新世纪地方高等院校专业系列教材

高等数学

（下 册）

主 编 李进金

南京大学出版社

全国教育科学"十五"规划课题项目

高等数学

（下　册）

主　编　李进金

副主编　吴炯圻

撰稿人　陈跃辉　唐振松　王文良

曹　恒

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考数学(下册)/李进金主编. 一南京：南京大学出版社，2005.8

(新世纪地方高等院校专业系列教材)

ISBN 7-305-04472-5

Ⅰ.高...　Ⅱ.李...　Ⅲ.高等数学—师范大学—教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第053923号

丛书名　新世纪地方高等院校专业系列教材
书　名　**高等数学(下册)**
主　编　李进金
副主编　吴炯圻
出版发行　南京大学出版社
社　址　南京市汉口路22号　邮编210093
电　话　025-83596923　025-83592317　传真025-83328362
网　址　http://press.nju.edu.cn
电子邮件　nupress1@public1.ptt.js.cn
sales@press.nju.edu.cn　(销售部)
印　刷　南京大众新科技印刷有限公司
开　本　787×960　1/16　印张13.75　字数222千
版　次　2005年8月第1版　2005年8月第1次印刷
印　数　1-5000
ISBN　7-305-04472—5/O·346
定　价　16.50元

新世纪地方高等院校专业系列教材

编　委　会

前　言

本套《高等数学》教材是全国23所高校组成编委会编写的《新世纪地方高等院校专业系列教材》之一。

漳州师范学院副院长李进金教授(博士)为该编委会编委，担任本书主编。漳州师范学院数学系原系主任吴炯圻教授担任副主编。

参加编写单位有：漳州师范学院、雁北师范学院、陕西理工学院、南阳师范学院和衡阳师范学院等五所高校数学系。

本书编写的背景是：近几十年来，科技、教育领域都发生了十分可喜的变化，特别是计算机科学技术的突飞猛进、素质教育的逐步实施和高等教育的蓬勃发展，对当今的中国社会的影响极为深刻和广泛。面对新的形势，人们的教育思想、教育观念也跟着发生变化。为了适应新的形势的需要，《高等数学》的教材正在不断更新。目前流行的同济大学编写的《高等数学》第五版和中国人民大学编写的《微积分》(新版)，这些都是很好的新教材。不过，这类教材似乎较适合于重点大学的工科或经济类，而如何编好适用于普通高校的教材仍是一个值得深入探讨的问题。为此，我们五所高校从2003年9月起着手编写这套面向普通高校的新教材。

本书阐述微积分学的基本内容、基本方法和有关应用，适用于一般理工科、经济、管理各专业学习高等数学课程的学生(少课时的专业对教材中附上星号 * 的章节可以选用或不用)，也可供其他专业的师生教学参考。

本书由来自五所高校的具有丰富教学经验和较强教学研究能力的骨干教师负责或组织编写，经过在漳州师范学院2004级多个教学班试用，广泛征求意见，反复锤炼完善而成。新教材的特点是：

1. 在教育思想、教育观念上，适合推进素质教育，培养学生的创新精神和应用意识、获取新知识的能力、分析和解决问题的能力。

2. 在教学内容上，在保证《高等数学课程教学基本要求》的前提下，努力吸收当前一些改革教材中成功的改革举措，融合多所高校先进的教学经验；注意文理渗透，体现微积分基本思想在理、工、经、管等领域中的应用。

3. 继承传统教材中结构严谨、逻辑清晰的优点，做到突出重点、详略得当、通俗易懂、便于自学。

全书原稿编写人员为：

第一、二章：雁北师范学院康淑瑰、王凤艳、王振芳和肖润梅老师；

第三章：陕西理工学院李金龙老师；

第四、五章（包括附录的积分表）：南阳师范学院何一农老师；

第六章：漳州师范学院吴炯圻老师；

第七章：陕西理工学院王文良老师；

第八章：衡阳师范学院曹恒老师；

第九章：漳州师范学院唐振松老师；

第十、十一章：漳州师范学院陈跃辉老师。

主编、副主编负责组织、安排、协调工作，阅读全稿，提出总体编写思路、各阶段工作的计划、要求和修改方案。漳州师范学院吴炯圻、陈协彬、陈跃辉、唐振松、周戈、王旺根和余承依等老师共同完成内部审稿工作。统稿（包括内容、格式、插图等的修改、补充和完善等）工作主要由吴炯圻、陈跃辉和唐振松老师负责，全书的文字加工、润饰工作由吴炯圻老师完成。

漳州师范学院王桂芳教授等多位老师在该校 2004 级多个专业试用两学期，并提出了许多很有价值的修改意见与建议；太原理工大学邱宜坪教授在漳州师范学院应聘期间详细阅读了试用本，提出许多宝贵的意见与建议；马周明老师一直协助与各校编写人员之间的联络工作。谨此向他们表示衷心的感谢。同时，向支持本书编写、试用和出版的各单位有关领导和广大师生致谢。

本书在编写过程中，参考和引用了同类教材的许多资料。我们在书末列出主要参考文献，并借此机会向所有有关作者表示诚挚的谢意。

限于编者的学识水平和能力，书中可能仍有不足与错漏之处。欢迎使用本书的老师和读者不吝指正。

编　者

2005 年 3 月

目 录

第七章 向量代数与空间解析几何

平面解析几何的基本思想是用坐标的方法建立起有序实数对与平面上的点之间的一一对应，从而把平面上的图形与方程对应起来，用代数的方法来研究平面上的几何问题. 把这一思想方法推广到空间几何问题的研究中去，是本章所要讨论的内容.

§7.1 向量及其线性运算

§7.1.1 向量的概念

通常遇到的量可分为两类，一类完全由数值决定，如质量、时间、面积、密度等，称为**数量**；另一类如力、力矩、速度、加速度等，不仅有大小，而且有方向. 我们称既有大小，又有方向的量为**向量**或**矢量**，用黑体字母 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{F}$,… 或 $\vec{a}$, $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{F}$, …等表示.

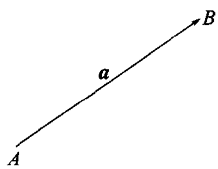


图 7-1-1

向量 $\boldsymbol{a}$ 可以用有向线段$\overrightarrow{AB}$来表示，称为**向量**$\overrightarrow{AB}$(图 7-1-1). 有向线段$\overrightarrow{AB}$的长度表示向量$\boldsymbol{a}$ 的大小，$\overrightarrow{AB}$的方向表示 $\boldsymbol{a}$ 的方向. $\overrightarrow{AB}$的始点 A 就是 $\boldsymbol{a}$ 的始点，$\overrightarrow{AB}$的终点 B 就是 $\boldsymbol{a}$ 的终点.

在数学研究中，我们只研究与始点无关的向量，并称这种向量为**自由向量**，简称为**向量**. 取定单位长度后，线段 AB 的长度称为向量$\overrightarrow{AB}$(或 $\boldsymbol{a}$)的**长度**或**模**，记为 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\boldsymbol{a}|$. 如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等，并且方向相同，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是**相等**的，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

模为 1 的向量称为**单位向量**. 模为 0 的向量称为**零向量**. 零向量就是始点和终点重合的向量，所以零向量没有确定的方向. 我们约定零向量可以指向任何一个方向；一切零向量都相等，记为$\vec{0}$或 $\boldsymbol{0}$.

与向量 $\boldsymbol{a}$ 大小相等，方向相反的向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记为$-\boldsymbol{a}$. 把一个向量的始点和终点互换即得原向量的负向量，故$-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$. 由负向量的定义可知$-(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$.

§7.1.2 向量的线性运算

1. 向量的加减运算

根据力学上关于力、速度、加速度等合成的平行四边形法则，可以给出向量相加的**平行四边形法则**：当向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不平行时，作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，以 AB，AD 为邻边作一平行四边形 $ABCD$，连接对角线 AC（见图 7－1－2），那么向量$\overrightarrow{AC}$即为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 更一般地，可给出向量加法的**三角形法则**：对任意两向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，任取点 A 作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，以 B 为起点作$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连接 AC（见图 7－1－3），则向量$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**，记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

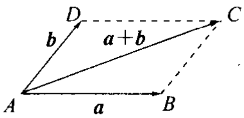


图 7－1－2

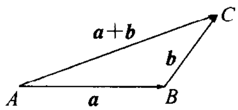


图 7－1－3

易证向量的加法具有以下运算性质：

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；

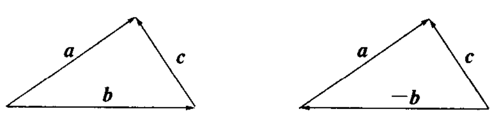
(3) $\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$；

(4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

由于向量的加法满足交换律和结合律，故向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$，…，$\boldsymbol{a}_n$ 相加可按照**多边形法则**进行：使前一向量的终点作为次一向量的起点，相继按向量的三角形法则将向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$，…，$\boldsymbol{a}_n$ 两两相加，再以第一向量的起点为起点，以最后一向量的终点为终点作向量 $\boldsymbol{s}$，则 $\boldsymbol{s}$ 即为 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$，…，$\boldsymbol{a}_n$ 的和，记为

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4+\cdots+\boldsymbol{a}_n.$$

向量的减法为加法的逆运算. 若 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$，则向量 $\boldsymbol{c}$ 就定义为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**差**（见图 7－1－4(a)），记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 由三角形法则不难看出，给向量 $\boldsymbol{a}$ 加上向量 $\boldsymbol{b}$ 的负向量 $-\boldsymbol{b}$，即得向量 $\boldsymbol{c}$（见图 7－1－4(b)），所以如下结论成立：



(a) (b)

图 7－1－4

(5) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

由三角形两边之和大于第三边的原理,有

(6) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ 及 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$,

其中等号仅在 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 同向或反向时成立.

例 1 设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 是方向互不相同的向量,试证明依次将它们的终点与起点相连能构成一个三角形的充要条件是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

证 必要性:依次将 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 的终点与起点相连接构成三角形 ABC(图 7-1-5),则 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}$, $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{CA}$,由多边形法则可知,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 的起点和终点重合,即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

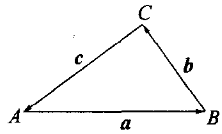


图 7-1-5

充分性:取向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,则 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 据题设 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,可知 $\overrightarrow{AC}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,进而推出 $\boldsymbol{c}=-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}$,这说明向量 $\boldsymbol{c}$ 的终点与向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点重合. 故三个向量 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ 构成一个 $\triangle ABC$,即向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 按题设方法相连接可构成一个三角形.

2. 向量的数乘运算

实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的**乘积**记作 $\lambda\boldsymbol{a}$,规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量,它的模为向量 $\boldsymbol{a}$ 的模的 $|\lambda|$ 倍,即 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$,它的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同;当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反. 该运算又称为向量的**数乘**.

易知 $0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. 类似地有 $\lambda\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$. 若 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,则 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=0$. 特别当 $\lambda=\pm1$ 时,$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$, $(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

设 $\boldsymbol{e}_a$ 表示模为 1,与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的向量(即与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量),易知 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$. 当向量 $\boldsymbol{a}\neq0$ 时,则 $\boldsymbol{e}_a=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^{-1}\boldsymbol{a}$. 任一非零向量除以它的模所得是一个与原向量同方向的单位向量,称这一过程为**向量的单位化**.

向量的数乘具有以下运算性质:

(1) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

(3) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

向量的加减运算和数乘运算统称为**向量的线性运算**.

§7.1.3 向量的共线与共面

一组向量**共线**或**共面**是指把它们表示成具有相同始点的有向线段后,这些线段是共线或共面的. 若向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 共线,则表示两向量要么同

向,要么反向,记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 易证如下结论.

定理 1 向量 $\boldsymbol{b}$ 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 共线的充要条件是存在唯一的实数 λ,使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

推论 向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是存在不全为零的实数 k 和 m 使得 $k\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

定理 2 设向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 共面,并且 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 不共线,则存在唯一的一对实数 k, m,使得 $\boldsymbol{c}=k\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}$.

推论 向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是存在三个不全为零的实数 k, l, m,使得 $k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}+m\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

§7.1.4 空间点的坐标

为了确定空间点的位置,我们将引入空间直角坐标系,使空间的点与有序实数组在该坐标系下形成对应关系.

在空间取定点 O 为原点,取两两相互垂直的单位向量 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$,就构成一个坐标系$[\boldsymbol{O};\ \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}]$. $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 依次确定三条两两互相垂直的数轴,它们都以 O 为原点,有确定的量度单位,这三条数轴分别称为 ***x* 轴**(横轴),***y* 轴**(纵轴),***z* 轴**(竖轴),统称为**坐标轴**(见图 7-1-6). 规定这些坐标轴的正方向符合右手规则,即若用右手握住 z 轴,大拇指指向 z 轴正向,则其余四指弯曲的方向表示从 x 轴正向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 至 y 轴正向的方向(如图 7-1-6),如此就构成一个坐标系,一般称为直角坐标系 $[\boldsymbol{O};\ \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}]$. 三条坐标轴中的任两条确定一个平面,这样形成的三个平面统称为**坐标面**,x 轴与 y 轴所确定的坐标面称为 ***xOy* 面**,y 轴与 z 轴确定的坐标面称为 ***yOz* 面**,z 轴与 x 轴确定的坐标面称为 ***zOx* 面**. 三个坐标面把空间分为八个部分,每部分称为一个**卦限**. 含有三个坐标轴的正半轴的卦限叫作第Ⅰ卦限,在 xOy 面上方的其他三个卦限,按逆时针方向确定,分别叫作第Ⅱ,第Ⅲ和第Ⅳ卦限. 在 xOy 面下方与第Ⅰ卦限相对的叫作第Ⅴ卦限,其他卦限按逆时针方向确定,分别叫作第Ⅵ卦限,第Ⅶ卦限和第Ⅷ卦限(图 7-1-7).

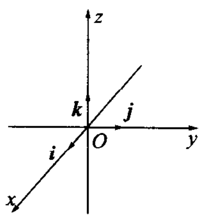


图 7-1-6

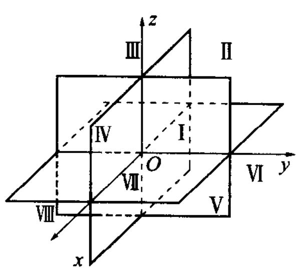


图 7-1-7

在直角坐标系$[\boldsymbol{O};\ \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}]$确定后，设$M$为空间中任意一点，过点$M$作三个平面分别垂直于三条坐标轴，且与$x$轴，$y$轴，$z$轴的交点依次为$P$，$Q$，$R$（见图7-1-8）. 设向量$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$，$\overrightarrow{OR}$在直角坐标系下的坐标分别是$x$，$y$，$z$，即$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$，则$P$，$Q$，$R$三点在$x$轴，$y$轴，$z$轴上的坐标依次为$x$，$y$，$z$. 故$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$. 于是，空间的一点$M$就唯一地确定一个有序实数组$(x,\ y,\ z)$，我们称其为点$M$的直角坐标. 其中$x$，$y$，$z$依次称为点$M$的**横坐标**，**纵坐标**和**竖坐标**，或依次称为点M的**第一坐标**，**第二坐标**，**第三坐标**.

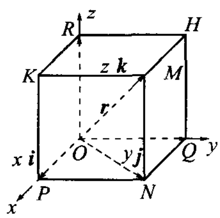


图7-1-8

反之，对给定的$(x,\ y,\ z)$，可依次在x轴，y轴，z轴上取与x，y，z相对应的点P，Q，R，然后过点P，Q，R各作平面分别垂直于x轴，y轴，z轴，这三个平面的交点M就是以x，y，z为坐标的点.

向量$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$称为点$M$关于原点$O$的**向径**或**矢径**，称等式$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$为向量$\boldsymbol{r}$的**坐标分解式**，$x\boldsymbol{i}$，$y\boldsymbol{j}$，$z\boldsymbol{k}$称为向量$\boldsymbol{r}$沿三个坐标轴方向的**分向量**. 记号$(x,\ y,\ z)$既表示点$M$，也可表示向量$\boldsymbol{r}$，所以有序实数$x$，$y$，$z$也称为向量$\boldsymbol{r}$在直角坐标系中的**坐标**，记为$\boldsymbol{r}=(x,\ y,\ z)$，并把点$M$直接表示为点$M(x,\ y,\ z)$.

§7.1.5 向量坐标与向量的线性运算

我们可以用向量坐标来简洁地表示向量的线性运算. 一般若不另作说明，所讲向量坐标均指关于直角坐标系$[\boldsymbol{O};\ \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}]$的向量坐标. 设$\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$，即

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}.$$

根据向量加法和数乘运算性质，易验证下列运算性质成立：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1)\boldsymbol{i}+(a_2+b_2)\boldsymbol{j}+(a_3+b_3)\boldsymbol{k}$;

(2) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1)\boldsymbol{i}+(a_2-b_2)\boldsymbol{j}+(a_3-b_3)\boldsymbol{k}$;

(3) $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1)\boldsymbol{i}+(\lambda a_2)\boldsymbol{j}+(\lambda a_3)\boldsymbol{k}$（$\lambda$为实数）.

即
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3);$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3);$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1,\ \lambda a_2,\ \lambda a_3).$$

定理3 设$A(x_1,\ x_2,\ x_3)$和$B(y_1,\ y_2,\ y_3)$是空间中任意两点，则

(1) 向量 $\overrightarrow{AB}=(y_1-x_1,\ y_2-x_2,\ y_3-x_3)$;

(2) 在线段 AB 上,使得$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}(\lambda\neq-1)$ 的点 M 的坐标是

$$\left(\frac{x_1+\lambda y_1}{1+\lambda},\ \frac{x_2+\lambda y_2}{1+\lambda},\ \frac{x_3+\lambda y_3}{1+\lambda}\right).$$

证 (1) 根据题设,点 A, B 的坐标分别是$(x_1,\ x_2,\ x_3)$, $(y_1,\ y_2,\ y_3)$,它们也是向量$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$的坐标,因为$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$(图 7-1-9),所以

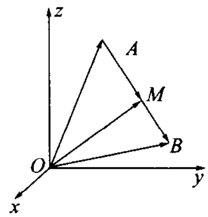


图 7-1-9

$\overrightarrow{AB}=(y_1-x_1,\ y_2-x_2,\ y_3-x_3)$.

(2) 如图 7-1-9,有 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}$,故

$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda\overrightarrow{MB}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})$,

得$\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB})$.

将$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$的坐标代入,即可得结论. 证毕.

上述定理说明:(1) 空间任一有向线段所表示的向量的坐标等于其终点坐标减去始点坐标;(2) 平面解析几何中定比分点坐标公式可推广到空间中. 特别当 $\lambda=1$ 时,则 M 是线段 AB 的中点,

$$M\left(\frac{x_1+y_1}{2},\ \frac{x_2+y_2}{2},\ \frac{x_3+y_3}{2}\right).$$

例 2 任一向量 $\boldsymbol{b}$ 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 共线(即 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$)的充要条件是

$$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\frac{b_3}{a_3}.$$

其中$(a_1,\ a_2,\ a_3)$、$(b_1,\ b_2,\ b_3)$分别是向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的坐标.

证 据定理 1,当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$ 时,存在唯一实数 λ,使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 由题设得, $b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}=\lambda(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})$, 故

$(b_1-\lambda a_1)\boldsymbol{i}+(b_2-\lambda a_2)\boldsymbol{j}+(b_3-\lambda a_3)\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$.

由 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 两两垂直(不共面),得 $b_1-\lambda a_1=b_2-\lambda a_2=b_3-\lambda a_3=0$, 即 $b_1=\lambda a_1$, $b_2=\lambda a_2$, $b_3=\lambda a_3$, 故有

$$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\frac{b_3}{a_3}=\lambda$$

(当 a_1, a_2, a_3 有一个为 0,如 $a_1=0$, a_2, $a_3\neq0$ 时,该式意义为 $b_1=0$, $\dfrac{b_2}{a_2}=\dfrac{b_3}{a_3}$; 当有两个为 0,如 $a_1=a_2=0$,而 $a_3\neq0$, 则该式的意义为 $b_1=0$, $b_2=0$).

反之,当 $\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\frac{b_3}{a_3}=\lambda$ 时,以上过程反推回去,即得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 成立,故 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线.

§7.1.6 向量的模、方向角、投影

1. 向量的模与两点间的距离公式

设 $\boldsymbol{r}=(x, y, z)$,作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$,则 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$(见图 7-1-8).根据勾股定理可知

$$|\boldsymbol{r}|=|OM|=\sqrt{|OP|^2+|OQ|^2+|OR|^2},$$

而 $|OP|=|x|$, $|OQ|=|y|$, $|OR|=|z|$,所以得到如下向量 $\boldsymbol{r}$ 的模的坐标表达式:

(1) $|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

取任意两点 $A(x_1, x_2, x_3)$ 和 $B(y_1, y_2, y_3)$,则 A, B 间的距离 $|AB|$ 为向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模.由 $\overrightarrow{AB}=(y_1-x_1, y_2-x_2, y_3-x_3)$,得 A, B 两点间的距离公式:

(2) $|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2}$.

2. 方向角、方向余弦与方向数

设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量,任取空间一点 O,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$.设 $\angle AOB=\varphi$, $0\leqslant\varphi<\pi$,称 φ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角,记为 $\varphi=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

设 $\boldsymbol{e}$ 是某一确定数轴 Ou 的单位向量,则向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 的夹角 φ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 与数轴 Ou 的夹角,即 $\varphi=(\widehat{\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}})$(见图 7-1-10(a)).

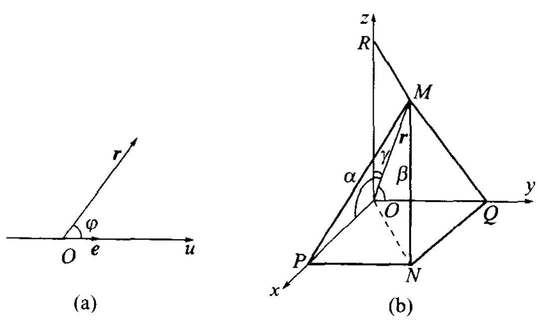


图 7-1-10

非零向量 $\boldsymbol{r}$ 与直角坐标系的三个坐标轴正向的夹角 α, β, γ(见图 7-1-10(b))称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向角**.设非零向量 $\boldsymbol{r}=(x, y, z)$,作 $\overrightarrow{OM}=$

$\boldsymbol{r}$. 由于 $MP \perp OP$,所以

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OM}|} = \frac{x}{|\boldsymbol{r}|},$$

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OM}|} = \frac{y}{|\boldsymbol{r}|},$$

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{OR}}{|\overrightarrow{OM}|} = \frac{z}{|\boldsymbol{r}|}.$$

由此可知 $(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma) = \left(\frac{x}{|\boldsymbol{r}|},\ \frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\ \frac{z}{|\boldsymbol{r}|}\right) = \frac{1}{|\boldsymbol{r}|}(x,\ y,\ z)$

$= \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} = \boldsymbol{e}_r$.

$(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$是与向量 $\boldsymbol{r}$ 同方向的单位向量 $\boldsymbol{e}_r$,它刻划了向量 $\boldsymbol{r}$ 在坐标系中的方向. 称 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向余弦**. 显然

$$|\boldsymbol{e}_r| = \sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = 1.$$

综上所述,下列常用的等式成立:

(3) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$;

(4) $x = |\boldsymbol{r}|\cos\alpha,\ y = |\boldsymbol{r}|\cos\beta,\ z = |\boldsymbol{r}|\cos\gamma$.

设 $\boldsymbol{a} = (l,\ m,\ n)$ 是任一与非零向量 $\boldsymbol{r}$ 共线的向量,即 $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{r}$,由本节例 2 知,

$$\frac{l}{\cos\alpha} = \frac{m}{\cos\beta} = \frac{n}{\cos\gamma}.$$

因此,称 l, m, n 为 $\boldsymbol{r}$ 的**方向数**.

显然,向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦是唯一确定的,但却有无穷组方向数,并且

(5) $\cos\alpha = \frac{l}{k},\ \cos\beta = \frac{m}{k},\ \cos\gamma = \frac{n}{k}\ (k = \pm\sqrt{l^2 + m^2 + n^2})$.

3. 向量的投影

设数轴 Ou 由定点 O 和单位向量 $\boldsymbol{e}$ 所确定(图 7-1-11),对任意向量 $\boldsymbol{r}$,作 $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}$,过点 M 作平面与 Ou 垂直,并与 Ou 交于点 M',称点 M' 为**点 M 在 Ou 轴上的投影**. 设向量 $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{M'M}$,则模 $|\boldsymbol{b}|$ 恰是点 M 到 Ou 轴的距离. 设向量 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OM'}$,称 $\boldsymbol{a}$ 为 $\boldsymbol{r}$ 在 Ou 轴上的**分向量**. 由于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 共线,故存在唯一的实数 λ,使得 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OM'} = \lambda\boldsymbol{e}$,称 λ 为 **$\boldsymbol{r}$ 在 Ou 轴上的投影**,记为 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}$. 由图 7-1-11 可看出 $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{e}$,

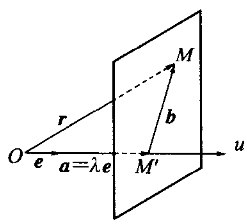


图 7-1-11

$b \perp e$，且向量 a 和 b 确定了 r 的一个分解：

(6) $r = a + b = \lambda e + b$.

上式所给的分解称为向量 r 沿单位向量 e 方向的**正交分解**.

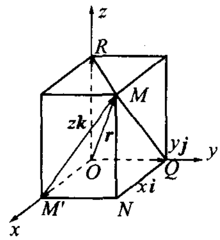


图 7-1-12

在直角坐标系$[O; i, j, k]$中，作$\overrightarrow{OM}=r$，设 r 的坐标是 x, y, z，即 $r = xi + yj + zk$（见图 7-1-12）. 根据向量坐标的定义可知

$$x = \mathrm{Prj}_x r,\ y = \mathrm{Prj}_y r,\ z = \mathrm{Prj}_z r.$$

易证如下的性质：

设 Ou 是单位向量 e 确定的数轴，r, w, v 是任意向量，则

(7) $\mathrm{Prj}_u r = |r| \cos(\widehat{r, e})$;

(8) $\mathrm{Prj}_u(w + v) = \mathrm{Prj}_u w + \mathrm{Prj}_u v$;

(9) $\mathrm{Prj}_u(\lambda w) = \lambda \mathrm{Prj}_u(w)$.

设向量 r 与单位向量 e 的夹角为 φ，即 $\varphi = (\widehat{r, e})$. 由性质(7)可知，当 φ 为锐角时，投影为正；φ 为钝角时，投影为负；φ 为直角时，投影为 0.

习题 7.1

1. 四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB} = a + 2b$, $\overrightarrow{BC} = -4a - b$, $\overrightarrow{CD} = -5a - 3b$ $(a, b \neq 0)$. 证明四边形 $ABCD$ 是梯形.

2. 证明下列不等式，并说明等号何时成立.

(1) $|a| - |b| \leqslant |b - a|$；(2) $|a + b + c| \leqslant |a| + |b| + |c|$.

3. 设 M 是平行四边形 $ABCD$ 的中心，O 是任一点，证明 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OM}$.

4. 设 O 是定点，证明点 M 位于不在同一直线上的三点 A, B, C 所确定的平面上当且仅当存在实数 k_1, k_2, k_3，使得 $\overrightarrow{OM} = k_1\overrightarrow{OA} + k_2\overrightarrow{OB} + k_3\overrightarrow{OC}$，且 $k_1 + k_2 + k_3 = 1$.

5. 证明任意不同的三点 A, B, C 共线的充要条件是存在不全为 0 的实数 k_1, k_2, k_3，使得 $k_1\overrightarrow{OA} + k_2\overrightarrow{OB} + k_3\overrightarrow{OC} = 0$，且 $k_1 + k_2 + k_3 = 0$.

6. 证明任意不同的四点 A, B, C, D 共面的充要条件是存在不全为 0 的实数 k_1, k_2, k_3, k_4，使得 $k_1\overrightarrow{OA} + k_2\overrightarrow{OB} + k_3\overrightarrow{OC} + k_4\overrightarrow{OD} = 0$，且$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0$.

7. 求把点 $A(1, 2, 3)$ 和 $B(-1, 2, 3)$ 之间的线段 AB 分成$\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{1}{2}$的点 M 的坐标.

8. 证明以 $A(4, 1, 9)$, $B(10, -1, 6)$, $C(2, 4, 3)$为顶点的三角形是等腰直角三角形.