的区域或闭区域.利用这个结论，当求某个二元初等函数在其定义区域内一点的极限时，只要计算出函数在该点的函数值即可.

例8 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\left[\ln(y-x)+\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right]$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\left[\ln(y-x)+\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right]=\left[\ln(1-0)+\dfrac{1}{\sqrt{1-0^2}}\right]=1.$

特别地，在有界闭区域 D 上连续的二元函数也有类似于一元连续函数在闭区间上所满足的定理．下面我们列出这些定理，但不做证明.

定理1(最大值和最小值定理) 在有界闭区域 D 上的二元连续函数，在 D 上至少取得它的最大值和最小值各一次.

定理2(有界性定理) 在有界闭区域 D 上的二元连续函数在 D 上一定有界.

定理3(介值定理) 在有界闭区域 D 上的二元连续函数，若在 D 上取得两个不同的函数值，则它在 D 上必取得介于这两值之间的任何值至少一次.

习题 8-1

1. 判定下列平面点集中哪些是开集、闭集、区域、有界集、无界集？并分别指出它们的聚点所成的点集（称为导集）和边界.

(1) $\{(x,y)\mid x\neq 0, y\neq 0\}$;　　(2) $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leq 4\}$;

(3) $\{(x,y)\mid y>x^2\}$;

(4) $\{(x,y)\mid x^2+(y-1)^2\geq 1\}\cap\{(x,y)\mid x^2+(y-2)^2\leq 4\}$.

2. 设 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\dfrac{x}{y}$，求 $f(tx,ty)$.

3. 设 $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$，求 $f\left(1,\dfrac{y}{x}\right)$.

4. 设 $z=x+y+f(x-y)$，且当 $y=0$ 时，$z=x^2$，求 $f(x)$.

5. 试证函数 $F(x,y)=\ln x\cdot\ln y$ 满足关系式 $F(xy,uv)=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v)$.

6. 已知函数 $f(u,v,w)=u^w+w^{u+v}$，试求 $f(x+y,x-y,xy)$.

7. 求下列各函数的定义域：

(1) $z=\ln(y^2-2x+1)$;　　(2) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$;

(3) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$;　　(4) $z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$;

(5) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}\ (R>r>0)$;

(6) $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

8. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$;　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$;　　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{y}$;

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$;　　(6) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$;

(7) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$;　　(8) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$;

(9) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$;　　(10) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$;

(11) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$.

9. 证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y}{x-y}$;　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$;　　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$.

10. 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

11. 设函数 $f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$，讨论函数在点 $(0,0)$ 的二次极限与二重极限.

12. 研究下列函数的连续性：

(1) $f(x,y)=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$;　　(2) $f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$.

13. 设 $F(x,y)=f(x)$，$f(x)$ 在 x_0 处连续，证明：对任意 $y_0\in\mathbf{R}$，$F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

14. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{ye^{\frac{1}{x^2}}}{y^2e^{\frac{2}{x^2}}+1}, & x\neq 0,\ y\text{ 任意}\\ 0, & x=0,\ y\text{ 任意}\end{cases}$，讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处是否连续？