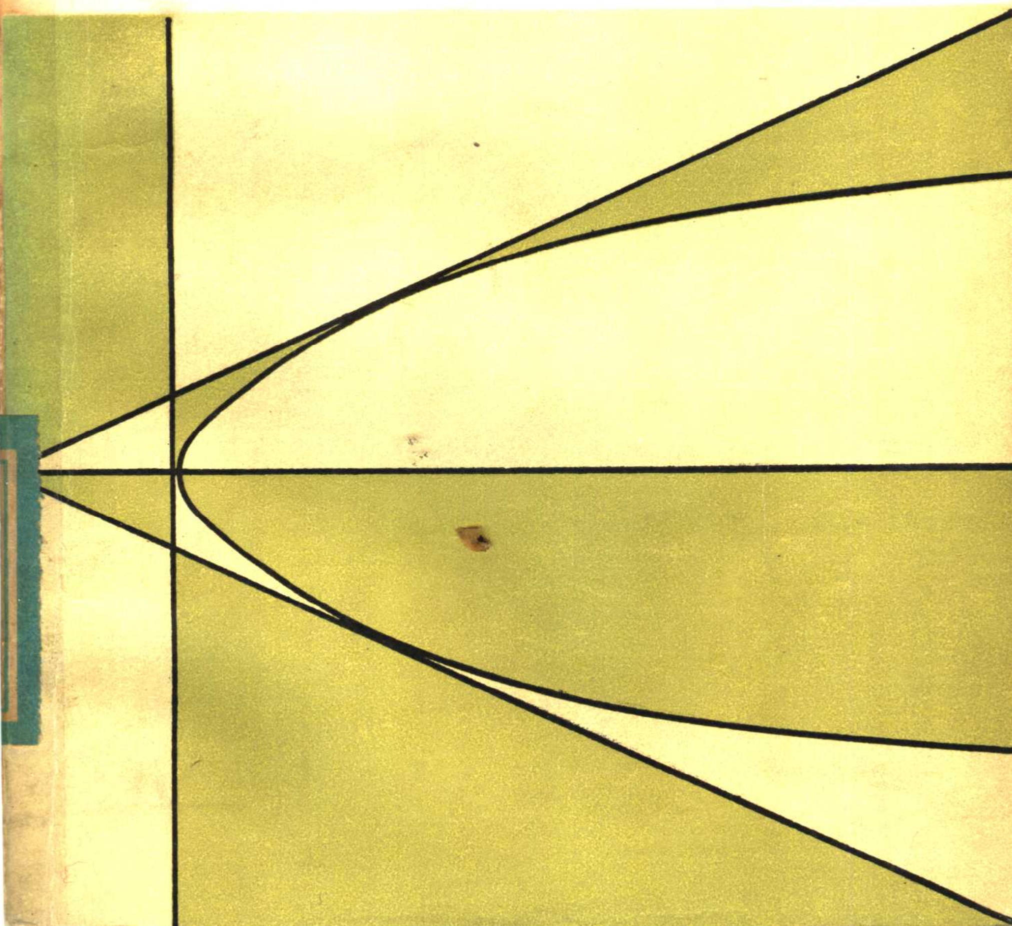
初中教师进修用书

高等代数

汪经武
张孟贤
张振环



初中教师进修用书

高等代数

汪经武　　张孟贤　　张振环

安徽教育出版社

封面设计　妙　夫
责任编辑　蒋美荣

初中教师进修用书
高 等 代 数
汪经武　张孟贤　张振环

出　版：安徽教育出版社
发　行：安徽省新华书店
印　刷：安徽新华印刷厂
787×1092毫米　24印张　530千字
1983年12月第一版　1983年12月第一次印刷
印数：1—30,000

书号：7276·109　　定价：2.05元

出 版 说 明

《初中教师进修用书》是为了适应培训教师的需要，由华东地区上海、山东、江苏、安徽、浙江、江西、福建等六省一市八家出版社协作组织编写出版的。目的是供在职初中教师业余进修，帮助他们系统地学习和掌握有关专业的基础理论、基本知识和基本技能，提高文化水平和教学能力，以便在一定时间内通过考核达到两年制高等师范专科毕业的水平。

这套用书，目前先出语文、数学两个学科，共十九种，以后将逐步扩大到其他学科。编写当中，在坚持四项基本原则，坚持思想性和科学性相统一的前提下，注意了以下几个方面：

一、根据教育部制订的高等师范专科学校教学大纲的要求，确定各册内容的深度和广度，既体现各学科知识的系统性，又力求做到简明、精练，避免繁琐。

二、以提高教师科学文化水平为主，适当联系中学教材和教学实际，把提高知识水平和提高教学能力有机地结合起来，达到学以致用的目的。

三、从初中教师的实际水平出发，循序渐进，逐步提高要求；重视讲清学习中的难点和疑点，文字力求浅显易懂；并根据自学或函授的需要，配置必要的提示、注释、思考题和提供参考书目等学习辅助材料。

协作编写教师进修用书，尚属初次尝试。我们将在实践过程中广泛听取读者的意见和建议，努力提高书籍质量，使它更好地适合教师自学进修的需要。

目　录

第一章　多项式

多项式是代数学中最基本的对象，也是中学代数的主要内容之一，无论是在进一步学习数学或科学技术以及在生产实践中，都经常要遇到它。

例如我国 1980 年工农业总产值为 7159 亿元，按第六个五年计划中规定，到 1985 年底五年工农业总产值要达到 40341 亿元，问平均每年至少递增百分之几？

设平均每年递增率为 y，则第六个五年计划期间各年工农业总产值依次是：$7159(1+y)$，$7159(1+y)^2$，$7159(1+y)^3$，$7159(1+y)^4$，$7159(1+y)^5$，依题意，得

$$7159\left[(1+y)+(1+y)^2+(1+y)^3+(1+y)^4+(1+y)^5\right]=40341$$

若令　$1+y=x$，则得

$$x^5+x^4+x^3+x^2+x-5.63=0$$

上面等式的左端是关于一个文字 x 的多项式。

多项式的重要性，还在于它是最基本的函数，比较复杂的函数，往往用多项式逼近。如工业、技术部门常常要研究一些曲线或曲面，在技术要求的精确度范围内，常常用一次或二次（或更高次）代数曲线或曲面近似地代替它。而一般的二次曲线与二次曲面的方程分别为

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

与

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+gyz+fx+hy+kz+t=0,$$

上面两等式的左端分别是两个文字与三个文字的多项式。

这一章将在复习中学代数里多项式内容的基础上，对多项式的理论及其应用进行比较系统的讨论。

§1　多项式的定义

一、多项式的定义和运算

在多项式的讨论中，我们总是以一个预先给定的数域P作为讨论的范围，用文字x代表一个暂时脱离具体物质运动中变量的具体含义的记号(或称为元)。

定义1·1·1　设x是一个文字，形式表达式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{1}$$

叫做系数属于数域P的一个文字x的多项式(简称数域P上一元多项式)。其中n为非负整数，$a_i \in P(i=0,1,\cdots,n)$。

在多项式(1)中，$a_n x^n$，$a_{n-1}x^{n-1}$，$\cdots$，$a_1 x$，a_0称为项，而$a_i x^i$称为i次项，i称为该项的次数，a_i称为i次项的系数。特别地，a_1称为一次项的系数(把x看作x^1)，a_0称为零次项的系数或常数项(把a_0看作$a_0 x^0$)。系数为1时可略去不写，如$1\cdot x^i$记为x^i。

当$a_n \neq 0$时，$a_n x^n$叫做多项式(1)的首项，非负整数n叫做多项式(1)的次数，并称(1)为一元n次多项式。

当$a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = 0$，而$a_0 \neq 0$时，(1)式叫做零次多项式。

当$a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0 = 0$时，(1)式叫做零多项式，零多项式用0表示，它是唯一不定义次数的多项式。

由此可见，零次多项式就是数域P中不为零的数。零多项式就是数域P中的数零。

在以后的讨论中，除特殊声明外，多项式指的是任一确定数域P上的多项式。一个文字x的多项式，常用$f(x)$，$g(x)$，…表示。多项式$f(x)$的次数简记为$D(f)$。

如果c是数域P中任意取定的一个数，则$a_n c^n+a_{n-1}c^{n-1}+\cdots+a_0$是$P$中唯一确定的一个数，这个数叫做当$x=c$时，多项式$f(x)$的值，记为$f(c)$，即

$$f(c)=a_n c^n+a_{n-1}c^{n-1}+\cdots+a_0。$$

注意1 中学代数里把多项式看作单项式的代数和，因而有单项式与多项式的区分，这里把单项式也叫做多项式，特别地，数域P中的数也叫做P上的多项式。

注意2 有的代数书中把多项式看作x的函数，即把x看作变数。这里把多项式看作一个文字x的形式表达式，文字的含义比变数广泛得多，它可以理解为变数，也可以理解为别的东西。例如x可以是数域P上的n阶方阵，也可以是数域P上n维向量空间V内的线性变换等等。以后我们将会看到，把多项式看作文字x的形式表达式与把多项式看作变数x的函数是一致的。

定义1·1·2 如果多项式$f(x)$与$g(x)$含有完全相同的项，或者只差一些系数为零的项，则称$f(x)$与$g(x)$相等，记为$f(x)=g(x)$。

根据这个定义，一个多项式可以添加或去掉系数为零的项。例如

$$\begin{aligned}f(x)&=1+0\cdot x+5x^2+0\cdot x^3=1+0\cdot x+5x^2\\&=1+5x^2=1+5x^2+0\cdot x^4\end{aligned}$$

等等，因为$5\neq0$，从而$f(x)$的次数是2，而不是3或4。

定义1·1·3 设

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

$$g(x)=b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0,$$

是数域P上的两个多项式，且$m\leqslant n$。多项式$f(x)$与$g(x)$的和$f(x)+g(x)$及乘积$f(x)\cdot g(x)$分别是指P上的多项式

$$\begin{aligned}&f(x)+g(x)\\&=(a_n+b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)\end{aligned}$$

（当$m<n$时，取$b_n=\cdots=b_{m+1}=0$）。

$$\begin{aligned}&f(x)\cdot g(x)=a_mb_nx^{n+m}+\\&+(a_nb_{m-1}+a_{n-1}b_m)x^{n+m-1}+\cdots+(a_1b_0+a_0b_1)x+a_0b_0\end{aligned}$$

（此处，i次项的系数是$a_ib_0+a_{i-1}b_1+\cdots+a_0b_i$，$i=0,1,\cdots,n+m$，当$i>n$时，取$a_i=0$，当$i>m$时，取$b_i=0$）。

将$g(x)$中每一项系数反号后所得到的多项式记为$-g(x)$。多项式$f(x)$与$-g(x)$的和$f(x)+[-g(x)]$叫做$f(x)$与$g(x)$的差，并记作

$$f(x)-g(x)=f(x)+[-g(x)]。$$

由定义1·1·3可推出，多项式加法与乘法满足下列运算律：

1）加法交换律：

$$f(x)+g(x)=g(x)+f(x);$$

2）加法结合律：

$$(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x));$$

3）乘法交换律：

$$f(x)g(x)=g(x)f(x),$$

4）乘法结合律：

$$(f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x));$$

5）乘法对加法的分配律：

$$f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x)。$$

这些运算律的成立不能认为是显然的，它们可由多项式

的加法和乘法的定义加以验证，这里不再赘述。

由于多项式的加法满足交换律与结合律，从而任意 k 个多项式的和 $f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_k(x)$ 有意义，并且次序可任意变动。例如

$$f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)=f_3(x)+f_2(x)+f_1(x)$$
$$=f_2(x)+f_1(x)+f_3(x)=f_1(x)+f_3(x)+f_2(x)$$

等等。这样，我们有

命题1·1 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$，那么

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n。$$

证明 $f(x)=f_n(x)+f_{n-1}(x)+\cdots+f_0(x)$，其中 $f_i(x)=a_ix^i(i=0,1,\cdots,n)$。由于加法满足交换律，从而

$$f(x)=f_0(x)+f_1(x)+\cdots+f_n(x)$$
$$=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \tag{1'}$$

$(1)'$ 叫做多项式 $f(x)$ 的升幂排列，而(1)则叫做 $f(x)$ 的降幂排列。

关于多项式的次数有下面定理：

定理1·1·1 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是数域 P 上的两个非零多项式。则

(i) 或者 $f(x)+g(x)=0$，或者 $f(x)+g(x)$ 的次数不超过 $f(x)$ 与 $g(x)$ 中次数较高者，即

$$D(f+g)\leqslant\max(D(f),\ D(g));$$

(ii) $f(x)g(x)$ 的次数等于两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的次数的和，即 $D(fg)=D(f)+D(g)$。

证明 设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \qquad a_n\neq0,$$
$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0 \quad b_m\neq0,$$

并且 $D(f)=n\geqslant D(g)=m$。

(i) 如果$n=m$，那么

$$f(x)+g(x)=(a_n+b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+\cdots$$
$$+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)$$

当$a_i+b_i=0$ $(i=0,1,\cdots,n)$时，$f(x)+g(x)$是零多项式。当a_n+b_n，$a_{n-1}+b_{n-1}$，$\cdots$，a_0+b_0不全为零，设其中第一个不为零的是$a_{n-k}+b_{n-k}$，那末$f(x)+g(x)$的次数等于$n-k\leqslant n$，即$D(f+g)=n-k\leqslant D(f)$；

如果$n>m$，那末

$$f(x)+g(x)=(a_n+b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+\cdots+(a_0+b_0),$$

其中$b_n=\cdots=b_{m+1}=0$，

因为$a_n+b_n\neq 0$，这时$f(x)+g(x)$的次数等于n，即

$$D(f+g)=D(f);$$

综合上述，当$f(x)+g(x)\neq 0$时，

$$D(f+g)\leqslant\max(D(f),D(g))。$$

(ii) $$f(x)g(x)=a_nb_m x^{n+m}+(a_nb_{m-1}+a_{n-1}b_m)x^{n+m-1}+$$
$$+\cdots+a_0b_0,$$

因为$a_n\neq 0$，$b_m\neq 0$，所以$a_nb_m\neq 0$，故$f(x)g(x)$的次数等于$n+m$，即$D(fg)=D(f)+D(g)$。

推论1·1·1 $f(x)g(x)=0$的充要条件是$f(x)=0$或者$g(x)=0$。

证明 1°充分性 如果多项式$f(x)$与$g(x)$中，有一个是零多项式，由乘积定义，$f(x)g(x)$的每一项系数都是零，即$f(x)g(x)=0$。

2° 必要性 我们用反证法。即如果$f(x)\neq 0$，$g(x)\neq 0$，设$D(f)=n$，$D(g)=m$，由定理1·1·1知，

$$D(fg)=D(f)+D(g),$$

从而$f(x)g(x)\neq 0$，这与假定相矛盾。因此，$f(x)g(x)=0$必

有$f(x)=0$或者$g(x)=0$。

推论1·1·2 若$f(x)h(x)=g(x)h(x)$，且$h(x)\neq 0$，则$f(x)=g(x)$。

证明 由$f(x)h(x)=g(x)h(x)$，得

$$(f(x)-g(x))h(x)=0,$$

而$h(x)\neq 0$，由推论1·1·1知，必有$f(x)-g(x)=0$，即

$$f(x)=g(x)。$$

为了以后讨论的方便，我们用$P[x]$表示数域P上一个文字x的所有多项式作成的集合，根据多项式的加法和乘法的定义，对任意$f(x)$、$g(x)\in P[x]$，则$f(x)+g(x)$与$f(x)g(x)$都是集合$P[x]$中唯一确定的一个元素（多项式）。或者说集合$P[x]$关于多项式的加法与乘法是封闭的。

我们把集合$P[x]$叫做数域P上的多项式环。

例1 证明：多项式$f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$是完全平方的充要条件是$b^2-4ac=0$。

证明 设$f(x)=[\varphi(x)]^2$，则$\varphi(x)$一定是一次多项式，令$\varphi(x)=mx+n$，由多项式乘积定义，

$$[\varphi(x)]^2=m^2x^2+2mnx+n^2。$$

所以$f(x)=[\varphi(x)]^2$的充要条件是

$$ax^2+bx+c=m^2x^2+2mnx+n^2 \qquad (2)$$

再由多项式相等定义知，(2)式当且仅当

$$a=m^2, \qquad b=2mn, \qquad c=n^2$$

时成立。

所以$f(x)=[\varphi(x)]^2$的充要条件是

$$b^2-4ac=4m^2n^2-4m^2n^2=0。$$

例2 试求$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=?$

解 令$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=S(n)$，则

$$S(n+1)-S(n)=(n+1)^2=n^2+2n+1。$$

由此可知，$S(n)$可能是关于n的多项式，并且，这个多项式被下面性质所刻划，

$$\text{(i)}S(0)=0, \qquad \text{(ii)}S(n+1)-S(n)=n^2+2n+1$$

是n的一个二次多项式 。这样如能求出一个多项式$S(x)$满足如上两条性质，那末所求数列的和，即为当$x=n$时，多项式$S(x)$的值。

不妨令$S(x)=a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1 x+a_0$ $(a_m\neq 0)$是一个m次多项式，则$S(x+1)-S(x)$是$m-1$次多项式。事实上，由多项式的加法与乘法定义，得

$$\begin{aligned}S(x+1)-S(x)&=a_m(x+1)^m+a_{m-1}(x+1)^{m-1}+\cdots+\\&\quad+a_1(x+1)+a_0-[a_m x^m+\\&\quad+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0]\\&=a_m(x^m+mx^{m-1}+\cdots+x+1)+\\&\quad+a_{m-1}[x^{m-1}+(m-1)x^{m-2}+\cdots+1]+\\&\quad+\cdots+a_1(x+1)+a_0-[a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\\&\quad+\cdots+a_1 x+a_0]\\&=a_m\cdot mx^{m-1}+\cdots\cdots。\end{aligned}$$

由于$a_m\cdot m\neq 0$，故$S(x+1)-S(x)$是$m-1$次多项式，也就是说，若$S(x)$是一个m次多项式，则$S(x+1)-S(x)$必定是一个$m-1$次多项式，即$S(x+1)-S(x)$的次数比多项式$S(x)$的次数低一次 。而$S(n+1)-S(n)$是一个二次多项式，因之$S(n)$必为三次多项式。于是可设

$$S(n)=an^3+bn^2+cn+d,$$

且有$S(0)=0$，$S(1)=1$，$S(2)=5$，$S(3)=14$，将此关系式代入$S(n)$中，得

$$0=d, \qquad 1=a+b+c,$$

$$5=8a+4b+2c, \qquad 14=27a+9b+3c。$$

解得

$$a=\frac{1}{3}, \qquad b=\frac{1}{2}, \qquad c=\frac{1}{6}, \qquad d=0。$$

这样，

$$S(n)=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}$$

$$=\frac{n}{6}(2n^2+3n+1)=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)。$$

二、带余除法

多项式环 $P[x]$ 与整数环 Z（全体整数的集合）有很多类似之处。我们知道，在整数环 Z 中，任意两个整数 a, b 的和 $a+b$ 与积 ab 都是 Z 中唯一确定的整数，在多项式环 $P[x]$ 中，任意两个多项式 $f(x)$， $g(x)$ 的和 $f(x)+g(x)$ 与积 $f(x)g(x)$ 也都是 $P[x]$ 中唯一确定的多项式。在整数环 Z 中，对任意 a、$b\in Z$，且 $b>0$（只需考虑 $b>0$），a 与 b 之商虽不一定是整数，但在 Z 中存在唯一的一对整数 q，$r\in Z$，使

$$a=bq+r, \qquad 0\leqslant r<b。$$

对多项式环 $P[x]$ 来说，也具有整数环的上述类似性质， 即对任意 $f(x)$，$g(x)\in P[x]$， 且 $g(x)\neq 0$，$f(x)$ 与 $g(x)$ 之商虽不一定是 $P[x]$ 中多项式， 但在 $P[x]$ 中， 存在唯一的一对多项式 $q(x)$，$r(x)$ 使

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x),$$

其中 $r(x)=0$ 或者 $D(r)<D(g)$。这就是多项式的带余除法。让我们先看一个具体例子。

例3 设 $f(x)=4x^4-2x^3+4x^2+x-3$, $g(x)=2x^2+x-2$，求 $q(x)$ 与 $r(x)$ 使

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x)$$

其中 $r(x)=0$ 或者 $D(r)<D(g)$。

解 下面我们用熟知的长除法格式*进行计算：

$$
\begin{array}{lr|l}
\text{被除式}\cdots f(x)= & 4x^4-2x^3+4x^2+x-3 & 2x^2+x-2=g(x)\cdots\text{除式} \\
 & 4x^4+2x^3-4x^2 & 2x^2-2x+5=q(x)\cdots\text{商式} \\
\hline
\text{第一余式}\cdots f_1(x)= & -4x^3+8x^2+x-3 & \\
 & -4x^3-2x^2+4x & \\
\hline
\text{第二余式}\cdots f_2(x)= & 10x^2-3x-3 & \\
 & 10x^2+5x-10 & \\
\hline
\text{第三余式}\cdots f_3(x)= & -8x+7 &
\end{array}
$$

首先用 $g(x)$ 的首项除 $f(x)$ 的首项，得

$$\frac{4x^4}{2x^2}=2x^{4-2}=2x^2,$$

令第一余式

$$f_1(x)=f(x)-2x^2g(x)=-4x^3+8x^2+x-3$$

这样就消去了 $f(x)$ 的首项。

再以 $g(x)$ 的首项除 $f_1(x)$ 的首项，得

$$\frac{-4x^3}{2x^2}=-2x^{3-2}=-2x,$$

令第二余式

$$f_2(x)=f_1(x)-(-2x)g(x)=10x^2-3x-3,$$

这样就消去了 $f_1(x)$ 的首项。

再以 $g(x)$ 的首项除 $f_2(x)$ 的首项，得

$$\frac{10x^2}{2x^2}=5x^{2-2}=5,$$

令第三余式

---

*象多项式的竖式乘法一样，这里也可略去字母，采用分离系数法进行。