祝之光 编

物理学

（第二版）

学习辅导书

祝之光 主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

物 理 学（第二版）
学习辅导书

祝之光　主编
李佐周　吕大韵　编

高等教育出版社

内容简介

本书是与祝之光编《物理学》(第二版)相配套的系列教学参考书之一。本书按《物理学》中各章顺序编写。每章分为基本要求、内容概要、重点指导和基本题型与解法四大部分。编者根据多年的教学经验,针对学生在学习中经常出现的各种问题,精选范例,深入剖析,揭示问题所在,归纳小结分析思路和解题方法,力图使学生准确全面地理解基本物理概念和原理,掌握应用物理概念和规律解决问题的基本思路和方法,切实帮助学生学好大学物理课程。

本书可作为高等学校理工科大学物理的教学参考书或自学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

物理学(第二版)学习辅导书/祝之光主编.—北京:高等教育出版社,2004.11

ISBN 7-04-015564-8

Ⅰ.物… Ⅱ.祝… Ⅲ.物理学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 101848 号

策划编辑 胡凯飞 **责任编辑** 王文颖 **封面设计** 张 志 **责任绘图** 朱 静
版式设计 张 岚 **责任校对** 杨凤玲 **责任印制** 杨 明

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	北京未来科学技术研究所有限责任公司印刷厂		
开 本	787×960 1/16	版 次	2004 年 11 月第 1 版
印 张	13	印 次	2004 年 11 月第 1 次印刷
字 数	240 000	定 价	16.70 元

物料号:15564-00

前　　言

大学物理是大学理工科学生颇感困难的一门课程。为了帮助学生更好地理解教材内容、明确教学要求，把握重点和难点，提高分析问题和解决问题的能力，我们编写了这本教学参考书。本书可作为祝之光编《物理学》(第二版)的主要参考书，也可供使用其他理工科大学物理教材的读者参考。

本书按《物理学》(第二版)各章的顺序编写。每章分为基本要求、内容概要、重点指导、基本题型与解法四大部分。

[基本要求] 指出了每一章的主要教学内容及相应的教学要求，以使学生在学习中能明确目标，分清主次，把握好重点。

[内容概要] 是本章内容的系统概括和提要。包括本章的基本概念和原理，基本规律和公式以及有关的重要内容。可帮助学生在复习时对全章内容作提纲挈领式的回顾和总结。但学生在初次学习各章内容时，不能以此替代教材，而应以教材为主，认真阅读，深入领会。只有在学习并基本掌握了教材内容后，才能真正理解“内容概要”中各点的内在涵义，才可达到纲举目张的效果。

[重点指导] 根据各章的重点难点及教学中可能出现的问题，一般从以下某一(或某几)方面给予重点指导。(1) 对本章的重点和难点问题予以重点阐述或补充说明；(2) 对某些容易混淆的概念、难以理解的问题或学生的常见性错误进行分析讨论；(3) 归纳总结某些独特的研究方法、分析方法或解题方法；(4) 对教材中某些未深入展开的内容作进一步的介绍和分析，以帮助有兴趣的学生学习和理解，但此部分内容不作为教学要求。

[基本题型与解法] 此部分精选了每章中具有典型意义的基本题。这些题既代表了各章主要的基本题型，又具有针对性、示范性和概括性。通过题解，有助于对某些概念和规律的准确、全面的理解，有助于说明某些规律的适用条件及分析应用的方法，有助于归纳小结出同类题的分析思路和解题方法，有助于揭示并分析学生在此类问题中的常见错误，或给出一题多解，使学生开阔思路，提高灵活解题的能力，等等。此外，本部分还选择了少量有一定难度的题，可使学生了解某些较复杂问题的分析处理方法。

本书中打“*”号的部分与《物理学》(第二版)相应部分的要求一致，由读者根据本校教学大纲与教学要求选读。

本书第一、二、四、五、九至十二章由武汉理工大学吕大韵编写，第三、六、七、

八章由广东工业大学李佐周编写。本书的编写是编者多年教学经验的总结，题目的来源等方面参考了部分其他教材和有关资料，在此谨向原著者表示谢意。由于编者水平有限，时间仓促，如有错误或不当之处，敬请批评指正。

编者

2004年7月15日

目　　录

第一章

质点运动　时间　空间

一、基本要求

1. 掌握参考系、惯性参考系、质点等概念；理解“确定参考系并建立坐标系”是描述运动的必要前提.

2. 掌握位置矢量、位移、速度、加速度等描述质点运动的物理量的定义、物理意义及其在直角坐标系中的表示式；理解切向加速度和法向加速度的物理意义及其表示式.

3. 理解运动方程的意义；熟练掌握由运动方程求解速度、加速度的运动学第一类问题；理解运动学第二类问题的求解方法；掌握质点作圆周运动的线量和角量描述.

4. 了解经典时空观及经典相对性原理；理解狭义相对论两条基本原理；会正确运用洛伦兹变换做简单计算.

5. 了解狭义相对论时空观的基本内容(即“同时”的相对性，长度收缩和时间延缓)；能正确运用相对论长度收缩和时间延缓公式做简单计算.

二、内容概要

(一) 质点低速运动的描述

1. 描述运动的前提条件

(1) 确定参考系　由于宇宙间万物都在运动，运动的描述是相对的，因此在对任一具体运动进行描述前，必须首先选择并确定参考系.

(2) 建立坐标系　为了定量描述运动，必须在所选定的参考系中建立适当的坐标系.

2. 描述质点运动的物理量

(1) 位置矢量(位矢、径矢)　描述质点所在空间位置的物理量，用 $\boldsymbol{r}$ 表示.

直角坐标系中

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{1-1}$$

(2) 位移　描述质点位置变化的大小和方向的物理量

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t) \tag{1-2}$$

直角坐标系中

$$\begin{aligned}\Delta \boldsymbol{r} &= [x(t+\Delta t) - x(t)]\boldsymbol{i} + [y(t+\Delta t) - y(t)]\boldsymbol{j} + [z(t+\Delta t) - z(t)]\boldsymbol{k} \\ &= \Delta x\boldsymbol{i} + \Delta y\boldsymbol{j} + \Delta z\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{1-2a}$$

(3) 速度　描述质点位置变化的快慢和方向的物理量

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1-3}$$

直角坐标系中　$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k} \tag{1-3a}$$

(4) 加速度　描述质点速度变化的快慢和方向的物理量

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-4}$$

直角坐标系中　$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k} \\ &= a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{1-4a}$$

自然坐标中　$$\boldsymbol{a} = a_t\boldsymbol{e}_t + a_n\boldsymbol{e}_n = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n \tag{1-4b}$$

其中 $a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 为切向加速度，描述速度大小的变化，$a_t>0$ 时速率增大，$a_t<0$ 时速率减小；$a_n = \frac{v^2}{\rho}$ 为法向加速度，描述速度方向的变化. $\boldsymbol{e}_t$ 为切向单位矢量，沿 t 时刻质点所在位置的轨道切向(指向前进方向)，$\boldsymbol{e}_n$ 为法向单位矢量，与 $\boldsymbol{e}_t$ 方向垂直，指向质点所在位置轨道的曲率中心.

3. 运动方程及运动学两类基本问题

(1) 运动方程　质点的位置随时间变化的函数关系，即

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \tag{1-5}$$

直角坐标系中为　$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \tag{1-5a}$$

(2) 运动学两类基本问题

① 第一类问题　已知运动方程求速度、加速度等. 此类问题的基本解法是根据各量定义求导数.

② 第二类问题　已知速度函数(或加速度函数)及初始条件求运动方程. 此类问题的基本解法是根据各量之间的关系求积分. 例如据 $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，可写出积分式 $\int \mathrm{d}x = \int v\mathrm{d}t$. 由此求出运动方程 $x = x(t)$.

4. 圆周运动的线量和角量描述(见表 1-1)

表 1－1

线 量	角 量	线量与角量关系
位置 s	角位置 θ	$s=R\theta$
路程 Δs	角位移 $\Delta\theta=\theta(t+\Delta t)-\theta(t)$	$\Delta s=R\Delta\theta$
速度 $\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{e}_t=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t$	角速度 $\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$	$v=R\omega$
加速度 $a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}$ $a_n=\frac{v^2}{R}$	角加速度 $\beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$	$a_t=R\beta$ $a_n=R\omega^2$

(二) 质点高速运动的描述(狭义相对论运动学)

1. 狭义相对论基本原理

(1) 相对性原理　在所有惯性系中物理定律的数学形式不变.

(2) 光速不变原理　在所有惯性系中真空中的光速沿各方向均等于 c,与光源和观察者的运动无关.

2. 洛伦兹变换

设S和S′为两惯性系,S′系相对S系以匀速 $\boldsymbol{u}$ 沿 $x(x')$ 轴正向运动($t'=t=0$ 时S与S′系完全重合),某事件在S和S′系的时空坐标分别为 (x,y,z,t) 和 (x',y',z',t'),其坐标变换关系为

$$\text{正变换}\begin{cases}x'=\gamma(x-ut)\\ y'=y\\ z'=z\\ t'=t\end{cases}\tag{1-6}$$

$$\text{逆变换}\begin{cases}x=\gamma(x'+ut')\\ y=y'\\ z=z'\\ t=t'\end{cases}\tag{1-7}$$

上式中 $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$,式(1－6)和(1－7)称为洛伦兹变换.

3. 狭义相对论时空观

① 同时的相对性

在某惯性系中同时发生在同一地点的两事件在其他任何惯性系中亦同时发生;在某惯性系中同时发生的两异地事件,在相对该惯性系运动(运动方向沿两事件所在地的连线方向)的其他惯性系中观测,不再同时发生.

② 长度的相对性(长度收缩)

固有长度(静长或原长)L_0 在相对物体静止的惯性系中所测得的物体的长度.

长度收缩 物体的固有长度最长.在其他相对物体沿物长方向运动的惯性系中观测,物体的长度 L 变短,即

$$L=\gamma^{-1}L_0=\sqrt{1-u^2/c^2}\,L_0 \tag{1-8}$$

③ 时间间隔的相对性(时间膨胀)

固有时间(原时)τ_0 发生在某惯性系中同一地点的两事件的时间间隔.

时间膨胀 两事件的时间间隔以固有时间为最短,在相对上述惯性系运动的其他惯性系中观测,此两事件的时间间隔 Δt 变长,即

$$\Delta t=\gamma\tau_0=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \tag{1-9}$$

三、重点指导

(一) 关于 $\boldsymbol{r}$、$\Delta\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{a}$ 四个物理量

1. 四个物理量中,描述瞬时运动状态的物理量为位矢 $\boldsymbol{r}$ 和速度$\boldsymbol{v}$,描述运动状态变化的物理量是位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$.

2. 四个物理量均为矢量,即它们既有大小又有方向,并且遵从平行四边形合成法则.在理解和应用中应注意下列问题:

(1) 应区分几组概念

① 位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 和路程 Δs;② 速度 $\boldsymbol{v}$ 和速率 v;③ 平均速度$\overline{\boldsymbol{v}}$ 和平均速率 $\overline{v}$(见表 1-2).

表 1-2

物理量	意　义	性质	联　系
位移 $\Delta\boldsymbol{r}$	表示 Δt 时间内质点位置变化的大小和方向	矢量	(1) 在单向直线运动中 $\lvert\Delta\boldsymbol{r}\rvert=\Delta s$ (2) 当 $\Delta t\to 0$ 时 $\lvert \mathrm{d}\boldsymbol{r}\rvert=\mathrm{d}s$
路程 Δs	表示 Δt 时间内质点运动路径的长度	标量	
速度 $\boldsymbol{v}$	表示质点位置变化的快慢和方向	矢量	任一瞬时 $\lvert\boldsymbol{v}\rvert=v$
速率 v	表示质点沿轨道运动的快慢	标量	
平均速度 $\overline{\boldsymbol{v}}$	Δt 时间内质点位置变化的平均快慢和方向	矢量	在单向直线运动中 $\lvert\overline{\boldsymbol{v}}\rvert=\overline{v}$
平均速率 $\overline{v}$	Δt 时间内质点沿轨道运动的平均快慢	标量	

(2) 应正确理解并表示矢量

设任一矢量 $\boldsymbol{A}$，通常有关的表示为

① 矢量 $\boldsymbol{A}$ 的模 $|\boldsymbol{A}|=A$，表示矢量 $\boldsymbol{A}$ 的大小或长度.

② 矢量 $\boldsymbol{A}$ 的增量 $\Delta\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_2-\boldsymbol{A}_1$. $|\Delta\boldsymbol{A}|$ 表示矢量 $\Delta\boldsymbol{A}$ 的大小，即图 1－1 中 $\Delta\boldsymbol{A}$ 的长度（线段 MN 的长度）.

③ 矢量 $\boldsymbol{A}$ 的模（长度）的增量，即图 1－1 中线段 EN 的长度（设 $OE=OM=|\boldsymbol{A}_1|$）. 显然，由图 1－1 知 $|\Delta\boldsymbol{A}|\neq\Delta A$！因此在书写时应正确表示并区分 $\boldsymbol{A}$ 与 A，$\Delta\boldsymbol{A}$ 与 ΔA.（一般在手写表示矢量时，其上方应加"→"号，书刊中用印刷体表示矢量时，一般均用黑体字符表示.）

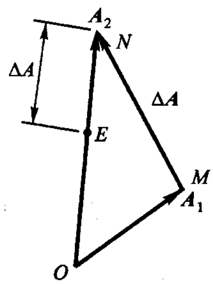


图 1－1

根据以上矢量的基本表示法，本章中应特别注意正确表示和区分以下几组量（见表 1－3）.

表 1－3

符号	所表示的物理量	相关量关系
$\boldsymbol{r}$	位矢	$\boldsymbol{r}\neq r$, $\lvert\boldsymbol{r}\rvert=r$
r	位矢的长度（或模）$r=\lvert\boldsymbol{r}\rvert$	
$\Delta\boldsymbol{r}$	位矢的增量 $\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$	$\Delta\boldsymbol{r}\neq\Delta r$, $\lvert\Delta\boldsymbol{r}\rvert\neq\Delta r$
Δr	位矢长度的增量 $\Delta r=\lvert\boldsymbol{r}_2\rvert-\lvert\boldsymbol{r}_1\rvert$	
$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$	元位移（无限小位移）	$\mathrm{d}\boldsymbol{r}\neq\mathrm{d}r$, $\lvert\mathrm{d}\boldsymbol{r}\rvert\neq\mathrm{d}r$; $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\neq\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$, $\left\lvert\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right\rvert\neq\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\left\{\begin{array}{l}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}\quad(\text{速度})\\ \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=v_r\,(\text{径向速度})\end{array}\right.$
$\mathrm{d}r$	位矢长度的元增量	
$\mathrm{d}\boldsymbol{v}$	速度的元增量	$\mathrm{d}\boldsymbol{v}\neq\mathrm{d}v$, $\lvert\mathrm{d}\boldsymbol{v}\rvert\neq\mathrm{d}v$; $\left\lvert\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right\rvert\neq\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\left\{\begin{array}{l}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{a}\,(\text{加速度})\\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=a_t\,(\text{切向加速度})\end{array}\right.$
$\mathrm{d}v$	速率的元增量	

(3) 在直线运动中，四个物理量不必表示为矢量，均用代数量表示，例如位置用坐标 x，位移用坐标增量 Δx，速度用 v_x（或 v），加速度用 a_x（或 a）表示. 各量为正时，表示其方向沿相应坐标轴正向，负号表示沿坐标轴负向.

3. $\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{a}$ 三量均为瞬时量且具有相对性，即任一瞬时同一运动的 $\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{a}$ 在不同参考系中是不同的.

任一时刻运动质点 P 的位矢 $\boldsymbol{r}$、速度 $\boldsymbol{v}$、加速度 $\boldsymbol{a}$ 在两个相互作平动的参考系 S、S′之间的变换关系为

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_{PS} = \boldsymbol{r}_{PS'} + \boldsymbol{r}_{S'S} \\ \boldsymbol{v}_{PS} = \boldsymbol{v}_{PS'} + \boldsymbol{v}_{S'S} \\ \boldsymbol{a}_{PS} = \boldsymbol{a}_{PS'} + \boldsymbol{a}_{S'S} \end{cases} \tag{1-10}$$

式中足标“PS”意为 P 对 S 系,“PS'”意为 P 对 S′系,“S′S”意为 S′系对 S 系.

(二) 关于狭义相对论中固有长度和固有时间等概念

1. 注意正确理解和区分物体的固有长度、“运动长度”和一般空间间隔等概念

(1) 在同一参考系中两事件的空间坐标之差称为此两事件在该参考系中的空间间隔. 如 $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta x' = x_2' - x_1'$. 两事件的空间间隔在两惯性系 S、S′之间的洛伦兹变换关系为

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - u\Delta t), \quad \Delta x = \gamma(\Delta x' + u\Delta t') \tag{1-11}$$

(2) 当物体相对观察者沿物长方向运动时,测量物体长度时,必须对两端同时测量,所测得的物体长度即所谓物体的“运动长度”.

设相对物体静止的惯性系为 S′系,观测者所在惯性系为 S 系,测量物体两端分别为事件 1 和事件 2,则此两事件在 S′系的空间间隔 $\Delta x'$ 就是物体的固有长度 L_0;而在 S 系的空间间隔 Δx,只有在 $\Delta t = t_2 - t_1 = 0$ 时,才是由 S 系测得的物体的“运动长度”L,即由式(1-11)

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - u\Delta t) = \gamma\Delta x$$

得

$$L = \Delta x = \gamma^{-1}\Delta x' = \gamma^{-1}L_0$$

若 $\Delta t \neq 0$,则 Δx 只是一般空间间隔,而不是物体的“运动长度”. 由此可见,固有长度、“运动长度”均分别是特定条件下的空间间隔. 在处理涉及空间间隔的问题时,应特别注意按照上述条件正确区分并确定以上各量.

2. 注意正确理解和区分固有时间和一般时间间隔概念

(1) 同一参考系中两事件的时间间隔为 $\Delta t = t_2 - t_1$,或 $\Delta t' = t_2' - t_1'$,对每一事件发生的地点无任何限制.

(2) 固有时间是指在某惯性系中发生在同一地点的两事件(或一物理过程)的时间间隔.

例如两事件在 S′中同一地点发生,即 $\Delta x' = 0$,其时间间隔 $\Delta t'$ 为固有时间 τ_0,则在 S 系中测得此两事件的时间间隔为

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{u}{c^2}\Delta x'\right) = \gamma\Delta t' = \gamma\tau_0$$

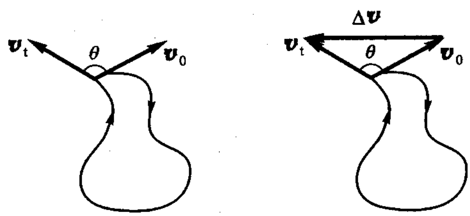
可见，固有时间是特定条件下(同地事件)的时间间隔，应与一般时间间隔相区别.

四、基本题型与解法

(一) 低速运动质点运动的描述

1. 关于描述运动的物理量

例 1-1 一质点从某时刻开始沿一曲线运动，经 Δt 时间后回到出发点. 设所经曲线长度为 s，初速度 $\boldsymbol{v}_0$ 与末速度 $\boldsymbol{v}_t$ 大小相等，夹角为 θ，如例 1-1 图(a)所示.



(a) (b)

例 1-1 图

求：(1) Δt 时间内质点的平均速度和平均速率；

(2) Δt 时间内速率的增量以及速度的增量，作图表示速度增量；

(3) Δt 时间内平均加速度的大小和方向.

解 (1) 据定义，Δt 时间内平均速度为

$$\overline{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$$

因质点在 Δt 时间内位移 $\Delta \boldsymbol{r}=0$，故平均速度为

$$\overline{\boldsymbol{v}}=0$$

平均速率
$$\overline{v}=\frac{s}{\Delta t}$$

(2) Δt 时间内速率增量 $\Delta v=|\boldsymbol{v}(t)|-|\boldsymbol{v}_0|=0$

Δt 时间内速度增量 $\Delta \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(\theta)-\boldsymbol{v}_0$，如例 1-1 图(b)所示，其大小由速度矢量三角形求解得

$$|\Delta \boldsymbol{v}|=2|\boldsymbol{v}_0|\sin\frac{\theta}{2}$$

$\Delta\boldsymbol{v}$ 的方向由$\boldsymbol{v}_0$ 矢端指向$\boldsymbol{v}_t$ 矢端.

(3) Δt 时间内平均加速度 $\overline{\boldsymbol{a}}=\dfrac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}$

其大小$|\overline{\boldsymbol{a}}|=\dfrac{|\Delta\boldsymbol{v}|}{\Delta t}=\dfrac{2|\boldsymbol{v}_0|\sin\dfrac{\theta}{2}}{\Delta t}$,方向与 $\Delta\boldsymbol{v}$ 的方向一致.

说明 由本例可以看到位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 与路程 s、平均速度$\overline{\boldsymbol{v}}$与平均速率 $\bar{v}$、速度增量 $\Delta\boldsymbol{v}$ 与速率增量 Δv 这几组物理量在概念、性质及大小等方面的不同.

例 1-2 设质点的运动方程为 $x=x(t)$, $y=y(t)$. 在计算质点的速度和加速度的大小时,有人先求出 $r=\sqrt{x^2+y^2}$,然后根据 $v=\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$和 $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$求得结果;又有人先计算速度和加速度的分量,再合成求得结果,即 $v=\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$及 $a=\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2}$. 你认为哪一个方法正确,或者两者都正确? 为什么?

答 后一种方法正确. 因速度$\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$,速度的大小$|\boldsymbol{v}|=v=\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|$,但$\dfrac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t}\neq\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$. $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$是位矢模的时间导数,表示位矢长度的时间变化率,称为径向速度,而不等于速度的大小 v. 此外,加速度 $\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$应是速度矢量对时间的导数,而不是速率对时间的导数$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$,后者是切向加速度,并不等于加速度的大小. 因此前一方法是错误的,源于未分清矢量 $\boldsymbol{r}$ 与 r、$\boldsymbol{v}$ 与 v.

2. 运动学的两类基本问题

例 1-3 已知一质点运动方程为 $x=4t$, $y=6t^2$. 求:

(1) 质点轨道方程;

(2) $t=2\mathrm{s}$ 时的速度和加速度;

(3) $t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{s}$ 时的切向加速度和法向加速度及此时质点所在处的轨道曲率半径.

解 (1) 由质点运动方程消去 t 可得轨道方程. 即由 $x=4t$ 得 $t=\dfrac{x}{4}$,代入 $y=6t^2$ 式中得

$$y=\frac{3}{8}x^2$$

(2) 任一时刻质点的速度

$$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}=4\boldsymbol{i}+12t\boldsymbol{j}\ \ (\mathrm{m/s})$$

$t=2\mathrm{s}$ 时，$\boldsymbol{v}=4\boldsymbol{i}+(12\times2)\boldsymbol{j}=(4\boldsymbol{i}+24\boldsymbol{j})\ \mathrm{m/s}$

任一时刻质点加速度

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}=12\boldsymbol{j}\ \ \mathrm{m/s^2}$$

$t=2\mathrm{s}$ 时，$\boldsymbol{a}=12\boldsymbol{j}\ \ \mathrm{m/s^2}$

(3) 任一时刻速率 $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{4^2+(12t)^2}=4\sqrt{1+9t^2}\,(\mathrm{m/s})$

切向加速度

$$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(4\sqrt{1+9t^2})=\frac{36t}{\sqrt{1+9t^2}}\ \ (\mathrm{m/s^2})$$

$t=\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{s}$ 时，
$$a_t=\frac{36\times\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{1+9\times\frac{1}{3}}}\ \mathrm{m/s^2}=6\sqrt{3}\ \ \mathrm{m/s^2}$$

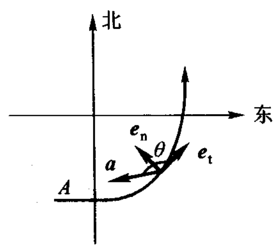
$t=\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{s}$ 时法向加速度为 $a_n=\sqrt{a^2-a_t^2}=\sqrt{12^2-(6\sqrt{3})^2}\,\mathrm{m/s^2}=6\ \ \mathrm{m/s^2}$

此时质点所在处轨道曲率半径为

$$\rho=\frac{v^2}{a_n}=\frac{4^2\times(1+9\times\frac{1}{3})}{6}\mathrm{m}=\frac{32}{3}\mathrm{m}=10.7\mathrm{m}$$

小结 本例是运动学的第一类基本问题．此类问题的基本解法是根据各量定义由运动方程求导得速度和加速度．应注意的是，切向加速度 a_t 应为速率函数的时间导数 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，而不是速度函数的时间导数 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$，因此应先求出速率函数 $v(t)$．此外，对于一般曲线运动，法向加速度一般不易直接由 $a_n=\frac{v^2}{\rho}$ 式求，可先由直角坐标系求出 $v(t)$ 和总加速度 $a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$，然后求切向加速度 a_t，最后由总加速度与加速度分量的关系式 $a^2=a_n^2+a_t^2$，求出法向加速度 $a_n=\sqrt{a^2-a_t^2}$．

例 1-4 列车沿圆弧轨道行驶，方向由西向东逐渐变为向北，其运动规律 $s=80t-t^2$（s 以 m 计，t 以 s 计）．当 $t=0$ 时，列车在 A 点．此圆弧轨道的半径为 1500 m．若把列车视为质点，求列车从 A 点行驶到 $s=1200$ m 处的速率和加速度（假设不考虑列车的逆向运动）．



例 1-4 图

解 如例 1-4 图所示,本题中,$s=80t-t^2$ 为自然坐标中的运动方程,任一时刻速度 $\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{e}_t=\frac{ds}{dt}\boldsymbol{e}_t$,速率 $v=\frac{ds}{dt}=80-2t$ (m/s).

切向加速度 $a_t=\frac{dv}{dt}=-2\text{m/s}^2$

负号表示 a_t 沿 $\boldsymbol{e}_t$ 的反方向.

法向加速度 $a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(80-2t)^2}{1500}$

$s=1200$ m 时,可求得 $t_1=20$ s,$t_2=60$ s(舍去).以 $t=20$ s 代入得

$$v=(80-2\times20)\text{m/s}=40\text{m/s}$$

$$a_t=-2\text{m/s}^2,\quad a_n=\frac{16}{15}\text{m/s}^2=1.07\text{m/s}^2$$

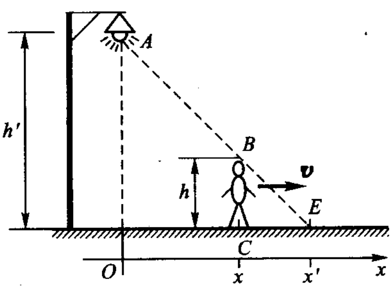
$$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=\sqrt{(-2)^2+1.07^2}\text{m/s}^2=2.27\text{ m/s}^2$$

$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 方向的夹角

$$\theta=180^\circ+\arctan\frac{a_n}{a_t}=180^\circ+\arctan\frac{1.07}{-2}=180^\circ-28.1^\circ=151.9^\circ$$

小结 本例仍为运动学第一类问题.与上例不同处在于给出的是自然坐标中的运动方程.基本数学方法仍是求导.但所求加速度分量为切、法向加速度.注意 $a_t<0$ 的物理意义及此时总加速度 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}_t$ 正向成钝角.

例 1-5 一路灯离地面高度为 h',一身高为 h 的人在灯下沿背离路灯的方向行走.某时刻人与灯的水平距离为 x 时,人行走的速度为 v,求此时人头顶在地面上的影子移动速度的大小.



例 1-5 图

解 以灯的垂线 AO 与路面的交点为原点,人行走方向为 x 轴正向建立坐标,如例 1-5 图所示.以人头顶影子 E 点为研究对象.某时刻 t 人位于 C 处时,坐标为 x,头顶影子 E 点的坐标为 x'.由图示几何关系可知,人行走过程中始终有 $\triangle EBC\backsim\triangle EAO$,应有