高等学校教学用書

理論力学教程

下册

A.A. 柯斯莫节米揚斯基著

高等教育出版社

本書系根據苏俄教育部教育出版社（Учпедгиз）出版的莫斯科大学教授柯斯莫节米揚斯基(А. А. Космодемьянский) 所著的“理論力学教程”（Курс теоретической механики）1949 年版譯出的。原書經苏联高等教育部审定为高等师范学校物理-数学系用書。

本書中譯本分上、下兩册出版。下册包括第二編运动力学的后半部和第三編流体力学。

本書由吳永禎、王耀先、邓应生、鍾佐华四位同志譯出；由吳永禎同志負責总校訂。

理論力学教程

下　册

A. A. 柯斯莫节米揚斯基著

吳永禎等譯

高等教育出版社出版 北京琉璃廠170号

（北京市書刊出版業營業許可証出字第054号）

京华印書局印刷　　新华書店总經售

統一書号 13010·303　開本 850×1168 1/32　印張 6 12/16　字數 160,000　印數 0001—3,800

1957 年 7 月第 1 版　1957 年 7 月北京第 1 次印刷　定價（8）¥ 0.80

下册目錄

第二編　运动力学(續)

第三編 流体力学

第二編　运动力学(續)

第六章　質点系动力学基本定理

§1. 平行力中心·質量中心和重心

設有一同向平行力系 $\overrightarrow{F_1}, \cdots, \overrightarrow{F_n}$ 作用在某一剛体上，其中各力的作用点固定。我們来求这力系取各种方向时的合力的作用点。

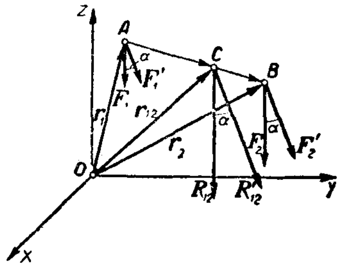

圖 139.

換句話說，我們所要求的点是兩条作用綫的交点，这兩条作用綫就是：該平行力系之合力的作用綫和將此力系中所有矢量 $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \cdots, \overrightarrow{F_n}$ 在保持其平行的条件下旋轉同一角度后所得到的第二力系之合力的作用綫。这个点我們將称为这些平行力的中心。我們首先来求兩个平行力 $\overrightarrow{F_1}$ 与 $\overrightarrow{F_2}$ 的中心(圖 139)。

設矢徑 $\overrightarrow{r_1}$ 定出 $\overrightarrow{F_1}$ 的作用点；矢徑 $\overrightarrow{r_2}$ 定出 $\overrightarrow{F_2}$ 的作用点。此二力之合力 $\overrightarrow{R_{12}}$ 的作用綫与綫段 AB 交于点 C。將力 $\overrightarrow{F_1}$ 与 $\overrightarrow{F_2}$ 繞其作用点轉一个任意角度 α 以变更它們的方向，則新合力 $\overrightarrow{R'_{12}}$ 的作用綫仍与綫段 AB 交于点 C。因而，按定义，点 C 是兩个平行力 $\overrightarrow{F_1}$ 与 $\overrightarrow{F_2}$ 的中心。設点 C 的矢徑为 $\overrightarrow{r_{12}}$，則从圖 139 显然可見：

$$\overrightarrow{r_1}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{r_{12}} \text{ 及 } \overrightarrow{r_{12}}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{r_2}.$$

我們知道，点 C 將綫段 AB 分为兩部分，此兩部分的長短与作用力成反比，即

$$\frac{AC}{F_2}=\frac{CB}{F_1}. \tag{1}$$

因为矢量 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{CB}$(圖 139)是共綫的，故关系式(1)可写成下面的形狀

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{F_2}=\frac{\overrightarrow{CB}}{F_1}.$$

或

$$\frac{\vec{r}_{12}-\vec{r}_1}{F_2}=\frac{\vec{r}_2-\vec{r}_{12}}{F_1}. \tag{2}$$

从(2)式中解出 $\vec{r}_{12}$，我們得到

$$\vec{r}_{12}=\frac{\vec{r}_1F_1+\vec{r}_2F_2}{F_1+F_2}. \tag{3}$$

用公式(3)可以求出兩个平行力的中心的位置。

如果要求三个平行力 $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ 与 $\vec{F}_3$ 的中心的矢徑，我們可以利用公式(3)，根据它来求出兩个平行力 $\vec{R}_{12}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$ 及 $\vec{F}_3$ 的中心。如果 $\vec{F}_3$ 的作用点是由矢徑 $\vec{r}_3$ 决定的，則根据公式(3)就得到三个平行力的中心的矢徑：

$$\vec{r}_{123}=\frac{\vec{r}_{12}R_{12}+\vec{r}_3F_3}{R_{12}+F_3}=\frac{\vec{r}_1F_1+\vec{r}_2F_2+\vec{r}_3F_3}{F_1+F_2+F_3}. \tag{4}$$

用相同的方法我們能得到 n 个平行力的中心的矢徑：

$$\vec{r}_c=\vec{r}_{12\ldots n}=\frac{\vec{r}_1F_1+\vec{r}_2F_2+\cdots+\vec{r}_nF_n}{F_1+F_2+\cdots+F_n}$$

或者

$$\vec{r}_c=\frac{\sum\vec{r}_\nu F_\nu}{\sum F_\nu}. \tag{5}$$

將式(5)投影到坐标軸上，我們就得到平行力中心的坐标如下：

$$x_c=\frac{\sum x_\nu F_\nu}{\sum F_\nu};\quad y_c=\frac{\sum y_\nu F_\nu}{\sum F_\nu};\quad z_c=\frac{\sum z_\nu F_\nu}{\sum F_\nu}. \tag{6}$$

平行力中心的位置与它們的方向無关，因此，如果將所有的力在保持相互平行的条件下繞其作用点旋轉同一个角度，則中心的

位置仍保持不变。

我們現在就利用公式(5)与(6)来定物体重心的位置。

把物体引向地心的力叫做重力。地面上一定点的重力方向就是眞实鉛垂綫，亦卽悬錘綫的方向。

在第三章中已經說到，眞实鉛垂綫的方向与地球半徑的方向稍有差別，并且，沿地面移动时，悬錘綫对地球半徑的偏离角亦略有改变。如果將物体分为許多質点，只要物体的尺度比地球半徑小得多，各質点上作用的重力就可以看做一个平行力系而足够准确。每一質点所受重力的大小等于其質量 Δm_ν 与重力加速度的乘积，卽 $F_\nu=\Delta m_\nu g$。这些元力的合力的大小叫做物体的重量。物体对地球取任意位置时，上述元重力合力的作用綫都要通过空間一点，此点叫做物体的重心。显然，物体重心就是作用于物体各質点而方向沿着鉛垂綫的各平行力 $F_\nu=\Delta m_\nu g$ 組成的力系的中心。

在公式(5)中假設 $F_\nu=\Delta m_\nu g$，我們得到

$$\vec{r}_c=\frac{g\sum\Delta m_\nu\vec{r}_\nu}{g\sum\Delta m_\nu}$$

或者

$$\vec{r}_c=\frac{g\sum\vec{r}_\nu\Delta m_\nu}{gM},\tag{7}$$

式中，$M=\sum\Delta m_\nu$ 乃是所研究的物体的質量。

公式(7)定出物体重心的位置。約去公式中的常量 g（重力加速度），我們得到

$$\vec{r}_c=\frac{\sum\vec{r}_\nu\Delta m_\nu}{M}.\tag{8}$$

凡是位置由公式(8)所决定的空間点叫做物体的**質量中心**，或物体的**慣性中心**。質量中心只取决于組成該物体的分子的質量分布。將公式(8)投影到坐标軸上，我們就得到質量中心的坐标：

$$x_c=\frac{\sum\Delta m_\nu x_\nu}{M};\quad y_c=\frac{\sum\Delta m_\nu y_\nu}{M};\quad z_c=\frac{\sum\Delta m_\nu z_\nu}{M}.\tag{9}$$

从質点系动力学的諸基本定理將看到，質量中心的概念可以独立引入而不必依靠重心的概念，并且决定質量中心的公式也与物体对于地球半徑的相对大小無关。質量中心的概念較重心的概念更为普遍。但是当研究物体在地面上的运动时，我們可以將重心的概念和質量中心的概念看成是一样的。因为我們通常研究的主要是地球上的力学問題，所以也就常利用公式(5)来求質量中心。

对于均匀的物体，求質量中心（重心）的問題可以化为决定体积重心的問題。因为，假設物体的質量連續而又均匀地填滿空間的某一部分，則元体积的質量是：

$$\Delta m_\nu=\rho\Delta v_\nu \text{ 及 } M=\sum\Delta m_\nu=\sum\rho\Delta v_\nu,$$

上式中 ρ 就是常密度，而 Δv 是元体积。將所求得的 Δm 及 M 代入式(9)并約去常密度，得：

$$x_c=\frac{\sum\Delta v_\nu x_\nu}{\sum\Delta v_\nu};\quad y_c=\frac{\sum\Delta v_\nu y_\nu}{\sum\Delta v_\nu};\quad z_c=\frac{\sum\Delta v_\nu z_\nu}{\sum\Delta v_\nu}.$$

取極限后得

$$x_c=\frac{\int\limits_V x\,dv}{V};\quad y_c=\frac{\int\limits_V y\,dv}{V};\quad z_c=\frac{\int\limits_V z\,dv}{V},\tag{10}$$

上式中 $V=\int\limits_V dv$ 是物体的体积。这里，积分是对整个物体的体积来取的。公式(10)告訴我們，对于均匀的物体来說，求重心的問題成为求体积重心的純粹几何問題。如果所考察的均匀物体是厚度比其他尺度小得多的薄壳表面的一部分，例如，弯曲的薄鉄叶，則求重心的問題可以化为求曲面重心的几何問題。因为，設 ρ_1 是質量在該曲面上的分布密度，則

$$\Delta m_\nu=\rho_1\Delta s_\nu.$$

將 Δm_ν 的值代入公式(9)并取極限，我們得到：

$$x_c=\frac{\int\limits_S x\,ds}{S};\quad y_c=\frac{\int\limits_S y\,ds}{S};\quad z_c=\frac{\int\limits_S z\,ds}{S},\tag{11}$$

式中，$S=\int\limits_S ds$ 是这曲面的面积。

对于均匀地沿綫分布的質量（細金屬絲、弦綫等），可用完全相似的方法求得其中心的坐标如下：

$$x_c=\frac{\int\limits_L x\,dl}{L};\quad y_c=\frac{\int\limits_L y\,dl}{L};\quad z_c=\frac{\int\limits_L z\,dl}{L},\tag{12}$$

式中，$L=\int\limits_L dl$ 是所考察的曲綫的長度。

在确定各种特殊情形的重心（質量中心）时，最好遵循下列方法。

a）分割法　为了求得某一复杂物体的重心，可以將它分割成重心較易求得的最簡單部分。例如，我們可將物体分割成 n 个最簡單的部分，其質量各为 $m_1, m_2\cdots, m_n$，求出这些部分的重心的坐标 $x_1y_1z_1, x_2y_2z_2, \cdots, x_ny_nz_n$。于是整个物体的重心就可以按下列公式来求：

$$\begin{aligned}x_c&=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n},\\ y_c&=\frac{m_1y_1+m_2y_2+\cdots+m_ny_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n},\\ z_c&=\frac{m_1z_1+m_2z_2+\cdots+m_nz_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}.\end{aligned}\tag{13}$$

б）对称法　如果所研究的均匀物体是对称的，那么求重心位置的問題就簡單得多了。我們来証明：有对称平面，对称軸或对称中心的均匀物体的重心是分別位于对称平面，对称軸或对称中心上。因为証明过程对三种情况来說都是相似的，所以我們只需証明有对称軸的情形。設物体依 Ox 軸对称（圖 140），則具有某一

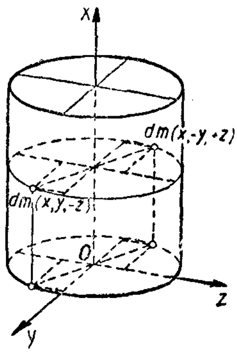

圖 140.

質量 (dm) 且坐标为 $(x, -y, +z)$ 的質点，必对称于具有同一質量，且坐标为 $(x, y, -z)$ 的另一質点。因而，在积分 $\int\limits_v y dm$ 及 $\int\limits_v z dm$ 中，对于每一个正項 $(y dm)$，$(z dm)$，將有相等的負項 $(-y dm)$，$(-z dm)$ 与之对应。

因此：

$$\int\limits_v y\, dm = 0, \quad \int\limits_v z\, dm = 0.$$

由这些公式可知：重心是在 Ox 軸上，亦即在对称軸上。

в) 負質量法　如果在所研究的物体(圖形)中，有着空隙，那么，在很多情况下，最适宜于应用下述方法来决定重心：將空隙用質量填滿，并求此完整物体的重心位置。設 M_0 是这个物体的質量，而 x_0, y_0, z_0 是它的重心的坐标。此后用負質量填滿空隙，再求这些質量的中心。設 $-m_1, -m_2, \cdots, -m_n$ 是这些填进去的負質量，而 $x_1y_1z_1, x_2y_2z_2, \cdots, x_ny_nz_n$ 分别是它們的重心坐标。現在我們来考察兩个質点系——完整的物体和适当地分布着的負質量，这时，应用分割法，即可由下列公式决定它們公共的重心：

$$x_c = \frac{M_0x_0 - m_1x_1 - \cdots - m_nx_n}{M_0 - m_1 - \cdots - m_n},$$

$$y_c = \frac{M_0y_0 - m_1y_1 - \cdots - m_ny_n}{M_0 - m_1 - \cdots - m_n}, \tag{14}$$

$$z_c = \frac{M_0z_0 - m_1z_1 - \cdots - m_nz_n}{M_0 - m_1 - \cdots - m_n}.$$

用公式(14)可决定帶有空隙或割縫的物体的重心位置，因为在相应的空隙部分填进正的和相等的負的質量之后仍然是保持了原来的空隙。

我們来求几个最簡單物体和圖形的重心位置：

I. 三角形面积的重心　設有一極薄的均匀三角形板 ABD（圖 141），我們要求此三角形的重心位置 C。用平行于 AB 的直綫將这个板的面积分割成許多狹条。这些狹条中的每一条都可以看作是一个有質量的綫段，因此，每一狹条的重心就是它的中点。于是，我們可以得到一个結論：各狹条的重心就在三角形 ABD 的中綫 DF 上，因而，三角形板 ABD 的重心也在这条中綫上。

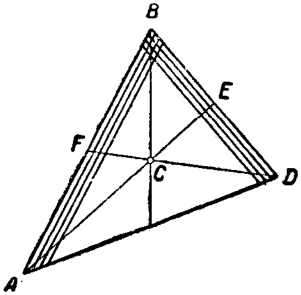

圖 141.

再用平行于 BD 边的直綫將板 ABD 分成微小的狹条，和上面一样地推論，我們得到：三角形 ABD 的重心將在中綫 AE 上。因而，均匀三角形板的重心就在它的中綫的交点，亦即在某一中綫上且距相应頂点为中綫長的三分之二。

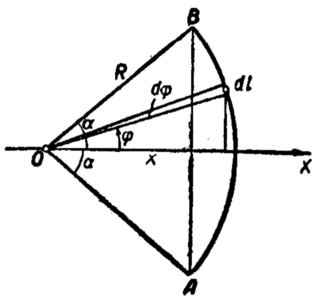

圖 142.

若三角形頂点的坐标为(x_1y_1)，(x_2y_2)，(x_3y_3)，則其中綫交点的坐标x_c, y_c决定于下列公式：

$$x_c=\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\quad y_c=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

II. 圓弧的重心　我們来求半徑为 R 的均匀圓弧（圖 142）的重心。取圓心为坐标原点，Ox 軸的方向垂直于弦 AB。显然，Ox 軸是 AB 弧的对称軸，因此，重心就在这一軸上。將弧 AB 分割成長 dl 的單元。

因为任一元弧的長等于 $dl=Rd\varphi$，而它的坐标 $x=R\cos\varphi$，故

$$x_c=\frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} x\,dl}{\int dl}=\frac{R^2\int_{-\alpha}^{+\alpha}\cos\varphi d\varphi}{2R\alpha}=\frac{R\sin\alpha}{\alpha}, \tag{15}$$

式中 α 是 AB 弧所張的中心角的一半。

III. 圓扇形面积的重心 將圓扇形的面积 AOB（圖 143）分割成中心角为 $d\varphi$ 的元扇形。我們可以將每一个元扇形看成是一个三角形，其重心在与点 O 相距 $\frac{2}{3}R$ 的地方。

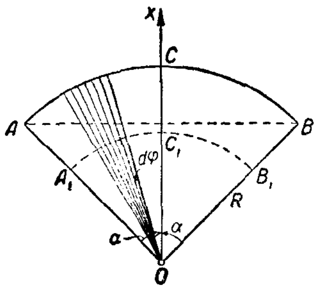

圖 143.

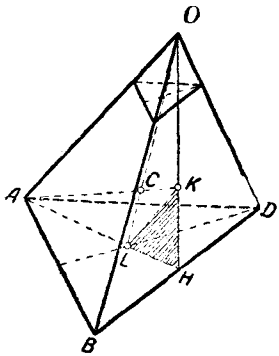

圖 144.

各元扇形重心的軌迹是一条半徑为 $\frac{2}{3}R$ 的均匀弧，因而，扇形的重心与弧 $A_1C_1B_1$ 的重心相重合，弧 $A_1C_1B_1$ 是以点 O 为中心以 $\frac{2}{3}R$ 为半徑而画出的。因此，根据公式(15)我們求得：

$$x_c=\frac{\frac{2}{3}R\sin\alpha}{\alpha},$$

式中 α 是扇形 AOB 的中心角的一半。

IV. 角錐体的重心 設有一均匀的三角形錐体 $OABD$（圖 144）。用平行于錐底 ABD 的平面將此錐体分割成足够薄的三角

形板。每一塊板的重心將在三角形中綫交点上。所有这些三角形板的重心的軌迹是一根直綫 OL。所要求的角錐体的重心必然在此直綫 OL 上。如果用平行于 BOD 面的平面將角錐体分割成三角形板，根据同理，可以断定：角錐体的重心在頂点 A 与三角形 BDO 中綫交点 K 的連綫 AK 上。因此，角錐体的重心就是直綫 AK 与 OL 的交点 C。从作圖中可以看到 $KH=\frac{1}{3}OH$，以及 $LH=\frac{1}{3}AH$，因而，直綫 KL 平行于直綫 OA，于是 $\triangle LCK$ 与 $\triangle AOC$ 相似。

从这些三角形的相似性可知，$\frac{LC}{CO}=\frac{LK}{AO}=\frac{1}{3}$，因此，$LC=\frac{1}{3}CO$，或 $LC=\frac{1}{4}LO$，即是説，均匀三角錐体的重心在連接角錐頂点与錐底重心的直綫 LO 上，并与角錐底面重心相距 $\frac{1}{4}LO$。

V. 均匀圓錐体的重心　用平行于底的平面將圓錐体分割成極薄的圓板。每一个板的重心就在它的几何中心。因此，关于求圓錐体重心的問題，就可以用求非均匀直綫 OA 重心的問題来代替。我們来求直綫 $OA=h$(圖 145)的重心。选定坐标軸，如圖 145 所示，就可得到：

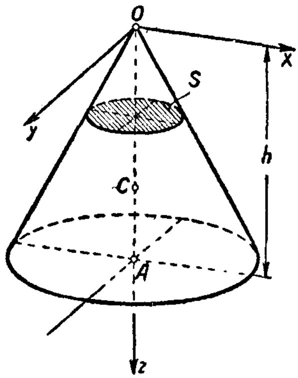

圖 145.

$$z_c=\frac{\int_0^h z\,dm}{\int dm}.$$

但是，$dm=\rho dv=\rho dz\cdot S$。因为 $\frac{h}{z}=\frac{R}{r}$，其中 R 是圓錐底面的半徑，r 是面积为 S 的圓板的半徑，所以 $S=\pi r^2=\left(\frac{R}{h}\right)^2 z^2\pi$。这样，

$$z_c=\frac{\pi\rho\left(\frac{R}{h}\right)^2\int\limits_0^h z^3\,dz}{\pi\rho\left(\frac{R}{h}\right)^2\int\limits_0^h z^2\,dz}=\frac{\left(\frac{h^4}{4}\right)}{\left(\frac{h^3}{3}\right)}=\frac{3}{4}h,$$

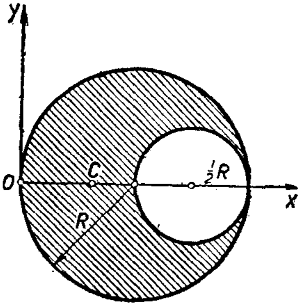

圖 146.

即是說，均勻圓錐体的重心就在連接圓錐頂点与錐底重心的直綫上，且与頂点的距离为錐高的四分之三，或与錐底的距离为錐高的四分之一。

VI. 为了举例說明負質量法，我們来求半徑为 R 幷帶有一个圓孔(半徑为$\frac{1}{2}R$)的圓形均勻平板的重心(圖 146)。因为这塊帶有圓孔的平板具有对称軸，故重心必在此軸上。取坐标原点在点 O，幷使 Ox 軸方向沿着对称軸，即得:

$$x_c=\frac{(\pi R^2)\cdot R-\frac{\pi R^2}{4}\cdot\frac{3}{2}R}{\pi R^2-\frac{\pi R^2}{4}}=\frac{5}{6}R\,.$$

§2. 質点系的动量定理

設有由質量各为 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 的 n 个質点組成的質点系。若这些質点的速度矢各为 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n$。質点系的动量是指等于該系各質点的动量的几何和的矢量

$$\vec{Q}=\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \vec{v}_\nu\,. \tag{16}$$

我們要証明，質点系的动量等于整个系的質量与質量中心的速度矢的乘积。事实上，因为 $m_\nu=$常数，式(16)便可以写成：

$$\vec{Q}=\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu\vec{r}_\nu.$$

但根据公式(8) $\sum\limits_{\nu=1}^{n}m_\nu\vec{r}_\nu=M\vec{r}_c$，因而

$$\vec{Q}=\frac{d}{dt}(M\vec{r}_c)=M\vec{v}_c. \tag{17}$$

动量矢在坐标軸上的投影，可写成如下的形式：

$$Q_x=\sum m_\nu\dot{x}_\nu,\quad Q_y=\sum m_\nu\dot{y}_\nu,\quad Q_z=\sum m_\nu\dot{z}_\nu.$$

如果坐标原点取在系的質量中心，則相对于質量中心而算得的，系的动量矢等于零。事实上，設質点系質量中心对于定点 O 的位置由矢徑 $\vec{r}_c$ 来决定。再設質点系中任何一点对于 O 点的位置由矢徑 $\vec{r}_\nu$ 来决定，而对于質量中心的位置由矢徑 $\vec{\rho}_\nu$ 来决定。于是从圖 147 可見，在整个运动时間內有下面的关系式：

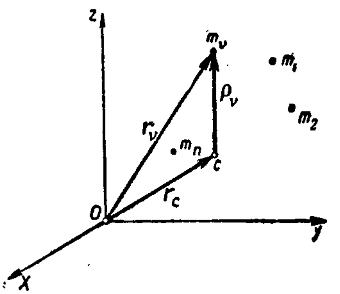

圖 147.

$$\vec{r}_\nu=\vec{r}_c+\vec{\rho}_\nu.$$

將这个关系式对时間取微商，我們就得到：

$$\vec{v}_\nu=\vec{v}_c+\vec{v}'_\nu,$$

式中 $\vec{v}'_\nu=\overrightarrow{\frac{d\rho_\nu}{dt}}$ 是質点 m_ν 对于質量中心的速度。

質点系相对于質量中心的动量决定于公式:

$$\overrightarrow{Q'}=\sum m_\nu \overrightarrow{v'_\nu}.$$

用$\overrightarrow{v_\nu}-\overrightarrow{v_c}$来替代$\overrightarrow{v'_\nu}$,則得

$$\overrightarrow{Q'}=\sum m_\nu(\overrightarrow{v_\nu}-\overrightarrow{v_c})=\sum m_\nu \overrightarrow{v_\nu}-\overrightarrow{v_c}\sum m_\nu=\overrightarrow{Q}-M\overrightarrow{v_c}=0 \tag{18}$$

因为按公式(17),$\overrightarrow{Q}=M\overrightarrow{v_c}$。

为了推导一个將矢量$\overrightarrow{Q}$的变化与作用于質点系的力联系起来的質点系动量定理，我們把作用于質点系的力作一个新的分类。由質点系中各質点的相互作用而产生的力，叫做內力。**內力就是某一質点系中各質点間相互作用的力**。由不屬于这質点系的質量所产生的力，叫做外力。**外力是所考察的質点系与不屬于該系的物体之間相互作用的力**。譬如，在地球和月亮所組的質点系中，它們之間的相互吸引力就是內力。由于太陽以及其他的行星和恒星的吸引而作用在地球和月亮上的力是外力。質点系的任何兩个質点間作用的內力，根据牛頓第三定律，是大小相等，方向相反的。

我們来考察質点系中的一个質点m_ν，这質点对于靜止坐标系的位置是由矢徑$\overrightarrow{r_\nu}$来决定的。設作用在这个質点上的所有內力之合力是$\overrightarrow{F^i_\nu}$，而所有外力之合力为$\overrightarrow{F^e_\nu}$。根据牛頓第二定律，質点m_ν的运动微分方程式可写成如下的形式:

$$m_\nu \frac{d^2\overrightarrow{r_\nu}}{dt^2}=\overrightarrow{F^e_\nu}+\overrightarrow{F^i_\nu}. \tag{19}$$

这样的方程式，对应于質点系中質点的数目，我們可以写出n个。將型如式(19)的所有n个方程逐項相加，我們就得到:

$$\sum m_\nu \frac{d^2\overrightarrow{r_\nu}}{dt^2}=\sum \overrightarrow{F^e_\nu}+\sum \overrightarrow{F^i_\nu}$$

或者

$$\frac{d}{dt}\sum m_\nu \frac{d\vec{r}_\nu}{dt}=\sum \vec{F}^e_\nu+\sum \vec{F}^i_\nu. \tag{20}$$

但是，根据牛頓第三定律，$\sum\vec{F}^i_\nu=0$；这是因为系中各質点間相互作用的力的大小相等而方向相反。此外，$\sum m_\nu \frac{d\vec{r}_\nu}{dt}=\vec{Q}$显然是質点系的动量。于是从式(20)可得到：

$$\frac{d\vec{Q}}{dt}=\sum\vec{F}^e_\nu, \tag{21}$$

这即是說，質点系动量矢对时間的微商等于作用于該系的所有外力的矢量和。我們知道，矢量$\vec{R}^e=\sum\vec{F}^e_\nu$是力系$\vec{F}^e_1,\cdots,\vec{F}^e_n$的合力，因此可以將关系式(21)叙述如下：質点系动量矢对于时間的微商等于作用于該質点系的所有外力的合力。

这一陈述叫做質点系的动量定理。

从这一定理的叙述可知：質点系各質点間相互作用的力（内力）不会影响动量矢的变化。

將式(21)投影到坐标軸上，我們就得：

$$\frac{d}{dt}Q_x=\sum F^e_{\nu x}=R^e_x,$$

$$\frac{d}{dt}Q_y=\sum F^e_{\nu y}=R^e_y,$$

$$\frac{d}{dt}Q_z=\sum F^e_{\nu z}=R^e_z, \tag{22}$$

即是說，質点系动量在任一靜止坐标軸上的投影对时間的微商等于作用于該系的所有外力的合力在同一坐标軸上的投影。

如果外力合力在某一坐标軸上的投影（例如x軸上的）等于零，則質点系动量矢在这个軸上的投影必是常量。

如果矢量$\vec{R}^e=0$，則由式(21)可知，質点系动量矢的大小和方向都保持不变。因此，内力虽然可使个别質点的动量改变，但它們