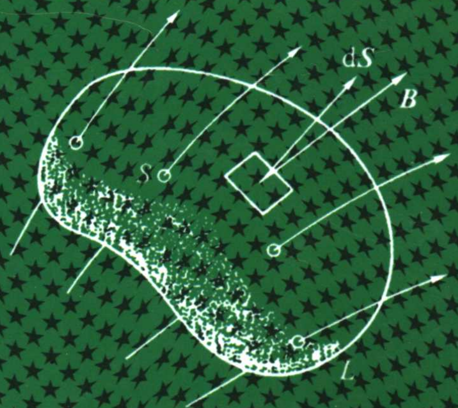
College
高等学校经典教材配套辅导丛书

电动力学
学习指导与习题详解

（高等教育第二版）

郭芳侠 主编



◆ 难点、考点归纳 ◆ 习题全部详解
◆ 名校期末题、考研题精选精解

陕西师范大学出版社

电动力学

学习指导与习题详解

主　编　郭芳侠

编　者　潘宏利　周建安

陕西师范大学出版社

图书代号：JF5N0849

图书在版编目（CIP）数据

电动力学学习指导与习题详解/郭芳侠编．—西安：陕西师范大学出版社，2005.9

（大学教辅）

ISBN 7－5613－3292－0

Ⅰ.电… Ⅱ.郭… Ⅲ.电动力学—高等学校—自学参考资料 Ⅳ.0442

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 107614 号

策　　划	雷永利　史俊孝
责任编辑	金顺成
封面设计	王静婧
责任校对	金顺成
出版发行	陕西师范大学出版社
社　　址	西安市陕西师大 120 信箱（邮政编码：710062）
网　　址	http://www.snuph.com
经　　销	新华书店
印　　刷	陕西师范大学印刷厂
开　　本	850×1168　1/32
印　　张	15.375
字　　数	351 千
版　　次	2005 年 10 月第 1 版
印　　次	2005 年 10 月第 1 次
印　　数	5000
定　　价	18.80 元

开户行：光大银行西安电子城支行　账号：0303080－00304001602

读者购书、书店添货或发现印刷装订问题，请与本社营销中心联系、调换。

电　话：（029）85307864　85233753　85251046（传真）

E－mail：if－centre@snuph.com

内容提要

本书对郭硕鸿先生所著《电动力学》(第二版)一书中的习题做了详细解答,各章均编写了单元测试题,同时还收集了国内外部分知名高校的研究生考试题,并给予解答.另有三套研究生入学考试模拟题.本书可作为高等院校物理类各专业学生的学习参考书及参加研究生考试的考生复习辅导书,也可供从事此课程教学的同行参考.

序

《电动力学》是高等院校物理专业的一门重要的理论课，它比较抽象，用到的数学知识又很多，大部分学生在学习时感觉很吃力，主要有两方面的原因：一是不能正确地将实际的物理问题转化为数学问题，二是由于在运用数学知识求解微分方程、矢量运算等方面还不熟练，导致在解决实际问题时常常感到束手无策. 基于以上原因，我们编写了此书，希望对学生学好《电动力学》有所启迪和帮助. 各章第一部分是郭硕鸿先生的《电动力学》(第二版)一书中的习题解析；第二部分是测试题；为了满足不同层次的学生的需求，第三部分选编了一些典型的、有代表性的研究生入学考试题. 本书有以下特点：对同类型的题目，设有"解题思路"、"易犯错误"、"引申拓展"栏目，使学生能循序渐进地掌握处理问题的思路、方法和技巧. 部分题目还给出了不同的解法.

本书由郭芳侠同志担任主编. 第一章、第二章、第三章的研究生入学考试题以及第七章由郭芳侠编写；第三章的习题解析、第四章由潘宏利编

写;第五章、第六章由周建宏编写.陕西师范大学出版社对本书的出版给予了很大的支持,作者在此谨致以衷心感谢!

由于作者水平有限,书中难免出现疏漏,恳请广大读者和同行批评指正.

编者

2005年8月

目 录

第一章　电磁现象的普遍规律

一、习题解析

1. 根据算符 ∇ 的微分性与矢量性，推导下列公式：

(1) $\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$;

(2) $\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\dfrac{1}{2}\nabla A^2-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$.

解题思路　由于算符 $\nabla=\dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial}{\partial u_1}\boldsymbol{e}_1+\dfrac{1}{h_2}\dfrac{\partial}{\partial u_2}\boldsymbol{e}_2+\dfrac{1}{h_3}\dfrac{\partial}{\partial u_3}\boldsymbol{e}_3$ 是一个矢量，运算时要遵从矢量运算的规则. 同时又是一个微分算符，必须作用于函数才有意义，微分时又要服从微分运算的法则. 利用矢量公式及微分法则便可推导出结论.

解　(1)根据 ∇ 算符的微分性，有

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\nabla_A(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})+\nabla_B(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \qquad ①$$

式中 ∇_A 表示只对 $\boldsymbol{A}$ 有微分作用，∇_B 表示只对 $\boldsymbol{B}$ 作用. 考虑 ∇ 的矢量性，利用矢量公式

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \qquad ②$$

得

$$\nabla_A(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\nabla_A(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A})=\boldsymbol{B}\times(\nabla_A\times\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla_A)\boldsymbol{A} \qquad ③$$

$$\nabla_B(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\times(\nabla_B\times\boldsymbol{B})+(\boldsymbol{A}\cdot\nabla_B)\boldsymbol{B} \qquad ④$$

省去不必要的角标，将③、④式代入①式，得

$$\begin{aligned}\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=&\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+\\&\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}\end{aligned} \qquad ⑤$$

(2) 由于 $\nabla A^2 = \nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})$,在上面⑤式中,令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$,得

$$\nabla A^2 = 2\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + 2(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$$

所以,有

$$\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \frac{1}{2}\nabla A^2 - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$$

易犯错误 只考虑微分性而忽视了矢量性,或者注意到矢量性,而未兼顾到微分运算是否有意义. 例如利用②式将 $\nabla_A(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$ 写为 $\nabla_A(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\times(\nabla_A\times\boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla_A)\boldsymbol{B}$,显然第二项 ∇ 不是对 A 作用,与等式左边不相符.

引申拓展 涉及算符 ∇ 作用于矢量、标量的混合运算时,首先要考虑 ∇ 的微分性,并注意使微分有意义;同时要考虑等式两边物理量的类型(量性)要一致,从而决定 ∇ 作用矢量时是点乘还是矢乘,然后利用矢量运算的相关公式进行运算.

2. 设 u 是空间坐标 x,y,z 的函数,证明:

(1) $\nabla f(u) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\nabla u$;

(2) $\nabla\cdot\boldsymbol{A}(u) = \nabla u\cdot\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u}$;

(3) $\nabla\times\boldsymbol{A}(u) = \nabla u\times\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u}$.

解题思路 利用梯度、散度、旋度的定义,并注意运用复合函数微分运算的法则.

证 (1)
$$\begin{aligned}\nabla f(u) &= \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \\ &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{e}_y + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \\ &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\nabla u\end{aligned}$$

(2)
$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}(u) = \frac{\partial Ax}{\partial x} + \frac{\partial Ay}{\partial y} + \frac{\partial Az}{\partial z}$$

$$=\frac{\mathrm{d}Ax}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\mathrm{d}Ay}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\mathrm{d}Az}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$=\nabla u\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u}$$

(3) $\nabla\times\boldsymbol{A}(u)$的 x 分量为

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})_x=\frac{\partial Az}{\partial y}-\frac{\partial Ay}{\partial z}$$

$$=\frac{\mathrm{d}Az}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}Ay}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial z}$$

同理$(\nabla\times\boldsymbol{A})_y==\frac{\mathrm{d}Ax}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\mathrm{d}Az}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial x}$

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})_z=\frac{\mathrm{d}Ay}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}Ax}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial y}$$

所以,得　$\nabla\times\boldsymbol{A}(u)=\nabla u\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u}$

3. 设 $r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$为源点 $\boldsymbol{x}'$到场点 $\boldsymbol{x}$ 的距离,$\boldsymbol{r}$ 的方向规定为从源点指向场点.

(1)证明下列结果,并体会对源变数求微商($\nabla'=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x'}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y'}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z'}$)与对场变数求微商($\nabla=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$)的关系.

① $\nabla r=-\nabla' r=\frac{\boldsymbol{r}}{r}$

② $\nabla\frac{1}{r}=-\nabla'\frac{1}{r}=-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$

③ $\nabla\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=0$

④ $\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=-\nabla'\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=0,r\neq0$

(2)求 $\nabla\cdot\boldsymbol{r}$, $\nabla\times\boldsymbol{r}$, $(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{r}$, $\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})$, $\nabla[\boldsymbol{E}_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]$

及$\nabla \times [\boldsymbol{E}_0 \sin(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r})]$,其中$\boldsymbol{a},\boldsymbol{k}$及$\boldsymbol{E}_0$均为常矢量.

解题思路 利用∇算符的运算公式,并注意微分变量.

证明 (1)①
$$\nabla r = \frac{\partial r}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial r}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial r}{\partial z}\boldsymbol{e}_z = \frac{x-x'}{r}\boldsymbol{e}_x + \frac{y-y'}{r}\boldsymbol{e}_y + \frac{z-z'}{r}\boldsymbol{e}_z = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

由于$\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\partial r}{\partial x'}, \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{\partial r}{\partial y'}, \frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{\partial r}{\partial z'}$,

故有 $\nabla r = -\nabla' r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$

②利用$\nabla f(u) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\nabla u$,令$f(r) = \frac{1}{r} = r^{-1}$

$$\nabla \frac{1}{r} = \frac{\mathrm{d}(r^{-1})}{\mathrm{d}r}\nabla r = -\frac{\nabla r}{r^2} = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

同理$\nabla' \frac{1}{r} = -\frac{\nabla' r}{r^2} = \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = -\nabla \frac{1}{r}$

③利用$\nabla \times (\nabla \psi) = 0$,有

$$\nabla \times \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \nabla \times \left(-\nabla \frac{1}{r}\right) = 0$$

④$\nabla \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{1}{r^3}\nabla \cdot \boldsymbol{r} + \left(\nabla \frac{1}{r^3}\right) \cdot \boldsymbol{r}$

由于$\nabla \cdot \boldsymbol{r} = \frac{\partial(x-x')}{\partial x} + \frac{\partial(y-y')}{\partial y} + \frac{\partial(z-z')}{\partial z} = 3$

$$\nabla \frac{1}{r^3} = -\frac{3\boldsymbol{r}}{r^5}$$

所以 $\nabla \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{3}{r^3} - \frac{3\boldsymbol{r}}{r^5} \cdot \boldsymbol{r} = 0 \qquad (r \neq 0)$

同理 $\nabla' \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{1}{r^3}\nabla' \cdot \boldsymbol{r} + \left(\nabla' \frac{1}{r^3}\right) \cdot \boldsymbol{r} = 0 \qquad (r \neq 0)$

(2) ①上面已证明了 $\nabla\cdot\boldsymbol{r}=3$

②$\nabla\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_x\left[\frac{\partial(z-z')}{\partial y}-\frac{\partial(y-y')}{\partial z}\right]+\boldsymbol{e}_y$

$$\left[\frac{\partial(x-x')}{\partial z}-\frac{\partial(z-z')}{\partial x}\right]+\boldsymbol{e}_z\left[\frac{\partial(y-y')}{\partial x}-\frac{\partial(x-x')}{\partial y}\right]$$

$=0$

③$(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{r}=\left(a_x\frac{\partial}{\partial x}+a_y\frac{\partial}{\partial y}+a_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\boldsymbol{r}$

第一项　$a_x\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x}=a_x\frac{\partial}{\partial x}[\boldsymbol{e}_x(x-x')+\boldsymbol{e}_y(y-y')+\boldsymbol{e}_z(z-z')]$

$=a_x\boldsymbol{e}_x$

同理　$a_y\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial y}=a_y\boldsymbol{e}_y,a_z\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial z}=a_z\boldsymbol{e}_z$

所以　$(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{r}=a_x\boldsymbol{e}_x+a_y\boldsymbol{e}_y+a_z\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{a}$

④利用第1题中的公式：$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})=\boldsymbol{r}\times(\nabla\times\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{r}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{r})+(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{r}$

由于 $\boldsymbol{a}$ 为常矢量，所以 $\nabla\times\boldsymbol{a}=0,(\boldsymbol{r}\cdot\nabla)a=0$. 又因为 $\nabla\times\boldsymbol{r}=0$，得

$$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})=(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}$$

⑤$\nabla\cdot[\boldsymbol{E}_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]=\boldsymbol{E}_0\cdot\nabla\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})+\nabla\cdot\boldsymbol{E}_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$

由于　$\nabla\cdot\boldsymbol{E}_0=0,\nabla\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})=\nabla(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$

而　$\nabla(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})=\boldsymbol{k}$

所以　$\nabla\cdot[\boldsymbol{E}_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]=\boldsymbol{K}\cdot E_0\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$

⑥$\nabla\times[\boldsymbol{E}_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]=[\nabla\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]\times\boldsymbol{E}_0+$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$$

由于 $\nabla\times\boldsymbol{E}_0=0,\nabla\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})=\nabla(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})=\boldsymbol{k}\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$

所以原式 $=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$

引申拓展　遇到较为复杂的函数求梯度（或散度、旋度）时，尽可能将其分解为两个简单函数的乘积，再运用相应的 ∇ 算符公

式及复合函数求梯度、散度、旋度的公式.

例如　计算$\nabla\times\boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}=\nabla e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}\times\boldsymbol{E}_0+\nabla\times\boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}$$
$$=ie^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}\nabla(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{E}_0$$
$$=i\cdot\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}$$

对任意的标量函数$f(r)$和矢量$f(r)\boldsymbol{r}$,不难证明:

$$\nabla f(r)=-\nabla' f(r)$$
$$\nabla\cdot[f(r)\boldsymbol{r}]=-\nabla'\cdot[f(r)\boldsymbol{r}]$$
$$\nabla\times[f(r)\boldsymbol{r}]=-\nabla'\times[f(r)\boldsymbol{r}]=0.$$

4. 应用高斯定理证明:

$$\int_v \mathrm{d}v\,\nabla\times\boldsymbol{f}=\oint_s \mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{f}$$

应用斯托克斯定理证明:

$$\int_s \mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\nabla\varphi=\oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l}\varphi$$

解题思路　等式两边都是矢量,若能证明等式两边各个分量相等,等式便成立.

证明　①等式左边的x分量为

$$\boldsymbol{e}_x\cdot\int_v \mathrm{d}v\,\nabla\times\boldsymbol{f}=\int \mathrm{d}v\,\boldsymbol{e}_x\cdot(\nabla\times\boldsymbol{f})$$

利用$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$

$$\boldsymbol{e}_x\cdot(\nabla\times\boldsymbol{f})=\nabla\cdot(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{e}_x)$$

有　$\boldsymbol{e}_x\cdot\int_v \mathrm{d}v\,\nabla\times\boldsymbol{f}=\int_v \mathrm{d}v\,\nabla\cdot(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{e}_x)$

再利用高斯定理,有

$$\boldsymbol{e}_x\cdot\int_v \mathrm{d}v\,\nabla\times\boldsymbol{f}=\oint_s \mathrm{d}\boldsymbol{s}\cdot(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{e}_x)$$
$$=\oint_s \boldsymbol{e}_x\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{f})$$

$$=\boldsymbol{e}_x\cdot\oint_s \mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{f}$$

可见，$\int_v \mathrm{d}v\nabla\times\boldsymbol{f}$ 的 x 分量与 $\oint_s \mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{f}$ 的 x 分量相等.

同理，有 $\boldsymbol{e}_y\cdot\int_v \mathrm{d}v\nabla\times\boldsymbol{f}=\boldsymbol{e}_y\cdot\oint_s \mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{f}$

$$\boldsymbol{e}_z\cdot\int_v \mathrm{d}v\nabla\times\boldsymbol{f}=\boldsymbol{e}_z\cdot\oint_s \mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{f}$$

故
$$\int \mathrm{d}v\nabla\times\boldsymbol{f}=\oint_s \mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{f}$$

另解 用一非零任意常矢量 $\boldsymbol{c}$ 点乘原式左边，得

$$\boldsymbol{c}\cdot\int_v \mathrm{d}v\nabla\times\boldsymbol{f}=\int_v \mathrm{d}v(\nabla\times\boldsymbol{f})\cdot\boldsymbol{c}$$

由于 $\nabla\cdot(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{c})=(\nabla\times\boldsymbol{f})\cdot\boldsymbol{c}-(\nabla\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{f}=(\nabla\times\boldsymbol{f})\cdot\boldsymbol{c}$

上式右边 $=\int_v \nabla\cdot(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{c})\mathrm{d}v$

$$=\oint_s(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{c})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

$$=\oint\boldsymbol{c}\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{f})$$

$$=\boldsymbol{c}\oint\mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{f}$$

因为 $\boldsymbol{c}$ 为任意非零常矢量，故

$$\int_v \mathrm{d}v\nabla\times\boldsymbol{f}=\oint_s \mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{f}$$

②左边点乘一非零任意常矢量 $\boldsymbol{c}$，得

$$\boldsymbol{c}\cdot\int_s \mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\nabla\varphi=\int\boldsymbol{c}\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\nabla\varphi)$$

利用 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})$

$$\boldsymbol{c}\cdot\int_s \mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\nabla\varphi=\int\mathrm{d}\boldsymbol{s}\cdot(\nabla\varphi\times\boldsymbol{c})=\int_s \mathrm{d}\boldsymbol{s}\cdot\nabla\times(\varphi\boldsymbol{c})$$

利用斯托克斯公式

$$\int_s \mathrm{d}\boldsymbol{s}\cdot\nabla\times(\varphi\boldsymbol{c})=\oint_L\varphi\boldsymbol{c}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{c}\cdot\oint_L\varphi\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

得 $\boldsymbol{c}\cdot\int\mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\nabla\varphi=\boldsymbol{c}\cdot\oint_L\varphi\mathrm{d}\boldsymbol{l}$

由于 $\boldsymbol{c}$ 为非零任意常矢量,所以得到

$$\int_s\mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\nabla\varphi=\oint_L\varphi\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

引申拓展 遇到证明矢量的体积分(或曲面积分)等于矢量闭合曲面积分(或曲线矢量积分)时,都可采用类似的方法证明各分量相等. 证明过程中要应用矢量运算公式将积分化为 $\int_v\nabla\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}v$ 或 $\int\nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 形式,才能应用高斯定理或斯托克斯定理进行积分变换.

5. 已知一个电荷系统的电偶极矩定义为

$$\boldsymbol{p}(t)=\int_v\rho(\boldsymbol{x}',t)\boldsymbol{x}'\mathrm{d}v'$$

利用电荷守恒定律 $\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial t}=0$,证明 $\boldsymbol{P}$ 的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\int_v\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t)\mathrm{d}v'$$

解题思路 根据定义写出$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}$的表达式,然后证明$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}$的每一分量与 $\int_v\boldsymbol{J}(x',t)\mathrm{d}v'$的每个分量相等.

证明 由电偶极矩的定义式,得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_v\rho(\boldsymbol{x}',t)\boldsymbol{x}'\mathrm{d}v'\\&=\int_v\frac{\partial}{\partial t}[\rho(\boldsymbol{x}',t)]\boldsymbol{x}'\mathrm{d}v'\\&=-\int_v(\nabla'\cdot\boldsymbol{J})\boldsymbol{x}'\mathrm{d}v' \qquad ①\end{aligned}$$

由于$\nabla'\cdot(\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}')=(\nabla'\cdot\boldsymbol{J})\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{J}\cdot\nabla'\boldsymbol{x}'$，$\nabla'\boldsymbol{x}'=\vec{I}$

$\nabla'\cdot(\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}')=(\nabla'\cdot\boldsymbol{J})\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{J}$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}&=-\int_v\nabla'\cdot(\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}')\mathrm{d}v'+\int_v\boldsymbol{J}\mathrm{d}v'\\&=-\oint_s\mathrm{d}\boldsymbol{s}'\cdot(\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}')+\int_v\boldsymbol{J}\mathrm{d}v'\\&=-\oint_s(\mathrm{d}\boldsymbol{s}'\cdot\boldsymbol{J})\boldsymbol{x}'+\int_v\boldsymbol{J}\mathrm{d}v' \qquad ②\end{aligned}$$

在界面S上，$\boldsymbol{J}$的法向分量$J_n=0$，故②式右边第一项等于零

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\int\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}'\cdot t)\mathrm{d}v$$

当然此题也可以直接证明(1)两边各个分量相等．请读者自己证明．

6. 若$\boldsymbol{m}$是常矢量，证明除$\boldsymbol{R}=0$点以外，矢量$\boldsymbol{A}=\dfrac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{R}}{R^3}$的旋度等于标量$\varphi=\dfrac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{R}}{R^3}$的梯度的负值，即

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=-\nabla\varphi$$

其中R为坐标原点到场点的距离，方向由原点指向场点．

证明

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{A}&=\nabla\times\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{R}}{R^3}\\&=\nabla\times\left[\boldsymbol{m}\times\left(-\nabla\frac{1}{R}\right)\right]\\&=\nabla\times\left(\nabla\frac{1}{R}\times\boldsymbol{m}\right)\end{aligned}$$

利用公式$\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+(\nabla\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}-(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{m}\cdot\nabla)\nabla\frac{1}{R}+(\nabla\cdot\boldsymbol{m})\nabla\frac{1}{R}-\left(\nabla\frac{1}{R}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{m}-(\nabla\cdot\nabla)\frac{1}{R}\boldsymbol{m}$$