

世界数学



奥林匹克

解题大辞典 几何卷

中国数学奥林匹克委员会
南开大学数学系



河北少年儿童出版社



世界数学

奥林匹克

解题大辞典 几何卷

本卷主编 吴振奎
王连笑
刘玉翘



河北少年儿童出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

世界数学奥林匹克解题大辞典. 几何卷/吴振奎等
主编. —石家庄: 河北少年儿童出版社, 2003

ISBN 7 - 5376 - 2584 - 0

I. 世… II. 吴… III. 几何课-中学-竞赛题-解
题 IV. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 22542 号

世界数学奥林匹克解题大辞典

几何卷

中国数学奥林匹克委员会 南开大学数学系

河北少年儿童出版社出版

河北新华印刷一厂印刷

新华书店经销

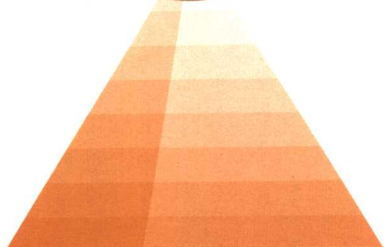
开本 850×1168 毫米 1/32 印张 38

2003 年 1 月第 1 版 2005 年 8 月第 2 次印刷

印数: 1—3000

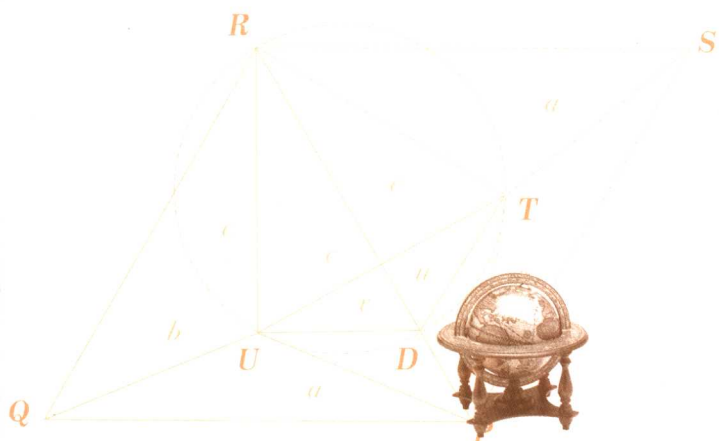
ISBN 7 - 5376 - 2584 - 0

G·1754 定价: 56.20 元



世界数学奥林匹克解题大辞典

中国数学奥林匹克委员会
南开大学数学系





《世界数学奥林匹克解题大辞典》编委会

顾 问
吴大任

名誉主编
陈省身

主 编
周学光

副主编
许以超 李成章(常务) 侯自新
韩凤岐 袁宗沪

委 员
王连笑 刘玉翘 许以超 李成章
吴振奎 侯自新 张筑生 杜锡录
周学光 胡晓光 夏兴国 黄玉氏
韩凤岐 舒五昌 袁宗沪

代数卷主编
黄玉氏 夏兴国

几何卷主编
吴振奎 王连笑 刘玉翘

数论卷主编
王连笑

组合卷主编
李成章

选择题卷主编
吴振奎

序 言



王元

数学奥林匹克是对青少年极其有益的一项活动.它通过科学与趣味相统一的丰富多彩的题目,使许许多多的优秀学生在中学时期就经受了考验,接受了各种现代数学思想的熏陶,使他们提高了能力,增长了知识,开阔了眼界.数学奥林匹克活动的广泛开展,不仅丰富了中学生的课外活动,促进了中学数学教学的改革,而且发现和培养了一大批有才能的青年,这些青年将成为我国科学界在下一个世纪赶超世界先进水平的中坚力量.

数学竞赛中没有失败者.虽然每年参加中国数学奥林匹克的选手百余人,作为国家队出国参加国际数学奥林匹克的选手也只有六人,但是,那些因为运气不佳,培训不足,见识不广或临场发挥不理想等因素而没有获胜的学生也不是失败者.他们在参加竞赛及培训中所培养起来的求解难题的兴趣和欲望,那种永不满足,勇攀高峰的精神,分析问题的严密的逻辑思维,解决问题的灵活多样的应变能力以及对现代数学思想的理解和积累,正是进行成功的科学研究并在将来成为科学家的必要条件.因此说,这远比在一次竞赛中获胜更为宝贵.他们中的许多人进入大学后成为学习尖子,有些人正在攻读硕士和博士学位并成为数学研究队伍中的后起之秀,就是最有力的证明.即使对于那些进入大学后改学其他

专业的学生,他们也将因思维敏捷,头脑灵活,勇于创新 and 具有较强的数学能力而使自己终身受益.因此,数学奥林匹克必将继续下去.

数学奥林匹克已有一百多年的历史,且越来越受到重视,现在,每年举办数学奥林匹克的国家和地区已超过 70 个.已有的竞赛题目成千上万,其中构思独特、新颖别致、灵活深邃的题目有几千道之多,而且还在以每年几百道的速度继续增长.这些题目散载于国内外的各种书籍与杂志之中,任何个人手中的资料都很不完整,使用起来极不方便.这次河北少年儿童出版社邀请国内数学奥林匹克界的专家、教授和高级教练员共同精选了国内外数学奥林匹克的试题并给出精辟、准确的解答,编写了这套《世界数学奥林匹克解题大辞典》.这是一次很有意义的壮举,是一项艰苦而又巨大的工程,是我国数学奥林匹克事业的一项基本建设.本书的出版,必将推动我国的数学奥林匹克事业稳步地向前发展,有助于我国在国际数学奥林匹克中保持优势,立于世界数学强国之林,就此我以兴奋的心情对这套解题大辞典的出版表示热烈的祝贺,并对在此书编写过程中付出辛勤劳动的各位作者和出版过程中做出多方面努力的编辑人员及支持本书出版的各位领导表示衷心的感谢.

近 10 年来,我国学生在国际数学奥林匹克中不断取得好成绩,我国所提供的候选题也接连被选为试题,这是值得高兴的事情.但是,我们也应清醒地看到,与一些先进国家相比,我国开展数学奥林匹克和参加国际数学奥林匹克的时间毕竟不长,这方面的资料也不很完全.因此,这套辞典的内容也是不很完全的.此外,以后每年新出现的竞赛题目也要补充进来.希望大家继续努力,不断完善这套大辞典的内容,为数学奥林匹克事业做出新贡献.



目 录

上篇 平面几何

第一章 线段、角或弧相等	3
(一) 线段相等	3
1. 三角形中的线段相等问题	
2. 多边形中的线段相等问题	
3. 直线形与圆中的线段相等问题	
(二) 角相等	59
1. 三角形中的角相等问题	
2. 多边形中的角相等问题	
3. 直线形与圆中的角(弧)相等问题	
第二章 线段、角或弧的和差倍分	104

(一) 线段的和差倍分	104
(二) 角或弧的和差倍分	117
第三章 线段的比例式或乘积式	141
第四章 直线垂直或平行问题	178
(一) 垂直问题	178
(二) 平行问题	221
第五章 点共线与线共点	241
(一) 点共线、点在直线上	241
(二) 线共点	277
第六章 点共圆或圆共点	303
(一) 点共圆	303
(二) 圆共点	328
第七章 线段或角的计算	335
(一) 线段的计算	335
1. 三角形中的线段计算	
2. 多边形与圆中的线段计算	
(二) 角的计算	380
1. 三角形中的角的计算	
2. 多边形及圆内角的计算及其他	
第八章 面积的等式与求值问题	426
(一) 三角形面积	426
(二) 四边形面积	454
(三) 五边形、六边形、……、多边形面积	475
(四) 圆和其他图形的面积	487
第九章 定值问题	497
第十章 轨迹问题	524
第十一章 作图问题	547
(一) 求作点	547
(二) 求作线段或直线	561
(三) 求作三角形	569

(四) 求作多边形、圆及其他	593
第十二章 几何不等式	605
(一) 关于线段的不等式	605
1. 三角形中的线段不等式	
2. 多边形中的线段不等式	
3. 直线形与圆中的线段不等式	
(二) 关于角的不等式	674
(三) 关于面积的不等式	692
1. 三角形中的面积不等式	
2. 多边形中的面积不等式	
3. 直线形与圆中的面积不等式	
第十三章 极值问题	740
(一) 线段极值问题	740
1. 三角形中的线段极值	
2. 多边形中的线段极值	
(二) 面积极值问题	761
1. 三角形中的面积极值	
2. 多边形中的面积极值	
(三) 极值杂例	785
第十四章 覆盖问题	802
第十五章 杂题	839

中篇 立体几何

第十六章 直线与平面	913
第十七章 多面体	943
(一) 正方体、长方体、棱柱	943
(二) 三棱锥(四面体)、四棱锥、 n 棱锥	967
(三) 棱台、多面体	1033
第十八章 旋转体	1048
(一) 四面体与球	1048

(二) 圆柱、圆锥、圆台与球	1065
(三) 球与其他	1079

下篇 解析几何

第十九章 向量与解析几何	1099
(一) 向量问题	1099
(二) 解析几何	1108
1. 坐标系、直线方程、直线形	
2. 圆	
3. 椭圆	
4. 抛物线	
5. 双曲线	
6. 解析几何杂例	
附录	1180
索引	1180
历届国际数学奥林匹克概况	1203
编者的话	1205

上篇 平面几何

第一章 线段、角或弧相等

(一) 线段相等

1. 三角形中的线段相等问题

1·1 已知:等边 $\triangle ABC$,延长 BC 到 D ,延长 BA 到 E ,且使 $AE = BD$,连 CE 、 DE . 求证: $CE = DE$.

(中国北京市数学竞赛,1982年)

[证] 在 BD 延长线上取点 F 使 $DF = BC$
 (如图).

则 $BE = BA + AE = BC + BD = DF + BD = BF$.

又 $\angle B = 60^\circ$,知 $\triangle BEF$ 为等边三角形.

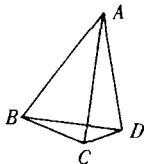
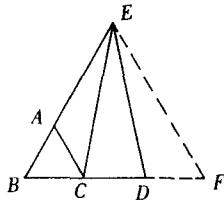
$\therefore \angle F = \angle B = 60^\circ$,且 $EF = BE$.

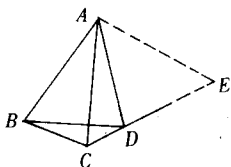
在 $\triangle BCE$ 与 $\triangle FDE$ 中, $BC = DF$, $\angle B = \angle F$,又 $BE = EF$,则 $\triangle BCE \cong \triangle FDE$.

$\therefore CE = DE$.

1·2 如图,已知: $\angle ABD = \angle ACD = 60^\circ$, $\angle ADB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BDC$. 求证: $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

(中国湖北省武汉市数学竞赛,1990年)





[证] 延长 CD 到 E , 使 $DE = BD$, 连接 AE .

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle BDC,$$

$\therefore AD$ 平分 $\angle BDE$.

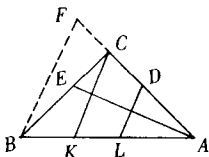
$\therefore \triangle ABD \cong \triangle AED$.

则有 $\angle ABD = \angle E = 60^\circ$, $AB = AE$.

在 $\triangle ACE$ 中, $\angle ACE = \angle E = 60^\circ$, 则 $\triangle ACE$ 是等边三角形, 所以 $AB = AC$, 即 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

1.3 在等腰直角三角形 ABC 的两直角边 CA 、 CB 上分别取点 D 、 E , 使 $CD = CE$, 从点 C 、 D 引直线 AE 的垂线, 这两条垂线的延长线分别交斜边 AB 于 K 、 L . 求证: $KL = KB$.

(第 8 届全苏数学奥林匹克, 1974 年)



[证] 延长 AC 到 F , 使 $CF = CE$. 连 BF , 则 $\triangle ACE \cong \triangle BCF$.

$$\therefore \angle FBC = \angle CAE = \angle ECK.$$

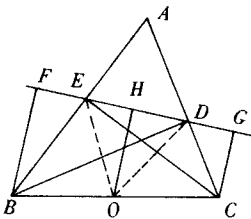
$$\therefore FB \parallel CK.$$

又 $\because CK \parallel DL$, $\therefore FB \parallel CK \parallel DL$.

$$\therefore CF = CD, \therefore KB = KL.$$

1.4 锐角 $\triangle ABC$ 中, BD 和 CE 是其相应边上的高. 分别过顶点 B 和 C 引直线 ED 的垂线 BF 和 CG , 垂足为 F 、 G . 求证: $EF = DG$.

(第 22 届全苏数学奥林匹克, 1988 年)



[证] 由题设知 $\angle BEC = \angle BDC = 90^\circ$, 从而

B 、 C 、 D 、 E 四点共圆, 且 BC 中点 O 为其圆心.

过 O 作 $OH \perp DE$ 于 H , 则 $EH = HD$.

又 $\because BF \parallel OH \parallel CG$, $BO = OC$,

$$\therefore FH = HG.$$

$$\therefore EF = FH - EH = HG - HD = DG.$$

1.5 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C$ 为直角, $\angle A = 30^\circ$, 分别以 AB 、 AC 为边在 $\triangle ABC$ 的外侧作正 $\triangle ABE$ 和正 $\triangle ACD$, 且 DE 与 AB 交于 F . 求证:

$EF = FD$.

(中国北京市数学竞赛, 1985年)

[证1] 过 D 作 $DG \parallel FA$ 交 EA 的延长线于 G .

$\because \angle BAE = 60^\circ, \angle CAD = 60^\circ,$
 $\angle BAC = 30^\circ,$
 $\therefore \angle DAG = 30^\circ.$
 $\therefore \angle BAD = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ,$ 且 $DG \parallel FA.$
 $\therefore \angle ADG = 90^\circ.$

又 $\because AD = AC, \therefore \triangle ABC \cong \triangle AGD.$
 $\therefore AG = AB = AE, \therefore A$ 是 EG 中点.

又 $\because AF \parallel DG, \therefore EF = FD.$

[证2] 过 E 作 $EG \perp AB$ 于 G , 于是

$\triangle EBG \cong \triangle ABC.$

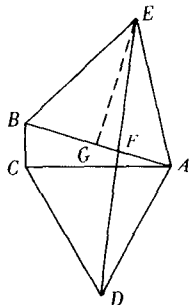
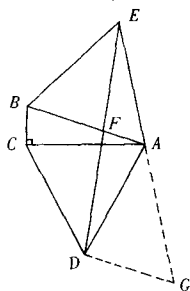
$\therefore EG = AC = AD.$

又 $\because \angle DAF = \angle DAC + \angle CAF$
 $= 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ = \angle EGF,$

且 $\angle EFG = \angle DFA,$

$\therefore \triangle EGF \cong \triangle DAF.$

$\therefore EF = FD.$



1.6 锐角 $\triangle ABC$ 的高交于点 O . 在线段 OB 和 OC 上各取点 B_1 和 C_1 , 使得 $\angle AB_1C = \angle AC_1B = 90^\circ$. 求证: $AB_1 = AC_1$.

(美国纽约数学奥林匹克, 1976年)

[证] 如图, 在直角 $\triangle AB_1C$ 和直角 $\triangle AC_1B$ 中, 由射影定理可知

$$AC_1^2 = AC_2 \cdot AB,$$

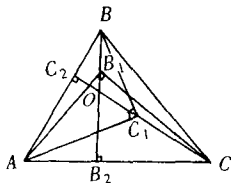
$$AB_1^2 = AB_2 \cdot AC.$$

又 $\because \angle CC_2B = \angle BB_2C = 90^\circ,$

$\therefore B, C_2, B_2, C$ 四点共圆, 内割线定理得

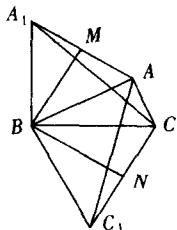
$$AB_2 \cdot AC = AC_2 \cdot AB.$$

因此 $AC_1^2 = AB_1^2,$



即 $AC_1 = AB_1$.

1.7 过 $\triangle ABC$ 的顶点 B 在形外引直线 BM 和 BN , 使 $\angle ABM = \angle CBN$. 点 A 关于直线 BM 的对称点是 A_1 , 点 C 关于直线 BN 的对称点是 C_1 . 求证: $AC_1 = A_1C$.



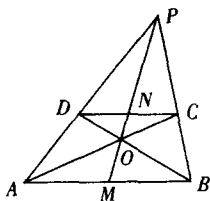
(莫斯科数学奥林匹克, 1963 年)

[证] 如图, 依题设,

$$\begin{aligned} \because A_1B &= AB, BC = BC_1 \\ \angle A_1BC &= 2\angle ABM + \angle ABC \\ &= 2\angle CBN + \angle ABC = \angle ABC_1 \\ \therefore \triangle A_1BC &\cong \triangle ABC_1 \\ \text{故 } A_1C &= AC_1. \end{aligned}$$

1.8 试证: 经过梯形的对角线的交点以及两腰延长线的交点的直线平分两底.

(基辅数学奥林匹克, 1954 年)

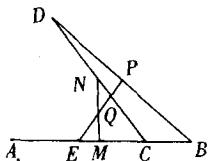


[证] 设 AB 和 CD 分别是梯形 $ABCD$ 的下底和上底. O 是对角线的交点, P 是两腰的延长线的交点. M 和 N 是直线 PO 与两底 AB 和 CD 的交点. 如图.

$$\begin{aligned} \therefore \frac{AM}{DN} &= \frac{MP}{NP} = \frac{MB}{NC}, \frac{AM}{NC} = \frac{MO}{ON} = \frac{MB}{ND}, \\ \therefore \frac{AM}{MB} &= \frac{DN}{NC}, \frac{AM}{MB} = \frac{NC}{DN}. \end{aligned}$$

因此 $\left(\frac{AM}{MB}\right)^2 = 1$. 故 $AM = MB$.

同理可证 $DN = NC$.



1.9 如图, 设线段 AB 的中点为 M , 从 AB 上另一点 C 向直线 AB 的一侧引线段 CD ; 令 CD 的中点为 N , BD 的中点为 P , MN 的中点为 Q . 求证: 直线 PQ 平分线段 AC .

(中国高中数学联赛, 1978 年)

[证] 设直线 PQ 交 AC 于 E , 连 NP , 因 N, P 分别为 CD, BD 的中点, 故 $NP \parallel CB$.