教学参考丛书

张锦斋 编

第一册

高中代数单元教学

北京师范大学出版社

高中代数第一册

单 元 教 学

张锦斋 编

北京师范大学出版社

高中代数第一册
单元教学
张锦斋 编
北京师范大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
展 望 印 刷 厂 印 刷
开本：787×1092 1／32 印张：8.625 字数：182千
1985 年 3 月第 1 版 1985 年 3 月第 1 次印刷
印数：1—28,000
统一书号：7243·262 定价：1.10元

编写说明

为了配合部编“六年制重点中学高中数学课本代数第一册”的使用，我们编写了这本书。

复习有巩固与提高两方面的作用。所谓巩固，就是指对基础知识、基本技能掌握得更牢固、准确、熟练；所谓提高就是指通过复习，从全局观点出发，把握各部分知识之间的联系，抓住实质，从而加深对每一部分知识的理解，做到“既见树木，也见森林”。本书就是根据这样一种指导思想编写的。每一章分内容提要、几点注意、例题、复习参考题与单元测验题四个部分。

内容提要，按知识的内在联系把全章内容加以整理，便于类比，便于记忆。

几点注意，根据笔者的教学实践，就重点、难点以及学生易于出现的问题加以详细叙述，力求说理透彻，便于理解。

例题，重点讲清各种不同类型问题的分析方法与解题规律。

复习参考题与单元测验题，供同学们在复习时作练习用。

复习参考题与单元测验题附有解答或提示。

我的老师、北京师范大学数学系曹才翰副教授在百忙中审阅了全稿，并提出了许多宝贵意见，在此表示衷心的感谢。

由于水平有限，加之编写时间仓促，有错误和不妥之处，敬请读者批评指正。

张锦斋

于北京师大附属实验中学

目　录

第一章　实数集

内容提要

一、集合：

（一）集合的概念：

集合与几何中的点、线等概念一样，是数学中不定义的原始概念之一。书上“每一组对象的全体形成一个集合”，只是集合概念的一个说明，而不是定义。集合概念具有三个特点：元素的确定性、元素的互异性、元素的无序性。

集合的表示通常用列举法或描述法，究竟何时采用何种方法，要视具体问题的条件而定。

（二）集合的运算：

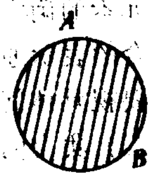
1．关系：

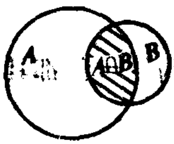
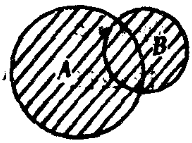
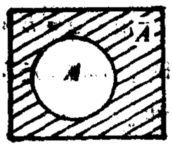
集合与集合之间的关系是：包含关系（用$\subset$，$\subseteq$表示）与相等关系（用“$=$”表示）。

元素与集合之间的关系是：属于或不属于；即$a\in A$或$a\notin A$。

这里要特别注意符号的正确使用，“$\subset$”“$\subseteq$”（“$\supset$”“$\supseteq$”）只能用于集合与集合之间。“$\in$”“$\notin$”（“$\overline{\in}$”）只能用于元素与集合之间。切记不可混淆。

2．子集、交集、并集、补集（I表示全集，$\varnothing$表示空集）：

	子　　集　　$A\subseteq B$	相　等　$A=B$
定义与表示法	对于任意两个集合 A 与 B，如果集合A的任何一个元素都是集合B的元素，那么集合A叫集合 B 的子集，记为 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$) 如果A是B的子集，并且B中至少有一个元素不属于A，那么集合A叫做集合B的真子集，记作：$A\subset B$(或 $B\supset A$)	对于两个集合A与 B，如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，那么集合A与集合B叫做相等，记作： $A=B$
图示		
特例	$A\subseteq A$ $\varnothing\subseteq A$	$A=A$ $\varnothing=\varnothing$
简单性质	1) $A\subseteq B$, $B\subseteq C$, $\Rightarrow A\subseteq C$. 2) $A\subset B$, $B\subset C$, $\Rightarrow A\subset C$ 3) 若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则 $A=B$	1) $A=B$ 则 $B=A$. 2) $A=B$, $B=C$, 则 $A=C$.

交集 $A\cap B$	并集 $A\cup B$	补集 $\overline{A}$
由所有属于集合A且属于集合B的元素所组成的集合，叫做A，B的交集，记作$A\cap B$，读作"A交B"，即$A\cap B=\{x\mid x\in A且x\in B\}$.	由所有属于集合A或属于集合B的元素所组成的集合，叫做A，B的并集，记作$A\cup B$，读作"A并B"，即$A\cup B=\{x\mid x\in A或\ x\in B\}$.	已知全集I，集合$A\subseteq I$，由I中所有不属于A的元素组成的集合，叫做集合A在集合I中的补集，记作$\overline{A}$，读作"A补"，即$\overline{A}=\{x\mid x\in I且x\notin A\}$.
		
$A\cap A=A$ $A\cap\varnothing=\varnothing$ $A\cap I=A$	$A\cup A=A$ $A\cup\varnothing=A$ $A\cup I=I$	$\overline{\varnothing}=I$ $\overline{I}=\varnothing$
1) $A\cap B=B\cap A$（交换律） 2) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$（结合律）	1) $A\cup B=B\cup A$（交换律） 2) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$（结合律）	1) $A\cup\overline{A}=I$ 2) $A\cap\overline{A}=\varnothing$ 3) $\overline{\overline{A}}=A$

说明：1）学习本节内容，要求同学们会准确判断且能正确地表示元素与集合及集合与集合之间的关系；能正确地进行交、并、补的简单运算，维恩图是表示集合的直观工具，要求同学们能掌握这一工具。

2）对于一个关系$*$，若能成立

$$a * a$$

则称关系$*$具有“反射性”。由上表知包含关系$\subseteq$具有反射性。

对于关系$*$、能使$a * b$和$b * a$同时成立，即若$a * b$则$b * a$，那么称关系$*$具有“对称性”。显然，相等关系具有对称性。

对于关系$*$，能使

如 $a * b$ 和 $b * c$ 则 $a * c$

成立时，则称关系$*$具有“传递性”。“$\subseteq$”与“$=$”都具有传递性。

3）交与并的运算还具有以下性质：（了解就可以了，不作要求。）

$A\cap B\subset A$，$A\cap B\subset B$；$A\subset A\cup B$；$B\subset A\cup B$；

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$（分配律）。

二、实数集：

（一）概念：

1． 由于生产和科学发展的需要，也由于数学本身发展的需要，数的概念才不断地得到扩充。

2． 数集扩充原则：

（1）在旧数集中增添新的元素。

（2）新、旧元素在一起构成了新的数集，在新的数集

里，定义一些基本关系（相等、不等）和运算（主要是加法和乘法运算），使原有的一些主要性质（如运算律）仍旧保持。

（3）旧元素作为新数集的成员，它们之间原有运算关系仍旧保持。

（4）新数集解决了旧数集提出的某些矛盾。

例如，由自然数集N扩充到整数集Z时，增加了新元素即负整数，并且定义了相等与不等关系，定义了加法与乘法运算，但在这次扩充中，自然数所满足的加法交换律、结合律，乘法交换律、结合律，以及乘法对加法的分配律，都被保持下来。同时，元素可以比较大小的性质也被保持下来了。如，$2, 3\in N$，是整数集Z中的旧元素，在N中，$2<3$，在新集合Z中"$2<3$"这一关系仍旧保持。在数集N中，减法运算并不是总可以实施的，而在新数集Z中，减法运算总可以实施。这样新数集解决了旧数集中存在的这一矛盾。

3．实数集分类表

- 实数（小数）
  - 有理数（分数）——循环小数（包括整数、有限小数）
    - 正有理数
    - 零
    - 负有理数
  - 无理数——无限不循环小数
    - 正无理数
    - 负无理数

（二）各个数集的性质

1．

运算律	加法	乘法
交换律	$a+b=b+a$	$ab=ba$
结合律	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(ab)c=a(bc)$
乘法对加法的分配律		$a(b+c)=ab+ac$

2．各种数集性质

数集	自然数集N	整数集Z	有理数集Q	实数集R
运算封闭性	对＋、×运算封闭	对＋、－、×运算封闭	对＋、－、×、÷(除数不为0)运算封闭	对＋、－、×、÷(除数不为0)运算封闭
运算律	加法交换律、结合律。 乘法交换律、结合律。 乘法对加法的分配律。			
其它性质	1) 任意两个自然数可以比较大小。 2) 自然数集中存在最小数1。	任意两个整数可以比较大小。	1) 任意两个有理数可以比较大小。 2) 有理数集具有稠密性。	1) 任意两个实数可以比较大小。 2) 实数集具有稠密性，连续性，即实数与数轴上的点一一对应。
有关概念	奇数、偶数 质数、合数	奇数、偶数 整除性		算术根 绝对值

注意：自然数集可分为三类

Ⅰ　数1

Ⅱ　全体质数

Ⅲ　全体合成数（或称合数，或称复合数。）

几 点 注 意

一、对于符号“$\subset$”与“$\subseteq$”的使用，同学们常常混淆不清，例如：对任意集合A、B有关系：$(A\cap B)\subseteq(A\cup B)$；$\varnothing\subseteq A$.有不少同学把它误写成$(A\cap B)\subset(A\cup B)$；$\varnothing\subset A$。

为了正确使用符号“$\subset$”与“$\subseteq$”，要求在分析问题时，充分利用维恩图，特别注意相等与空集等特例。

二、要弄清0、$\{0\}$、$\varnothing$它们各表示什么，还要注意集

合与集合可以相等，元素只能属于（或不属于）集合，而不能与集合相等。

0 ——只是一个数零。

$\{0\}$ ——含有一个元素 0 的集合。

$\varnothing$——不含任何元素的集合。

下列关系是错误的：$0=\{0\}$，$\{0\}=\varnothing$

正确关系是：$0\in\{0\}$，$\varnothing\subset\{0\}$，$0\notin\varnothing$

三、有关无理数的某些证明题常常使用反证法。这是难点。应弄清。

（1）何时使用反证法；

（2）如何引出矛盾。

在数学中，有些命题不易直接从原命题的假设证得题断，甚至从原命题的假设中不足以推出具体的结论，这时改证它的逆否命题（因为原命题与逆否命题是等效的），即从题断的反面出发，以有关定义、公理、定理为大前提并结合题设，通过逐步推演，最后得出与公理、定理或题设相矛盾，或者自相矛盾的结论，从而断定题断的反面不成立，这样也就证明了题断是成立的，这样的推理方法叫做反证法。

反证法证题的过程是

$$\begin{cases}\text{否定题断}\Longrightarrow A\Longrightarrow B\Longrightarrow\cdots\cdots\Longrightarrow M\\ \text{而}M\text{不合理，即}\begin{cases}\text{或与定义、公理矛盾}\\ \text{或与定理矛盾}\\ \text{或与题设矛盾}\\ \text{或与临时假定矛盾}\\ \text{或自相矛盾}\end{cases}\\ \text{因此，题断反面不成立}\\ \text{故原命题成立}\end{cases}$$

反证法按题断反面的情形分为两种：

1）当题断的反面只有一种情形时，只须将题断的反面驳倒，即可得出原命题成立，这种方法称为归谬法。

2）当题断的反面不只一种情形时，就须将题断的反面的各种情形一一驳倒，然后得出原命题成立，这种方法称为穷举法。

有关无理数的证明问题，如果仅从题设条件出发，能推出什么根据甚少。例如证明$\sqrt{2}+\sqrt{3}$是无理数，我们唯一的根据是$\sqrt{2}$与$\sqrt{3}$都是无理数，从这一点出发要证明$\sqrt{2}+\sqrt{3}$是无限不循环小数是很困难的，因此我们证明这类命题往往采用反证法。

下面通过两个例题来说明反证法的运用，

例 1 证明$\log_2 5$是无理数。

证明：假定$\log_2 5$是有理数，那么可设

$$\log_2 5=\frac{m}{n}\ (m,\ n\in N,\ 且\ m、n\ 互质)$$

根据对数定义 $$2^{\frac{m}{n}}=5$$

$$\therefore\quad 2^m=5^n$$

因为m、n均为正整数，所以左边2^m的个位数字只能是 2、4、6、8，而等式右边的个位数字只能是 5，这与$2^m=5^n$是矛盾的。所以$\log_2 5$不是有理数。

$\therefore$ $\log_2 5$是无理数。

例 2 如果n、A均为不小于 2 的整数，证明：若$\sqrt[n]{A}$不是整数，那么它就是无理数。

证明：已知$\sqrt[n]{A}$不是整数，假定

$$\sqrt[n]{A}=\frac{q}{p}\ (p,\ q\in N,\ p,\ q\ 互质,\ 且\ p>1)$$

那么，$$A=\frac{q^n}{p^n},$$

$\because$ p，q互质，　　$\therefore$ p^n 与 q^n 也互质，

又 $\because$ $p>1$，　　$\therefore$ $p^n>1$。

$\therefore$ $\frac{q^n}{p^n}$为分数，即 A 为分数。这与已知 A 为整数相矛盾。

$\therefore$ $\sqrt[n]{A}$不是整数，那么它一定是无理数。

这里例 1 的矛盾是与已知事实相矛盾，例 2 的矛盾是与已知条件相矛盾。一般地说，在反证法中，所谓矛盾，可能是与已知条件、已知定义、已知公理或已知定理矛盾，也可能推出两个相矛盾的结论，具体方法同学们可在证题实践中逐步掌握。

四、在具体解题中出现的错误主要是两方面：一是集合的表示，一是集合的运算。

例 试将集合 $\{(x,\ y)\mid x^2+y^2=2,\ x,\ y\in Z\}$ 用另一种方式表示。

有人写成 $$\left\{(x,\ y)\middle|\begin{cases}x=\pm 1\\ y=\pm 1\end{cases}\right\} \qquad (1)$$

也有人写成

$$\left\{(x,\ y)\middle|(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)\right\} \qquad (2)$$

这里原题的集合是用描述法给出的，要求用另一种方式表示集合，当然只能用列举法。

即：$\{(1,1),\ (1,-1),\ (-1,1),\ (-1,-1)\}$.

(1) 中的写法仍是描述法，与题求不符，(2) 中写法既不是

描述法，也不是列举法。

又如，已知 $A=\{(x,y)\mid 3x-y=5\}$，

$B=\{(x,y)\mid x-3y=7\}$，求 $A\cap B$.

有人这样解：

$$A\cap B=\{(x,y)\mid 3x-y=5\}\cap\{(x,y)\mid x-3y=7\}$$

$$=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}3x-y=5\\x-3y=7\end{cases}\right\}=\{1,-2\}$$

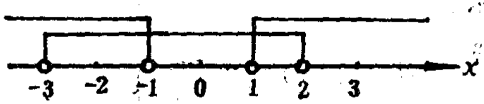
实际上，集合 A、B 的元素都是数对，因此 $A\cap B$ 中的元素也应是数对，审题时必须把这一点弄清楚，那样就不会犯上述错误了。本题的正确答案是：$A\cap B=\{(1,-2)\}$.

有时可借助于数轴这一直观工具来准确完成集合的运算。

例 若 $A=\{x\mid x^2+x-6<0\}$，$B=\{x\mid x^2-1>0\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.

解：$A=\{x\mid x^2+x-6<0\}=\{x\mid -3<x<2\}$

$B=\{x\mid x^2-1>0\}=\{x\mid x<-1 \text{ 或 } x>1\}$



$\therefore\ A\cap B=\{x\mid -3<x<-1\}\cup\{x\mid 1<x<2\}$，

$A\cup B=R$

例　　题

例 1　填空

(1) a $\underline{\qquad}$ $\{a,b,c\}$　　(2) $\{a\}$ $\underline{\qquad}$ $\{a,b,c\}$.

(3) $\{a,b,c\}$ $\underline{\qquad}$ $\{c,b,a\}$，(4) $A\cap B$ $\underline{\qquad}$ A.

(5) 若 $A\subset B$ 且 $A\subset C$，则 A ___ $B\cap C$．

(6) 若 $A\subset C$ 且 $B\subset C$，则 $A\cup B$ ___ C．

(7) 若 $A\subset B$，则 $A\cap C$ ___ $B\cap C$，$A\cup C$ ___ $B\cup C$．

(8) 若 $A\subset B$，则 $\overline{A}$ ___ $\overline{B}$．

解：(1) $a\in\{a,b,c\}$，(2) $\{a\}\subset\{a,b,c\}$，

(3) $\{a,b,c\}=\{c,b,a\}$，(4) $A\cap B\subseteq A$，

(5) 若 $A\subset B$ 且 $A\subset C$，则 $A\subseteq B\cap C$，

(6) 若 $A\subset C$，且 $B\subset C$，则 $A\cup B\subseteq C$，

(7) 若 $A\subset B$，则 $A\cap C\subseteq B\cap C$，$A\cup C\subseteq B\cup C$，

(8) 若 $A\subset B$，则 $\overline{A}\supset\overline{B}$．

解这类题目要注意正确使用符号 $\in$、$\notin$、$\subset$、$\subseteq$、$=$ 等。

例2 已知 $A=$｛42的质因数｝，$B=$｛30的质因数｝，$C=$｛105的质因数｝，设 $I=A\cup B\cup C$，求 $A\cap B\cap C$，I，$\overline{A}$，$\overline{B}\cap\overline{C}$．

要特别注意质因数与因数是两个不同概念。42的质因数是2、3、7，而42的因数是 ±1，±2，±3，±7，±6，±14，±21，±42。

解：$A=$｛42的质因数｝$=\{2,\ 3,\ 7\}$

$B=$｛30的质因数｝$=\{2,\ 3,\ 5\}$

$C=$｛105的质因数｝$=\{3,\ 5,\ 7\}$

$\therefore\quad A\cap B\cap C=\{3\}$；

全集：$I=A\cup B\cup C=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$；

$\overline{A}=\{5\}$；

$\because\ \overline{B}=\{7\}$，$\overline{C}=\{2\}$，$\therefore\ \overline{B}\cap\overline{C}=\varnothing$．

例3 设 $A=\{x\,|\,x^2-3x\leqslant 0\}$，

$B=\{x\,|\,x^2-5x+4<0\}$，

$C=\{x\,|\,x^2-4>0\}$，$I=R$，

求：$A\cap B$，$A\cup B$，$\overline{A}$，$\overline{B}$，$A\cap\overline{B}$，

$\overline{A\cap B}$，$(A\cap B)\cup C$.

解：$A=\{x\mid x^2-3x\leqslant 0\}=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 3\}$

$B=\{x\mid x^2-5x+4<0\}=\{x\mid 1<x<4\}$

$C=\{x\mid x^2-4>0\}=\{x\mid x<-2$ 或 $x>2\}$

$A\cap B=\{x\mid 1<x\leqslant 3\}$，$A\cup B=\{x\mid 0\leqslant x<4\}$，

$\overline{A}=\{x\mid x<0$ 或 $x>3\}$，$\overline{B}=\{x\mid x\leqslant 1$ 或 $x\geqslant 4\}$，

$A\cap\overline{B}=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$，$\overline{A\cap B}=\overline{\{x\mid 1<x\leqslant 3\}}$

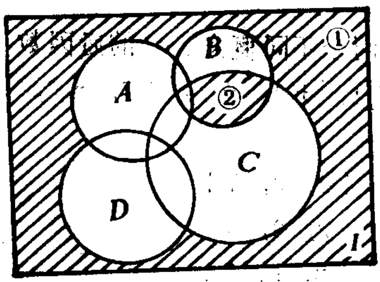
$=\{x\mid x\leqslant 1$ 或 $x>3\}$，

$(A\cap B)\cup C$

$=\{x\mid 1<x\leqslant 3\}\cup\{x\mid x<-2$ 或 $x>2\}$

$=\{x\mid x<-2$ 或 $x>1\}$.

例4 用 A、B、C、D 的关系式表示图中阴影部分。



分析：图中阴影部分可分为两块①与②。易见①就是 $\overline{(A\cup B\cup C\cup D)}$ ②是 $B\cap C\cap\overline{A}$.

$\therefore$ 阴影部分是 $\overline{(A\cup B\cup C\cup D)}\cup(B\cap C\cap\overline{A})$。

例5 已知 $A=\{3,2a^2-a,7\}$，$B=\{3,5a^2,3a\}$，$A\cap B=\{3,6\}$，求① a 的值，② $A\cup B$.

分析：$\because$ $A=\{3,2a^2-a,7\}$，$A\cap B=\{3,6\}$，一般说，$A\cap B\subseteq A$，由此可以断定 $2a^2-a=6$，

$$\therefore \quad a=-\frac{3}{2} \text{ 或 } a=2.$$

但不一定都满足题设，因为 a 值必须保证 $B=\{3,5a^2,$