



蜗牛科学系列

轻松解读科学奥秘

三角函数超入门

你是否因繁琐复杂的公式而对其敬而远之？

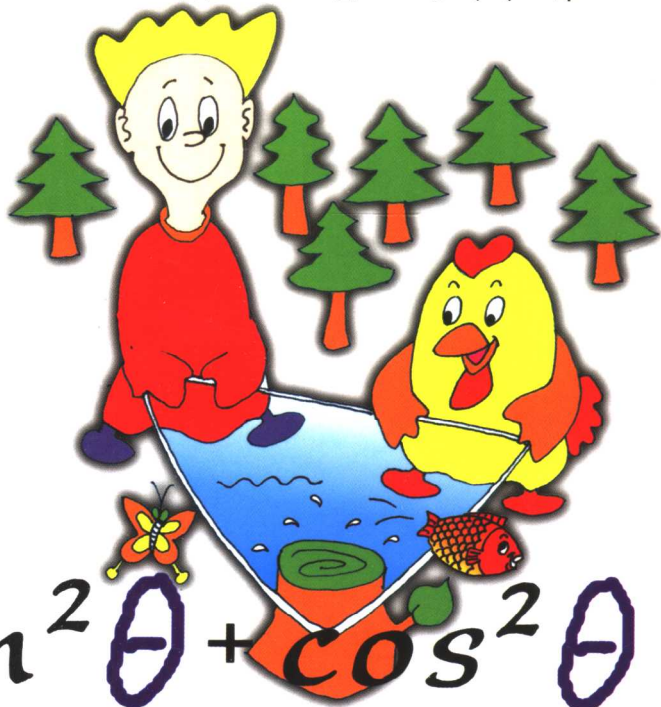
你是否担心自己学不好 \sin 、 \cos ？

你就是本书最合适的读者——

你将发现自己在不知不觉中，

就已经掌握了那令人头疼的三角函数。

〔日〕坂江 正 著 丁玲玲 译



$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

世界图书出版公司



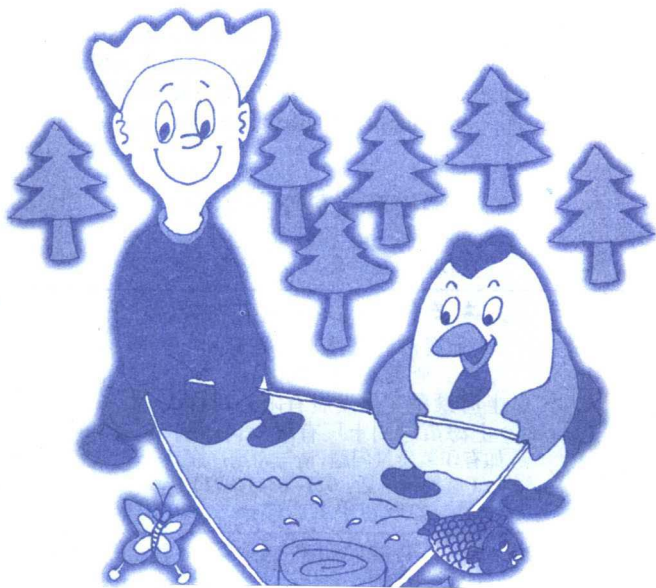
蜗牛科学系列

轻松解**读** **行** **可** **天** **秘**

• • • • •

三角函数超入门

〔日〕坂江 正 著 丁玲玲 译



$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

世界图书出版公司

上海·西安·北京·广州

图书在版编目(CIP)数据

轻松解读科学奥秘:三角函数超入门 / (日)坂江正著;丁玲玲译.
—上海:上海世界图书出版公司,2005.2

(蜗牛科学系列)

ISBN 7-5062-6865-5

I. 轻... II. ①坂... ②丁... III. 三角函数—普及读物
IV. O171-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 116090 号

TITLE: [エスカルゴサイエンス sinとcos 超入門]

by [坂江正]

Copyright © T. Sakae, Japan, 2001

Original Japanese language edition published by NIPPON JITSUGYO PUBLISHING CO., LTD.

All rights reserved, including the right to reproduce this book or portions thereof in any form without the written permission of the original publisher.

Chinese translation rights arranged with NIPPON JITSUGYO PUBLISHING CO., LTD., through Nippon Shuppan Hanbai Inc. Tokyo, Japan.

轻松解读科学奥秘

——三角函数超入门

[日]坂江正 著 丁玲玲 译

上海世界图书出版公司 出版发行

上海市尚文路 185 号 B 楼

邮政编码 200010

上海景皇文化发展有限公司排版

上海市印刷十厂有限公司印刷

如有印装质量问题,请与印刷厂联系

(质检科电话:021-65414992)

各地新华书店经销

开本: 890 × 1240 1/32 印张: 5.75 字数: 150 000

2005 年 2 月第 1 版 2005 年 2 月第 1 次印刷

印数: 1-8000

ISBN 7-5062-6865-5/O·25

图字号: 09-2004-159

定价: 15.00 元

<http://www.wpcsh.com.cn>

《蜗牛科学系列》序

钟启泉

自20世纪60年代以来,随着新科技革命的狂飙突进,人类社会的生活方式以及人的精神世界和价值观念都发生了巨大的变革。科学不仅改变了人类认识世界的思维方式,更把人类生活中某些陈腐不堪的行为习惯和落后观念扫进了历史的垃圾堆或贮存于历史的博物馆。当人类跨入21世纪的门槛时,科学的发展更是日新月异:一方面,知识的高度分化使各门自然科学的分支学科在各自独立的领域内不断地实现着一系列重大的突破;另一方面,社会生活的日益复杂化迫使各门学科不断地走向融合,跨学科的整合已成为时代发展的必然趋势。科学在当代社会生活中所产生的举足轻重的影响以及科学的新发展迫使世界各国十分重视科学教育和科普工作。如何使青少年一代拥有广博的科技知识,掌握精确的科研方法,具有理性的科学精神成为摆在教育界、科技界和出版界面前的一个极为紧迫的时代课题。为解决这一课题,世界各国除大力进行科技教育之外,还不遗余力地进行科普宣传工作,出版了大量优秀的科普读物,如《第一推动丛书》《世界科学大师丛书》《剑桥文丛》《时间简史》等,这些科普读物以其形式多样、内容丰富、主题新颖而备受广大学生与公众的青睐。

科学知识作为一种巨大的社会力量,其本身价值何以体现,主要取决于它被传播和应用的广度与深度。科普读物正是传播科学的一个重要的载体,它以其独特的传播功能成为沟通科学与大众的桥梁,缩短了两者之间的距离。当科普读物作用于不同层次的读者时必然对他们的科学知



识、科学方法和科学精神产生深刻的影响。由于科普读物在传播科学知识、宏扬科学精神、进行科学教育方面所具有的不可替代的功能，我国出版界近年来出版了一批科普读物，旨在帮助人们及时地跟上科学发展的步伐、了解科技发展的最新动态、掌握现代社会所必须的科技知识。但在众多的科普读物中真正优秀的出版物却极为少见，而面向青少年的高质量的科普读物更是凤毛麟角。从已出版的一些科普读物来看，主要存在以下几个缺陷：其一，内容陈旧。所选内容老化，停留于常识性和已过时的一些知识，不能及时反映科学研究的最新成果，从而使公众失去了对科学的敏感性。其二，立意不高。喋喋不休于科学知识的介绍，而忽视科学探究欲的激发以及科学方法的启迪，导致公众对单调刻板的“科学知识”失去了兴趣。其三，风格乏味。在写作风格和编写方式上，以冰冷僵硬的语言进行说教，以居高临下的口气进行指导，以空洞苍白的排版呈现内容，令读者读起来就如喝着白开水一样，枯燥乏味，又如听冗长沉闷的报告一样，昏昏欲睡。

优秀的科普读物有责任把科学发展的最新动态和最新的科研成果及时地介绍给读者，使公众自始至终保持着对科学的敏感，也有责任把科学的最新发展所引发的人们日常生活的变化及时地向公众进行通报，使公众始终保持着对科学的兴趣。与此相应的是，负责任的出版社应把出版优秀的科普读物视为自己义不容辞的职责，及时地向公众推出高质量、有价值，为读者所喜闻乐见的科普读物。鉴于我国目前面向公众的科普读物质量不高以及面向青少年学生的优秀科普读物尚不多见的现状，上海世界图书出版公司译介出版了这套科普读物，以青少年学生作为主要阅读对象，兼顾有一定阅读能力的大众。本套丛书致力于在中学生中普及最新科学知识，弘扬符合时代主题的科学精神并试图打破学科界限，谋求学科知识的整合，弥合长期的文理分科所造成的知识裂痕。这样，既可以



克服理科学生所学专业过难且极枯燥的弊病,又可以为文科学生打开一扇学习科普知识的天窗。

本套科普读物以传播基本的科学原理和最新的科学知识为己任,它所涉及的科学领域既包括数学、微积分、概率统计、物理学、生物学、化学等学科的基本原理,也引入了生化学、遗传学、病理学等新兴学科的最新研究成果。其内容从微观到宏观,从物质科学到生命科学,几乎涵盖了自然科学的所有领域。更为难能可贵的是,为了帮助读者理解基本的科学原理,丛书的作者采用了通俗易懂的语言、妙趣横生的画面和精美别致的图表,这样,即使是非专业的学生读起来,也不会有太大的困难。本套丛书的作者大多是日本知名大学的资深教授,他们驾御文字的功底极为深厚,他们的行文往往若行若止、曲折逶迤,令人回味无穷。大手笔的科普作家能够把音乐创作的方法与激情融入到科普写作中,从而使撰写出来的文章诙谐而不失庄重,幽默而不失严谨,轻松而不失深沉。

本套科普读物将把读者引入一个色彩斑斓、绚丽芬芳的科学世界,读者置身于其中如同在碧草蓝天的旷野中感受科学之花的芳香;又如在烟波浩淼的海洋中领略知识之源的浩瀚。漫步于科学的芳草地,你可以像婴儿贪婪地吮吸母亲乳汁那样品尝大地母亲盛产的科学果实;泛舟于知识的大海洋,你可以像探险家拼命地揭示世界秘密那样撩开科技神秘的面纱。

相信本套丛书的出版必将为我国科普事业的发展吹进一股清新的春风。

2004.9

(作序者为华东师范大学终身教授,教育部人文社会科学重点研究基地华东师范大学课程与教学研究所所长、教育部社会科学委员会委员)



前 言

在理工科或土木建筑等领域中,熟知三角函数是最最基本的要求,就像空气一样,必不可少却又容易被忽视。也许正因为如此,至今也没有出现一本适合初学者的三角函数入门书。

而如果要自学三角函数,也只能借助高中的学习参考书,但这些参考书大多只注重三角函数各种高考题型,有关三角比、三角函数的历史自不待言,连最重要的三角函数实际应用也只寥寥数笔。

正是在这一现状下,日本实业出版社决定出版一本专门介绍三角比、三角函数的入门读本。

要做到能够十分灵活地运用三角函数,微分、积分、复数等一些相关知识必不可少。但本着“超级入门”这一宗旨,本书涉及到的所有知识点都没有超出高中数学范围,其间还有不少是对初中知识点的复习。总之,尽量把入门门槛降低以适合每个初学者。而本书其实也是以笔者在高中任教时的讲义为基础的。

高中数学,尤其从实用性来看,几乎都不涉及实际问题。但三角比却是一个例外,无论是边长还是面积,它总是和那些具体问题联系在一起,在土地测量等实际作业中被频繁应用。于是,我就把三角比放在本书的第一部分里。

在第二部分“三角函数”中,有很多非常相似的公式,这也使得很多学生从这里开始对数学生生厌恶。因此,在这一部分里,本书注重的是一个公式的推导过程,而不是机械地死记硬背某个公式。



如果通过本书的学习,不仅能使读者掌握三角比、三角函数的相关公式,还能切身感到其实用性,那笔者就不胜欣慰了。另外,书中也介绍了很多古今优秀的数学家,希望能让读者感受一下数学的奥妙。

坂江 正

2001年5月



目 录

第一章 原来还有这个式子

- 1 一切都从直角开始
——你知道“毕达哥拉斯定理”吗 / 2
 - 2 已知三边之比就可以大致画出三角形的形状
——边长比为 $1:1:\sqrt{2}$ 和 $1:2:\sqrt{3}$ 的三角形 / 5
 - 3 不用直尺也能画直角
——拥有 5000 年历史的边长之比为 $3:4:5$ 的三角形 / 7
 - 4 三角比表示的是三角形任意两边之比
——注意分子、分母表示的是哪条边 / 9
 - 5 “ $\sqrt{\quad}$ ”到底是一个什么符号
——最早由笛卡儿使用的无理数表示法 / 11
- 专栏 1 流传至今的印度文明 / 15

第二章 首先从锐角三角形的三角比开始

- 1 \sin, \cos, \tan 终于出场了
——三角比的三个标记符号 / 18
- 2 \sin 和 \cos 可以互相转换
——请注意另一个角 / 22
- 3 从三角函数表中我们能知道什么
—— 0° 到 90° 之间各个角度的三角比值 / 24
- 4 三角比的基本用法
——用三角比求边长、面积 / 26
- 5 各三角比之间有着密切的关系吗

——三角比之间的关系 / 28

6 怎么证明三角比之间的相互关系

——利用一边长为1的直角三角形 / 32

专栏2 三角比在日本 / 34

第三章 有点麻烦的钝角三角比

1 钝角也有三角比吗

——外角比较麻烦 / 36

2 0° 、 90° 、 180° 的三角比值

——为什么 $\tan 90^\circ$ 不存在 / 38

3 用 90° 以内的锐角三角比值表示钝角的各三角比值

——注意“ x ”的正负号 / 42

4 幸亏三角比也适用于钝角

——三角形面积公式 / 44

5 三角比相互关系在钝角中也能成立

——三角比相互关系 / 48

专栏3 数字模拟化 / 50

第四章 用余弦定理和正弦定理求三角形的边、角和面积

1 已知两边和夹角求另一边

——余弦定理公式 / 52

2 余弦定理的应用

——钝角三角形、直角三角形都适用 / 54

3 已知三边求角

——余弦定理的活用 / 58

4 已知三边求面积

——任意三角形的面积公式(海伦公式) / 60

- 5 已知两角和夹边求其他两边
——正弦定理公式 / 62
- 6 求三角形的外切圆半径
——理解正弦定理中的 R / 66
- 7 正弦定理的应用
——灵活运用对边、对角 / 68

第五章 三角比的实际应用

- 1 更加熟练地运用余弦定理
——熟练运用根号“ $\sqrt{\quad}$ ” / 72
- 2 用两边和其中一边的对角来画三角形
——形状不确定的三角形 / 74
- 3 三角比在土地测量中的应用
——自己测量数据 / 78

第六章 从三角比扩展到三角函数

- 1 在平面坐标上思考
——从三角比扩展到三角函数 / 82
- 2 三角比的相互关系在三角函数中也能成立
——三角函数之间的关系 / 86
- 3 角度转换时 \sin , \cos 和 \tan 的关系
——无论什么角都能进行 \sin , \cos 互换 / 88

专栏 4 三角函数与坐标 / 93

第七章 你能画出三角函数的图形吗

- 1 $\sin\theta$ 的图象是这样的

- 有周期的波形图 / 96
- 2 $\cos\theta$ 的图象是这样的
 - 把 $\sin\theta$ 的图象向左平移 90° / 100
- 3 $\tan\theta$ 的图象是这样的
 - 周期为 180° 的图象 / 104
- 4 改变振幅、移动中心
 - 几种常见函数图象 / 108
- 5 改变周期、移动起始位置
 - 改变转动的速度 / 110
- 6 了解角速度和频率
 - 使用三角函数时必须掌握的知识点 / 115
- 7 θ 表示的是角度, 还是时间
 - 从物理学到纯数学 / 117

第八章 改变角度 θ ——加法定理

- 1 加法定理
 - $\sin(45^\circ + 30^\circ)$ 并不是 $\sin 45^\circ + \sin 30^\circ$ / 124
- 2 证明加法定理
 - 利用毕达哥拉斯定理和余弦定理 / 128
- 3 角度变为原来的 2 倍后
 - 二倍角公式 / 133
- 4 角度变为原来的 $\frac{1}{2}$ 后
 - 半角公式 / 135
- 5 用加法来计算乘法
 - 积化和差公式 / 137
- 6 用乘法来计算加法
 - 和差化积公式 / 139
- 7 求异名三角比之和
 - $a\sin\theta + b\cos\theta = r\sin(\theta + \alpha)$ / 143

- 8 $a\sin\theta + b\cos\theta$ 的图象是什么形状
—— 无论怎么组合都是正弦曲线 / 147
- 9 用图象表示函数的复合
—— 只能是同名函数之间的复合 / 149
- 10 用长度来度量角度
—— 弧度制 / 153
- 专栏 5** 几乎接近 0 的角度 / 157

第九章 三角函数的应用

- 1 家用交流电
—— 图象是规则的正弦曲线 / 160
- 2 100 V 的交流电是 141V 吗
—— 为了确保与直流电消耗等量电能 / 162
- 3 通过图象看“傅里叶级数”
—— 周期不同的三角函数无限相加会得到什么图象 / 166

第一章

原来还有
这个式子



几何学源于测量土地、天体等实际应用中,在这些实际操作中,直角扮演着非常重要的角色,因为我们在丈量土地面积时必须要用到它。

当我们想画一个长方形时,如果仅仅画成对边相等的四边形,那么就无法保持直角(图 1-1-1),必须把两个直角三角形拼在一起才能构成长方形。这是为什么呢?因为三边一旦固定下来,三角形就不会变形。所以,直角和直角三角形在几何学中非常重要。

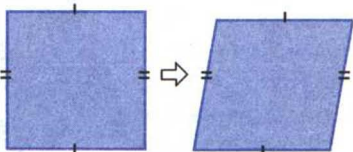


图 1-1-1

在以后的章节里将会频繁地出现三角形,在这里我们先对三角形的三个顶点和三条边的标记符号作一个统一的规定吧。

首先,三角形的三个顶点分别用大写字母 A 、 B 、 C 来表示,与顶点 A 相对的边 BC (称为 A 的对边)用小写字母 a 表示,以此类推,顶点 B 的对边用 b 表示,顶点 C 的对边用 c 来表示。

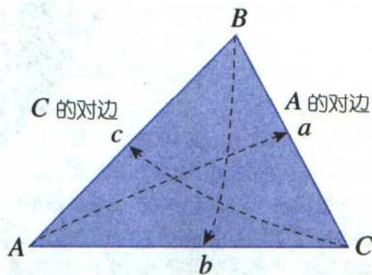


图 1-1-2

有的时候也用 x 或 y 表示边,但是在没有特别说明的情况下, $\triangle ABC$ 的三条边就用刚才我们所规定的符号 a 、 b 、 c 来表示。

另外,表示顶点的大写字母 A 、 B 、 C 还可以代表它所在的内角符号,表示边的小写字母 a 、 b 、 c 也可以代表边长符号,它们都可以用在计算公式里。

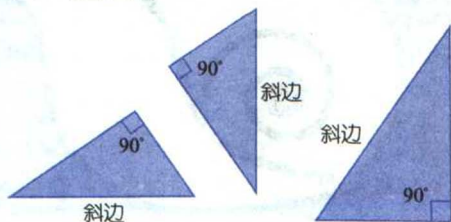


图 1-1-3



毕达哥拉斯定理*

直角三角形有一个非常重要的性质,那就是毕达哥拉斯定理,又叫做三平方定理,即

在直角三角形中,两直角边的平方和等于斜边的平方。

斜边是直角三角形三条边中最长的,并且它一定是直角的对边。因此,不管直角三角形的直角在什么位置上,只要把直角标出来,就能立刻判断出哪条边是斜边。

两个相同数字相乘即是“平方”,而 $\text{cm} \times \text{cm}$ 写作 cm^2 ,读作“平方厘米”。毕达哥拉斯定理中有三个平方,所以它还被称为“三平方定理”。

证明毕达哥拉斯定理的方法有很多。在此,我们可以如图 1-1-4 所示,用四个相同的直角三角形拼成的正方形来证明它。

很明显,图中大正方形的面积是 c^2 ,如果我们用 a 、 b 来计算它的话,就会得出下面的式子:

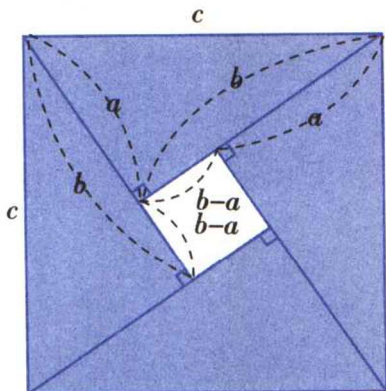


图 1-1-4

$$\begin{aligned}
 \text{大正方形的面积 } c^2 &= \text{ (triangle) } \times 4 + \text{ (square) } \\
 &= \frac{1}{2}ab \times 4 + (b-a)^2 \\
 &= 2ab + b^2 - 2ab + a^2 \\
 &= a^2 + b^2
 \end{aligned}$$

* 译注:在我国被称为“勾股定理”。



$$\therefore a^2 + b^2 = c^2$$

看,我们证明出了毕达哥拉斯定理!

毕达哥拉斯定理(三平方定理)

如图 1-1-5 所示,在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中

$$a^2 + b^2 = c^2$$

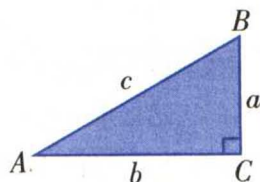


图 1-1-5