

# 中学生数学解题辞典

ZHONGXUESHENG  
SHUXUEJIETI  
CIDIAN

陈森林 主编

河南教育出版社  
HENAN JIAOYU CHUBANSHE

**ZXSSXJTC**

ZHONGXUESHENG  
SHUXUEJIETI CIDIAN

# 中学生 数学解题 辞典

陈森林 主编

ZHONGXUESHENG  
SHUXUEJIETI  
CIDIAN

河南教育出版社

## 中学生数学解题辞典

陈森林 主编

责任编辑 刘宗贤

河南教育出版社出版

河南第一新华印刷厂印刷

河南省新华书店发行

850×1168毫米 32开本 55.25印张 1891千字

1991年6月第1版 1991年6月第1次印刷

印数 1—7,503册

ISBN 7-5347-0830-3/N·2

---

定 价 24.00 元

## 《中学生数学解题辞典》编写人员

主 编 陈森林

编写人员 陈传理 宋 阳 祝湘洲

于卓让 齐世荫 陈 皓

## 前 言

为了帮助广大中学生更好地掌握中学数学基础知识，提高解题能力，以适应进一步学习的需要，我们研究了中学数学教学大纲的要求、目前中学数学课本里的各类习题、近年来高等学校入学考试的数学试题，并在此基础上编写了这本《中学生数学解题辞典》。

提高解题能力的基础是牢固掌握基础知识和基本技能。经验证明，能熟练掌握基础知识和基本技能的同学生，学习提高就较快，应变能力就较强。因此我们非常重视双基的训练，对一些重要的概念和定理，尽量从多方面阐述其实质，指明其用途和用法。

提高解题能力的关键是解题思维能力的训练。要善于理解题意，具体分析矛盾、研究解决矛盾的策略和方案，从而导致问题的解决。因此对于每个专题和题目，我们不仅正确叙述其解法，而且更着重于解题思路的分析和解题规律的探讨。对于同一问题，我们强调一题多解、一题多变，以期提高解题思维的深刻性和灵活性。

习题所涉及的知识和方法都不超过中学数学课本的内容。我们选解了中学课本里的一部分典型题目，而更多的则是在强化它的基础上对习题的综合性和解题方法的灵活性方面予以拓广和提高。对于某些问题解题方法的探讨，仅仅依靠中学课本知识还难理解其真谛，因此我们以习题形式又适当列举了一些有关基本知

识以供参考。

在编排体系上，主要根据中学数学的分科和各科的章节顺序。在习题的顺序上，在各章里尽量做到先易后难、先基本题再综合题，把专题性研究放在最后面。这样全书就形成一个习题的系统，既便于系统地阅读，也便于个别习题的查阅。

本书是在华中师范大学陈森林教授主持下集体编写而成的。各科执笔者分工如下：

代数——陈森林、陈武、陈皓；

平面三角——陈森林；

平面几何——宋阳、齐世荫；

立体几何——祝湘洲；

平面解析几何——陈传理、于卓让；

微积分——陈皓。

熊昌理、陈昆、齐世荫等同志绘制了全部图形，为本书增光添彩，谨致衷心的感谢。

我们期望这本书能促进广大中学生数学解题能力的提高，能作为中学数学教师的参考，能作为师范院校初等数学的参考读物，能促进中学数学教育的改革。但由于水平所限，错误之处在所难免，希望各位不吝指教。

《中学生数学解题辞典》编写组

1989年12月

# 目 录

## 第一编 代 数

### 第一章 实 数

<b>一 整数</b> .....	( 1 )
§1 因数、倍数、整除 .....	( 3 )
§2 完全平方数 .....	( 8 )
§3 质数与合数 .....	( 11 )
§4 奇数与偶数 .....	( 13 )
§5 最大公约数、最小公倍数 .....	( 13 )
<b>二 有理数</b> .....	( 18 )
§1 有理数的概念 .....	( 18 )
§2 有理数的运算 .....	( 19 )
<b>三 实数</b> .....	( 23 )
§1 实数的概念 .....	( 23 )
§2 实数的相反数和绝对值 .....	( 23 )
§3 用有理数逼近无理数 .....	( 24 )
§4 实数的运算 .....	( 27 )
§5 实数的判定 .....	( 30 )
§6 实数的性质 .....	( 35 )

### 第二章 代数式

<b>一 整式</b> .....	( 39 )
§1 整式的加减法 .....	( 39 )
§2 整式的乘法 .....	( 40 )
§3 整式的除法 .....	( 44 )
1. 整式除法 .....	( 44 )
2. 余数定理和因式定理 .....	( 46 )



3. 求被除式 .....	( 48 )
4. 求余式 .....	( 50 )
§4 因式分解 .....	( 52 )
1. 因式分解的概念 .....	( 52 )
2. 二次式的因式分解 .....	( 53 )
3. 三次式的因式分解 .....	( 57 )
4. 四次式的因式分解 .....	( 58 )
5. 五次及五次以上多项式的因式分解 .....	( 63 )
6. 对称式、交代式的因式分解 .....	( 64 )
<b>二 分式</b> .....	( 69 )
§1 约分和通分 .....	( 69 )
§2 分式的加减法 .....	( 71 )
§3 分式的乘除法 .....	( 75 )
§4 分式的四则混合运算 .....	( 76 )
§5 繁分的化简 .....	( 77 )
<b>三 关于有理式的几个问题</b> .....	( 79 )
§1 求有理式的值 .....	( 79 )
1. 给出自变量的值, 求有理式的值 .....	( 79 )
2. 给出自变量满足的等式, 求有理式的值 .....	( 80 )
3. 给出自变量满足的两个等式, 求有理式的值 .....	( 84 )
4. 给出自变量满足的对称等式, 求对称式的值 .....	( 86 )
§2 证明绝对恒等式 .....	( 87 )
1. 把等式两边互相转化或证明等式两边等于同量 .....	( 87 )
2. 应用 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ 的因式分解证明 .....	( 89 )
3. 应用交代式、对称式的性质证明 .....	( 91 )
§3 证明条件等式 .....	( 92 )
1. 应用分析法证明 .....	( 92 )
2. 应用代入法证明 .....	( 93 )
3. 消去某些特殊字母的证明 .....	( 96 )
4. 求证等式是几个等式并集的证明 .....	( 99 )
5. 求证等式是几个等式交集的证明 .....	( 101 )
6. 题设条件是连比或积相等形式的证明 .....	( 103 )

<b>三 根式</b> .....	( 107 )
§1 根式的概念 .....	( 107 )
§2 算术根的性质 .....	( 108 )
§3 根式的化简 .....	( 111 )
1. 分母有理化 .....	( 111 )
2. 复合二次根式变形 .....	( 114 )
3. 根式的化简 .....	( 118 )
§4 求代数式的值 .....	( 121 )
§5 证明等式 .....	( 127 )

### 第三章 方程和方程组

<b>一 方程和方程组</b> .....	( 131 )
§1 方程和方程组的概念 .....	( 131 )
§2 关于方程的同解性 .....	( 134 )
§3 关于方程组的同解性 .....	( 138 )
<b>二 整式方程</b> .....	( 144 )
§1 一元一次方程 .....	( 144 )
1. 一元一次方程 .....	( 144 )
2. 含有字母系数的一元一次方程 .....	( 145 )
§2 一元二次方程 .....	( 147 )
1. 一元二次方程的解法 .....	( 147 )
2. 一元二次方程根的判别式、根与系数的关系及其应用 .....	( 154 )
§3 高次方程 .....	( 182 )
1. 应用因式分解法解高次方程 .....	( 182 )
2. 应用换元法解高次方程 .....	( 183 )
3. 有理数集上的代数方程 .....	( 188 )
<b>三 整式方程组</b> .....	( 191 )
§1 二元一次方程组 .....	( 191 )
1. 数字系数的方程组 .....	( 191 )
2. 含有字母系数的方程组 .....	( 195 )
3. 含有绝对值记号的方程组 .....	( 197 )
§2 多元一次方程组 .....	( 199 )

1. 数字系数的方程组 .....	( 199 )
2. 含有字母系数的方程组 .....	( 203 )
§3 二元二次方程组 .....	( 205 )
1. 第一类型二元二次方程组 .....	( 205 )
2. 第二类型二元二次方程组 .....	( 210 )
§4 高次方程组 .....	( 218 )
1. 二元高次方程组 .....	( 218 )
2. 多元高次方程组 .....	( 220 )
<b>四 分式方程(组) .....</b>	<b>( 226 )</b>
§1 分式方程的基本解法 .....	( 226 )
1. 分式方程的基本解法 .....	( 226 )
2. 分式方程基本解法的同解性定理 .....	( 228 )
§2 特殊分式方程的特殊解法 .....	( 233 )
1. 应用部分分式法 .....	( 233 )
2. 应用合分比定理 .....	( 234 )
3. 应用换元法 .....	( 236 )
§3 含有字母系数的分式方程 .....	( 239 )
§4 分式方程组 .....	( 242 )
<b>五 无理方程(组) .....</b>	<b>( 244 )</b>
§1 含有二次根式的无理方程 .....	( 244 )
1. 应用算术根的概念判断无理方程的解 .....	( 244 )
2. 把方程两边乘以相同次幂 .....	( 244 )
3. 共轭因式法 .....	( 245 )
4. 因式分解法 .....	( 246 )
5. 换元法 .....	( 247 )
§2 含有三次根式的无理方程 .....	( 247 )
1. 形如 $\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)} = \sqrt[3]{h(x)}$ 的方程 .....	( 247 )
2. 其它情形 .....	( 249 )
§3 分式无理方程 .....	( 250 )
§4 含有二重根号的无理方程 .....	( 254 )
§5 含有字母系数的无理方程 .....	( 255 )
§6 无理方程组 .....	( 257 )

**六 列方程(组)解应用题** ..... ( 259 )

    §1 数字问题..... ( 260 )

    §2 行程问题..... ( 263 )

    §3 航行问题..... ( 268 )

    §4 工程问题..... ( 270 )

    §5 混合物问题..... ( 273 )

**第四章 不等式**

**一 不等式的基本性质** ..... ( 276 )

**二 解不等式** ..... ( 278 )

    §1 关于不等式的同解定理..... ( 278 )

    §2 一元一次不等式..... ( 280 )

        1. 一元一次不等式 ..... ( 280 )

        2. 一元一次不等式组 ..... ( 282 )

    §3 一元二次不等式..... ( 284 )

        1. 解一元二次不等式的基本方法 ..... ( 284 )

        2. 一元二次不等式组 ..... ( 288 )

        3. 含有字母系数的一元二次不等式 ..... ( 289 )

        4. 含有绝对值符号的一元二次不等式 ..... ( 292 )

    §4 高次不等式..... ( 292 )

    §5 分式不等式..... ( 296 )

    §6 无理不等式..... ( 298 )

    §7 二元一次不等式(组)..... ( 301 )

    §8 列不等式解应用题..... ( 304 )

**三 证明不等式** ..... ( 306 )

    §1 证明不等式的常用方法..... ( 306 )

        1. 比较法和比值法 ..... ( 306 )

        2. 分析法 ..... ( 308 )

        3. 应用基本不等式证明 ..... ( 310 )

        4. 放缩法 ..... ( 316 )

        5. 数学归纳法 ..... ( 319 )

        6. 反证法 ..... ( 321 )

§2 几个著名不等式	( 322 )
§3 证明含有绝对值符号的不等式	( 326 )
§4 证明条件不等式	( 332 )

## 第五章 函 数

一 函数的概念	( 339 )
二 一次函数	( 340 )
§1 正比函数的图象	( 340 )
§2 一次函数的图象	( 341 )
§3 一次函数图象的应用	( 343 )
§4 含有绝对值记号的一次函数的图象	( 346 )
§5 含有高斯记号的函数的图象	( 352 )
三 二次函数	( 354 )
§1 二次函数的图象	( 354 )
1. 轴的方程和顶点坐标	( 354 )
2. 抛物线族顶点的轨迹	( 356 )
3. 已知抛物线族顶点的位置, 确定抛物线方程中的参数	( 357 )
§2 二次函数的图形变换	( 361 )
1. 对称	( 361 )
2. 平移	( 363 )
§3 含有绝对值符号的二次函数的图象	( 366 )
1. 图象	( 366 )
2. 图象在解方程中的应用	( 367 )
§4 二次函数的极值(最值)	( 370 )
1. 二次函数的最值	( 370 )
2. 二次函数在限制范围内的最值	( 371 )
§5 根据已知条件确定二次函数	( 378 )
四 指数和对数	( 381 )
§1 指数	( 381 )
1. 化简	( 381 )
2. 在给定条件下求代数式的值	( 382 )
3. 证明指数恒等式	( 384 )

§2 对数	( 387 )
1. 计算对数式的值	( 387 )
2. 在给定条件下计算对数式的值	( 390 )
3. 关于对数的证明题	( 393 )
§3 常用对数	( 398 )
<b>五 幂函数、指数函数、对数函数</b>	( 401 )
§1 幂函数的性质	( 401 )
§2 指数函数的性质	( 403 )
§3 对数函数的图象和性质	( 406 )
§4 根据指数函数、对数函数的单调性研究有关函数的单调性	( 407 )
§5 关于指数函数、对数函数的图形变换	( 409 )
<b>六 指数方程和对数方程</b>	( 412 )
§1 指数方程	( 412 )
1. 一元指数方程	( 412 )
2. 指数方程组	( 414 )
§2 对数方程	( 416 )
1. 一元对数方程	( 416 )
2. 含有参数的对数方程	( 419 )
3. 对数方程组	( 421 )
<b>七 指数不等式和对数不等式</b>	( 423 )
§1 数的大小比较	( 423 )
§2 指数不等式	( 426 )
1. 解指数不等式(组)	( 426 )
2. 证明指数不等式	( 428 )
3. 应用问题	( 430 )
§3 对数不等式	( 430 )
1. 解对数不等式	( 430 )
2. 解底数含有字母(参数或未知数)的对数不等式	( 433 )
3. 解对数不等式组	( 434 )
4. 由对数不等式所表示的点的区域	( 436 )
5. 证明对数不等式	( 438 )

## 第六章 函数的进一步研究

一 反函数和复合函数	( 441 )
§1 反函数	( 441 )
§2 复合函数	( 446 )
二 函数性质的讨论	( 451 )
§1 函数的定义域	( 451 )
§2 函数的值域	( 453 )
1. 应用值域的定义求函数的值域	( 453 )
2. 应用互反函数的性质求函数的值域	( 455 )
3. 应用换元法求函数的值域	( 456 )
§3 曲线的对称性	( 456 )
1. 曲线 $F(x, y) = 0$ 的对称性	( 456 )
2. 曲线 $y = f(x)$ 的对称性	( 462 )
3. 函数的奇偶性	( 466 )
§4 函数的周期性	( 470 )
1. 周期函数的概念	( 470 )
2. 最小正周期	( 472 )
3. 关于函数周期性的定理	( 474 )
§5 函数的单调性	( 478 )
1. 应用单调性定义研究函数的单调性	( 478 )
2. 关于函数单调性的定理	( 479 )
3. 应用定理研究函数的单调性	( 483 )
§6 函数的极值(最值)	( 485 )
1. 三次、四次函数的极值	( 486 )
2. 分式函数的极值	( 488 )
3. 无理函数的极值	( 491 )
4. 函数的条件极值	( 497 )
§7 曲线的渐近线	( 506 )
三 函数图象的绘制	( 509 )
§1 讨论函数的性质描绘其图象	( 509 )
§2 应用图形变换描绘函数的图象	( 514 )

1. 图形的对称变换 .....	( 514 )
2. 图形的平移变换 .....	( 514 )
3. 图形的伸缩变换 .....	( 515 )

## 第七章 数 列

<b>一 等差数列</b> .....	( 520 )
§1 等差数列的概念 .....	( 520 )
§2 等差数列的通项公式 .....	( 521 )
§3 等差数列的性质 .....	( 523 )
§4 等差数列的前 $n$ 项和 .....	( 524 )
§5 等差数列的判定 .....	( 530 )
1. 等差数列的判定定理 .....	( 530 )
2. 等差数列的判定 .....	( 531 )
<b>二 等比数列</b> .....	( 535 )
§1 等比数列的概念 .....	( 535 )
§2 等比数列的通项公式 .....	( 536 )
§3 等比数列的性质 .....	( 537 )
§4 等比数列的前 $n$ 项和 .....	( 538 )
§5 等差数列和等比数列 .....	( 543 )
1. 关于等差数列和等比数列的计算题 .....	( 543 )
2. 等差数列和等比数列的判定和证明 .....	( 546 )
<b>三 几种数列的和</b> .....	( 549 )
§1 幂数列 .....	( 549 )
§2 等差数列和等比数列对应项的积构成的数列 .....	( 551 )
§3 各项是二等差数列对应项的乘积构成的数列 .....	( 553 )
§4 各项是等差数列对应项乘积的倒数构成的数列 .....	( 555 )
§5 相同数码型数列 .....	( 557 )
§6 差分数列 .....	( 561 )
1. 差分数列是等差数列的数列 .....	( 561 )
2. 差分数列是等比数列的数列 .....	( 564 )
§7 群数列 .....	( 565 )
§8 由递推式给出的数列 .....	( 567 )



<b>四 数列的应用</b> .....	( 574 )
§1 储蓄问题 .....	( 574 )
1. 定期储蓄 .....	( 574 )
2. 零存整取 .....	( 575 )
§2 分期付款 .....	( 576 )
§3 堆垛问题 .....	( 577 )

## 第八章 复 数

<b>一 复数</b> .....	( 580 )
§1 关于复数的计算 .....	( 580 )
1. 有关 $i$ , $w$ 的计算 .....	( 580 )
2. 用复数三角式计算 .....	( 583 )
§2 复数的模、辐角、共轭复数 .....	( 585 )
§3 复数性质的判定 .....	( 591 )
§4 与复数有关的最值问题 .....	( 595 )
§5 关于复数的证明题 .....	( 599 )
<b>二 复数在几何中的应用</b> .....	( 608 )
§1 用复数表示平面上的点 .....	( 608 )
§2 复数与平面上点的轨迹 .....	( 611 )
§3 用复数解几何题 .....	( 616 )
<b>三 复数在代数中的应用 (复数和解方程)</b> .....	( 619 )
§1 对于复系数方程求实数 $x$ , $y$ .....	( 619 )
§2 复数集上的一次方程 (组) .....	( 619 )
§3 复数集上的二次方程 .....	( 620 )
§4 二项方程 .....	( 622 )
§5 三项方程 .....	( 626 )
§6 复数集内的高次方程 .....	( 627 )
§7 含有复数的模的方程 .....	( 633 )

## 第九章 排列、组合、二项式定理、数学归纳法

<b>一 排列与组合</b> .....	( 637 )
§1 加法原理与乘法原理 .....	( 637 )