世界数学

奥林匹克

解题大辞典 几何卷

中国数学奥林匹克委员会
南开大学数学系

河北少年儿童出版社

世界数学

奥林匹克

解题大辞典 几何卷

本卷主编 吴振奎
王连笑
刘玉翘

河北少年儿童出版社

图书在版编目（CIP）数据

世界数学奥林匹克解题大辞典．几何卷/吴振奎等主编．—石家庄：河北少年儿童出版社，2003
ISBN 7-5376-2584-0

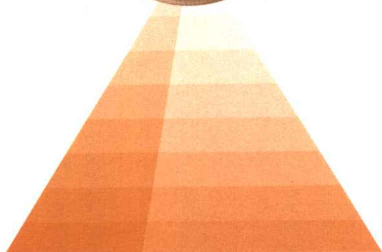
Ⅰ．世…　Ⅱ．吴…　Ⅲ．几何课-中学-竞赛题-解题　Ⅳ．G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 22542 号

世界数学奥林匹克解题大辞典
几何卷
中国数学奥林匹克委员会　南开大学数学系

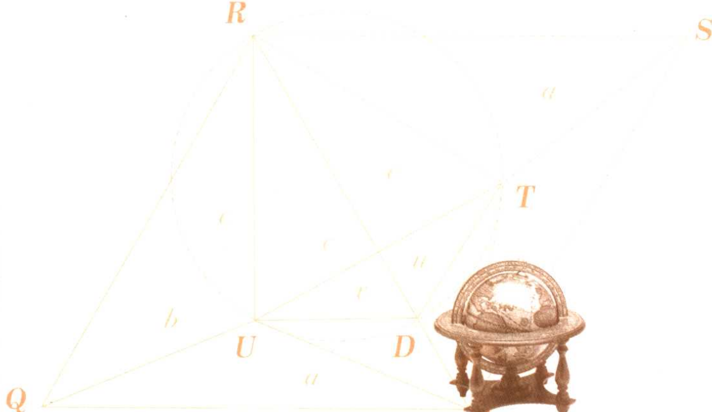
河北少年儿童出版社出版
河北新华印刷一厂印刷
新　华　书　店　经　销
开本 850×1168 毫米 1/32　印张 38
2003 年 1 月第 1 版　2005 年 8 月第 2 次印刷
印数:1—3000

ISBN 7-5376-2584-0
G·1754　定价:56.20 元



世界数学奥林匹克解题大辞典

中国数学奥林匹克委员会
南开大学数学系



序　言

王元

数学奥林匹克是对青少年极其有益的一项活动.它通过科学与趣味相统一的丰富多彩的题目,使许许多多的优秀学生在中学时期就经受了考验,接受了各种现代数学思想的熏陶,使他们提高了能力,增长了知识,开阔了眼界.数学奥林匹克活动的广泛开展,不仅丰富了中学生的课外活动,促进了中学数学教学的改革,而且发现和培养了一大批有才能的青年,这些青年将成为我国科学界在下个世纪赶超世界先进水平的中坚力量.

数学竞赛中没有失败者.虽然每年参加中国数学奥林匹克的选手百余人,作为国家队出国参加国际数学奥林匹克的选手也只有六人,但是,那些因为运气不佳,培训不足,见识不广或临场发挥不理想等因素而没有获胜的学生也不是失败者.他们在参加竞赛及培训中所培养起来的求解难题的兴趣和欲望,那种永不满足,勇攀高峰的精神,分析问题的严密的逻辑思维,解决问题的灵活多样的应变能力以及对现代数学思想的理解和积累,正是进行成功的科学研究并在将来成为科学家的必要条件.因此说,这远比在一次竞赛中获胜更为宝贵.他们中的许多人进入大学后成为学习尖子,有些人正在攻读硕士和博士学位并成为数学研究队伍中的后起之秀,就是最有力的证明.即使对于那些进入大学后改学其他

专业的学生,他们也将因思维敏捷,头脑灵活,勇于创新和具有较强的数学能力而使自己终身受益.因此,数学奥林匹克必将继续下去.

数学奥林匹克已有一百多年的历史,且越来越受到重视,现在,每年举办数学奥林匹克的国家和地区已超过70个.已有的竞赛题目成千上万,其中构思独特、新颖别致、灵活深邃的题目有几千道之多,而且还在以每年几百道的速度继续增长.这些题目散载于国内外的各种书籍与杂志之中,任何个人手中的资料都很不完整,使用起来极不方便.这次河北少年儿童出版社邀请国内数学奥林匹克界的专家、教授和高级教练员共同精选了国内外数学奥林匹克的试题并给出精辟、准确的解答,编写了这套《世界数学奥林匹克解题大辞典》.这是一次很有意义的壮举,是一项艰苦而又巨大的工程,是我国数学奥林匹克事业的一项基本建设.本书的出版,必将推动我国的数学奥林匹克事业稳步地向前发展,有助于我国在国际数学奥林匹克中保持优势,立于世界数学强国之林,就此我以兴奋的心情对这套解题大辞典的出版表示热烈的祝贺,并对在此书编写过程中付出辛勤劳动的各位作者和出版过程中做出多方面努力的编辑人员及支持本书出版的各位领导表示衷心的感谢.

近10年来,我国学生在国际数学奥林匹克中不断取得好成绩,我国所提供的候选题也接连被选为试题,这是值得高兴的事情.但是,我们也应清醒地看到,与一些先进国家相比,我国开展数学奥林匹克和参加国际数学奥林匹克的时间毕竟不长,这方面的资料也不很完全.因此,这套辞典的内容也是不很完全的.此外,以后每年新出现的竞赛题目也要补充进来.希望大家继续努力,不断完善这套大辞典的内容,为数学奥林匹克事业做出新贡献.

目　录

上篇　平面几何

中篇 立体几何

目录

下篇　解析几何

上篇　平面几何

第一章　线段、角或弧相等

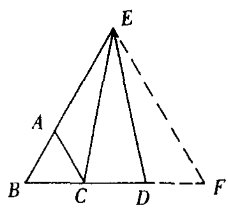
(一)线段相等

1. 三角形中的线段相等问题

1·1　已知:等边$\triangle ABC$,延长BC到D,延长BA到E,且使$AE=BD$,连CE、DE.求证:$CE=DE$.

(中国北京市数学竞赛,1982年)

[证]　在BD延长线上取点F使$DF=BC$(如图).



则　$BE=BA+AE=BC+BD=DF+BD=BF$.

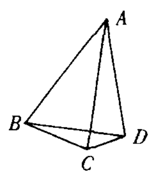
又　$\angle B=60°$,知$\triangle BEF$为等边三角形.

$\therefore$　$\angle F=\angle B=60°$,且$EF=BE$.

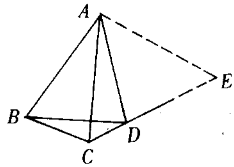
在$\triangle BCE$与$\triangle FDE$中,$BC=DF$,$\angle B=\angle F$,又$BE=EF$,则$\triangle BCE\cong\triangle FDE$.

$\therefore$　$CE=DE$.

1·2　如图,已知:$\angle ABD=\angle ACD=60°$,$\angle ADB=90°-\frac{1}{2}\angle BDC$.求证:$\triangle ABC$是等腰三角形.



(中国湖北省武汉市数学竞赛,1990年)



[证] 延长 CD 到 E,使 $DE=BD$,连接 AE.

$\because \quad \angle ADB=90^\circ-\frac{1}{2}\angle BDC$,

$\therefore \quad AD$ 平分 $\angle BDE$.

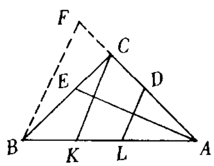
$\therefore \quad \triangle ABD \cong \triangle AED$.

则有 $\angle ABD=\angle E=60^\circ$, $AB=AE$.

在 $\triangle ACE$ 中,$\angle ACE=\angle E=60^\circ$,则 $\triangle ACE$ 是等边三角形,所以 $AB=AC$,即 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

1·3 在等腰直角三角形 ABC 的两直角边 CA、CB 上分别取点 D、E,使 $CD=CE$,从点 C、D 引直线 AE 的垂线,这两条垂线的延长线分别交斜边 AB 于 K、L.求证:$KL=KB$.

(第 8 届全苏数学奥林匹克,1974 年)



[证] 延长 AC 到 F,使 $CF=CE$.连 BF,则 $\triangle ACE \cong \triangle BCF$.

$\therefore \quad \angle FBC=\angle CAE=\angle ECK$.

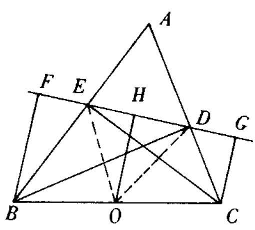
$\therefore \quad FB /\!/ CK$.

又 $\because \quad CK /\!/ DL$, $\quad \therefore \quad FB /\!/ CK /\!/ DL$.

$\because \quad CF=CD$, $\quad \therefore \quad KB=KL$.

1·4 锐角 $\triangle ABC$ 中,BD 和 CE 是其相应边上的高.分别过顶点 B 和 C 引直线 ED 的垂线 BF 和 CG,垂足为 F、G.求证:$EF=DG$.

(第 22 届全苏数学奥林匹克,1988 年)



[证] 由题设知 $\angle BEC=\angle BDC=90^\circ$,从而

B、C、D、E 四点共圆,且 BC 中点 O 为其圆心.

过 O 作 $OH \perp DE$ 于 H, 则 $EH=HD$.

又 $\because \quad BF /\!/ OH /\!/ CG$, $BO=OC$,

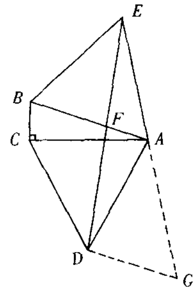
$\therefore \quad FH=HG$.

$\therefore \quad EF=FH-EH=HG-HD=DG$.

1·5 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle C$ 为直角,$\angle A=30^\circ$,分别以 AB、AC 为边在 $\triangle ABC$ 的外侧作正 $\triangle ABE$ 和正 $\triangle ACD$,且 DE 与 AB 交于 F.求证:

$EF=FD$.

（中国北京市数学竞赛，1985 年）



［证 1］ 过 D 作 $DG\parallel FA$ 交 EA 的延长线于 G.

$\because\ \angle BAE=60^\circ,\ \angle CAD=60^\circ,$

$\angle BAC=30^\circ,$

$\therefore\ \angle DAG=30^\circ.$

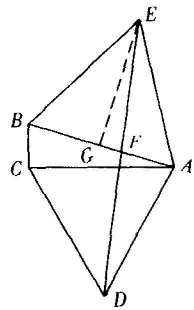
$\because\ \angle BAD=30^\circ+60^\circ=90^\circ$，且 $DG\parallel FA$.

$\therefore\ \angle ADG=90^\circ.$

又$\because$ $AD=AC$， $\therefore$ $\triangle ABC\cong\triangle AGD$.

$\therefore$ $AG=AB=AE$， $\therefore$ A 是 EG 中点.

又$\because$ $AF\parallel DG$， $\therefore$ $EF=FD$.



［证 2］ 过 E 作 $EG\perp AB$ 于 G，于是

$\triangle EBG\cong\triangle ABC$.

$\therefore$ $EG=AC=AD$.

又$\because$ $\angle DAF=\angle DAC+\angle CAF$

$=60^\circ+30^\circ=90^\circ=\angle EGF$,

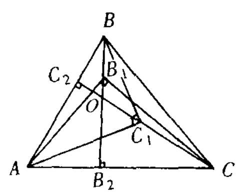
且 $\angle EFG=\angle DFA$,

$\therefore$ $\triangle EGF\cong\triangle DAF$.

$\therefore$ $EF=FD$.

1·6 锐角$\triangle ABC$ 的高交于点 O. 在线段 OB 和 OC 上各取点 B_1 和 C_1，使得$\angle AB_1C=\angle AC_1B=90^\circ$. 求证：$AB_1=AC_1$.

（美国纽约数学奥林匹克，1976 年）



［证］ 如图，在直角$\triangle AB_1C$ 和直角$\triangle ABC_1$ 中，由射影定理可知

$AC_1^2=AC_2\cdot AB$,

$AB_1^2=AB_2\cdot AC$.

又$\because$ $\angle CC_2B=\angle BB_2C=90^\circ$,

$\therefore B,C_2,B_2,C$ 四点共圆，内割线定理得

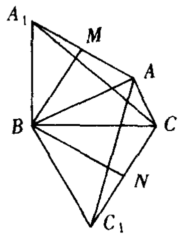
$AB_2\cdot AC=AC_2\cdot AB$.

因此 $AC_1^2=AB_1^2$,

即· $AC_1 = AB_1$.

1·7 过$\triangle ABC$的顶点B在形外引直线BM和BN,使$\angle ABM = \angle CBN$.点A关于直线BM的对称点是A_1,点C关于直线BN的对称点是C_1.求证:$AC_1 = A_1C$.

(莫斯科数学奥林匹克,1963年)



[证] 如图,依题设,

$\because$ $A_1B = AB$, $BC = BC_1$

$\angle A_1BC = 2\angle ABM + \angle ABC$

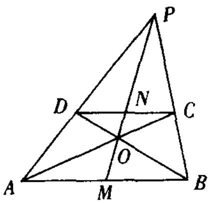
$= 2\angle CBN + \angle ABC = \angle ABC_1$

$\therefore$ $\triangle A_1BC \cong \triangle ABC_1$

故 $A_1C = AC_1$.

1·8 试证:经过梯形的对角线的交点以及两腰延长线的交点的直线平分两底.

(基辅数学奥林匹克,1954年)



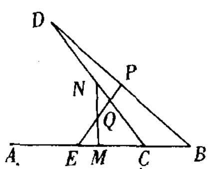
[证] 设AB和CD分别是梯形$ABCD$的下底和上底.O是对角线的交点,P是两腰的延长线的交点.M和N是直线PO与两底AB和CD的交点.如图.

$$\because \quad \frac{AM}{DN} = \frac{MP}{NP} = \frac{MB}{NC}, \quad \frac{AM}{NC} = \frac{MO}{ON} = \frac{MB}{ND},$$

$$\therefore \quad \frac{AM}{MB} = \frac{DN}{NC}, \quad \frac{AM}{MB} = \frac{NC}{DN}.$$

因此 $\left(\frac{AM}{MB}\right)^2 = 1$. 故 $AM = MB$.

同理可证 $DN = NC$.



1·9 如图,设线段AB的中点为M,从AB上另一点C向直线AB的一侧引线段CD;令CD的中点为N,BD的中点为P,MN的中点为Q.求证:直线PQ平分线段AC.

(中国高中数学联赛,1978年)

[证] 设直线PQ交AC于E,连NP,因N,P分别为CD、BD的中点,故$NP \mathbin{/\mkern-5mu/} CB$.