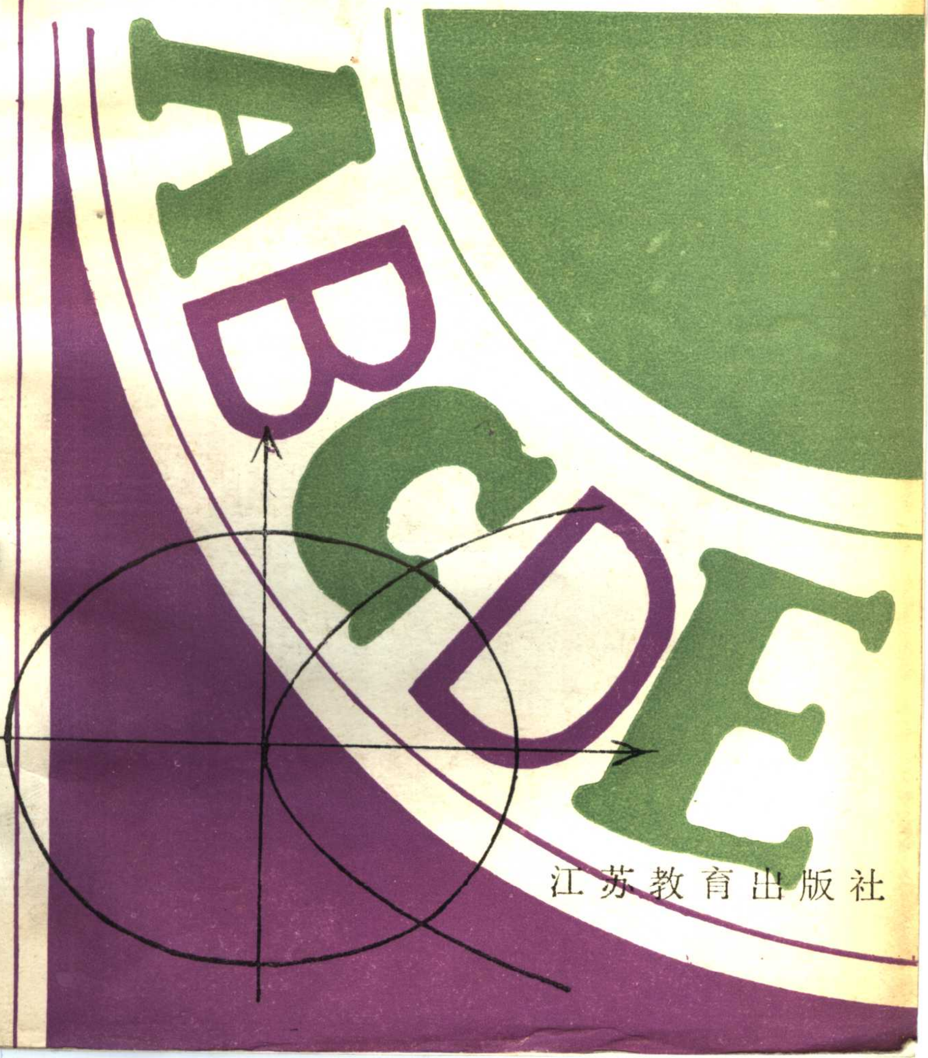
高中数学选择题设计与解法



江苏教育出版社

高中数学选择题设计与解法

赵 振 威 著

江 苏 教 育 出 版 社

高中数学选择题设计与解法

赵振威 著

江苏教育出版社出版

江苏省新华书店发行　　淮阴新华印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米 1/32　印张 6.5　字数 137,000

1986 年 12 月第 1 版　1986 年 12 月第 1 次印刷

印数 1-53,550 册

书号：7351・381　　定价：0.91 元

责任编辑　王建军

前　言

当前，在国内外考试改革中，数学选择题以其特有的形式和作用，受到了人们的普遍重视。我国从1983年起，高考数学试题也已部分地采用了选择题。

围绕数学选择题，有三个基本课题：一是数学选择题的本质是什么；二是如何设计数学选择题；三是怎样解答数学选择题。本书从高中数学教学的实际需要出发，以探讨选择题的解法为重点，对三个基本问题展开了全面的讨论。就解题方法而论，选择题的各种解题思路，渊源于它的设计思想；深刻理解前两个问题，有助于中学数学教师开展教学研究，改进教学方法，从根本上提高学生解答选择题的能力。

为了便于读者了解自己的解题能力，体察解答选择题的意义和作用，本书一、二两部分所举的例子，均未给出详细解答，各题后面的括号里，提供了本题的答案。有兴趣的读者可以逐一进行解答，如果一时解不出来，也不要着急，当您认真地读完本书的时候，这些问题是不难解出的。

鉴于目前中学数学课本很少安排选择题，我们根据全日制高中数学教学内容，有重点地编选了一部分富有思考性的选择题，供高中学生练习和思考。这些习题是按照初等代数、平面三角、立体几何、解析几何的顺序编排的，读者可结合平时的学习，有目的地选解。

作　者

一九八六年一月

目　　录

一、什么是数学选择题

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的科学。整个数学大体上都是围绕形和数这两个基本概念的提炼、演变、发展而展开的。数学的研究和成果，数学知识的内在联系，常常表现在数学的概念、判断和推理之中。

数学选择题，就其本质而论，就是给出若干由概念所组成的数学判断，要求确定其真假。本章从数学概念和数学判断入手，择要讨论数学选择题的一些基础知识。

§1 数学概念

概念是最基本的思维形式。任何一门科学，都是由一系列的概念及其体系组成的。如果把人的思维比作一个有机体，那么概念就是这个有机体上的细胞。

1. 什么是概念

概念是人们对客观事物的一种认识，是反映客观事物本质的思维形式。无论什么事物，只要我们认识了它的本质，就会在自己头脑里产生相应的概念。

从总体上说，数学概念是通过社会实践，把大量生动的关于现实世界空间形式和数量关系的材料，经过去粗取精、

去伪存真、由此及彼、由表及里的改造制作工夫得来的。

概念不同于感觉。感觉是具体的、直接的；概念是抽象的、概括的。抽象性和概括性是概念不同于感觉的重要特征。例如，“正方形”这个概念，已经舍弃了对象的具体内容，只剩下区别于其它图形的特点。“正方形”的概念谁也看不见，在现实世界中，人们只能看到各种各样具体的正方形，如方桌面、方巾、方形操场等等。概念是主观的抽象形式与客观的具体内容的辩证统一，它不是远离了客观事物，而是更接近于客观事物，抓住了客观事物的本质，是对客观事物更深刻、更正确、更完整的反映。

2. 概念的内涵和外延

一切客观事物，都有质和量两个方面的特性。作为反映客观事物的概念，也可以从这两个方面去分析。这就形成了概念的内涵和外延。

概念的**内涵**是概念所反映的对象的本质的总和（即概念所反映的对象的质的方面）；概念的**外延**是概念所反映的对象的总和（即概念所包括的对象的数量，或所指对象的范围）。例如，“由三条线段围成的图形”，是“三角形”这一概念的内涵，它反映了“三角形”的本质属性；而“锐角三角形”、“直角三角形”、“钝角三角形”等则是“三角形”这一概念的外延，它反映了“三角形”的总和。

概念的内涵和外延不是一成不变的。有的概念在发展过程中，它的内容不断丰富，不断充实；有的概念发展以后，更加抽象化、一般化，后者包含了前者，前者就变成了后者的特例；还有的概念发展以后，与原概念有了不同的涵义。

例如，角的概念，最初仅局限于平面，并在180°以内，有锐角、直角、钝角；而后发展到平角、周角；进而可以为(正的)任意角。规定了旋转方向以后，又有了正角、负角的概念。在空间研究的时候，又有空间两直线所成的角、直线与平面所成的角、平面与平面所成的角，等等。这样，角的概念就在发展中逐步充实、完备。因此，只有深刻理解概念的内涵，准确掌握概念的外延，从质和量两个方面明确概念所反映的对象，才能在各种错综复杂的情况下，将以隐蔽形式出现的数学概念辨认出来，顺利地解题。

从上面的例子可以看出，在明确概念的内涵和外延时，既要看到在事物发展的一定阶段上，概念的内涵和外延总是确定的，不能随心所欲地改变，也就是概念的确定性；同时，也要充分看到随着客观事物的发展和变化，概念的内涵和外延也会发生相应的变化，也就是概念的灵活性。只有把概念的确定性和灵活性辩证地统一起来，才能正确地认识客观事物。

3. 概念间的关系

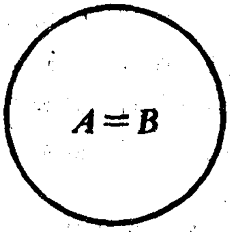
反映客观事物的概念是互相联系的。弄清概念之间的关系，可以帮助我们进一步明确概念的内涵和外延，克服概念混淆的逻辑错误。

中学数学中常见的概念间的关系，主要有以下各种：

(1) **相容关系**

如果两个概念的外延至少有一部分互相重合，那么它们之间的关系叫做相容关系。常见的相容关系，有同一关系、从属关系和交叉关系。

同一关系 如果两个概念的外延完全重合，那么这两个概念之间的关系叫做**同一关系**，这两个概念叫做**同一概念**。例如，“最小的正素数”与“最小的正偶数”；“无理数”与“无限不循环小数”都是同一概念。



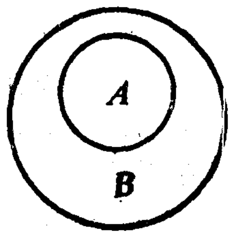
同一关系

图 1-1

同一概念可用图 1-1 表示，圆表示概念的外延，A、B 表示两个概念。

同一概念反映的是同一对象，但是对于这个同一对象是从不同的意义上来反映的，因而它们的内涵是不同的。例如，“最小的正素数”和“最小的正偶数”这两个概念，它们所反映的对象都是“2”，但反映的角度是不同的。前者是从“2是最小的正素数”这一方面来反映的；后者则是从“2是最小的正偶数”这一侧面来刻划的。

从属关系 如果一个概念(A)的外延被另一概念(B)的外延全部包含，那么这两个概念之间的关系叫做**从属关系**。外延较大的概念(B)叫做**属概念**，外延较小的概念叫做**种概念**（图1-2）。例如，“有理数”和“实数”是两个从属关系的概念，“实数”是属概念，“有理数”是种概念。



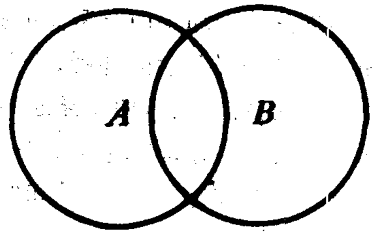
从属关系

图 1-2

属概念和种概念是相对而言的。同一个概念，可以是属概念，也可以是种概念。例如，“平行四边形”这一概念，相对于“矩形”来说是属概念，而相对于“四边形”来说却是种概念。

从概念的内涵上来分析，每一个种概念都具有它的属概念的内涵，此外还有它自己特有的内涵；从概念的外延上来考察，每一个属概念的外延，比它的每一个种概念的外延要大。

交叉关系　如果两个概念的外延仅有一部分互相重合，那么这两个概念的关系叫做**交叉关系**，这两个概念叫做**交叉概念**（图 1-3）。例如，“矩形”与“菱形”是呈交叉关系的两个概念。



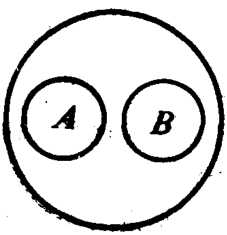
交叉关系

图 1-3

交叉概念有一部分外延是共同的，这一部分共同外延所反映的对象，同时具有两个概念的内涵。例如，“矩形”和“菱形”共同的外延所反映的对象是“正方形”，正方形同时具有矩形和菱形的内涵。

（2）**不相容关系**

如果两个概念的外延互相排斥，那么这两个概念之间的关系叫做**不相容关系**。常见的不相容关系有对立关系和矛盾关系。



对立关系

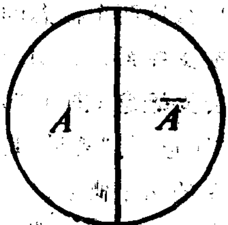
图 1-4

对立关系　如果两个概念的外延互相排斥，而其外延相加之和小于某一属概念的外延，那么这两个概念之间的关系，相对于这一属概念而言，叫做**对立关系**，这两个概念叫做**对立概念**（图 1-4）。例如，“正有理数”和“负有理数”这两个概念的外延之和，小于其属概念“有理数”的外延，所以它们

相对于“有理数”而言，是对立概念。

对立概念具有属概念的内涵，但这两个概念本身特有的内涵是互相否定的。

矛盾关系　如果两个概念的外延互相排斥，其外延相加之和等于某一属概念的外延，那么这两个概念之间的关系，相对于这一属概念而言，叫做**矛盾关系**，这两个概念叫做**矛盾概念**（图 1-5）。例如，“零”和“非零”；“大于”和“不大于”都是矛盾概念。



矛盾关系

图 1-5

矛盾概念也都具有属概念的内涵，这两个概念本身特有的内涵也是互相否定的。但是，矛盾概念中的否定概念，其具体内容与所相对的属概念密切相关。例如，“零”和“非零”这对矛盾概念，如果是相对于“有理数”而言的，则“非零”是指“非零有理数”，即“正有理数”和“负有理数”；如果是相对于“实数”而言的，则“非零”是指“非零实数”，即“正实数”和“负实数”。所以，在考察矛盾概念中的否定概念的具体内容时，必须与所相对的属概念联系起来。

4，定义

定义是揭示概念内涵的逻辑方法。也就是通过指出概念所反映的事物的本质来明确概念的逻辑方法。

一切定义都由两部分组成，即定义者和被定义者。**被定义者**是需要明确的概念，**定义者**是用来明确被定义者的概念。例如，“平行四边形”这一概念，通常定义为：“平行四边

形是两组对边分别平行的四边形”。这里，“平行四边形”是被定义者，“两组对边分别平行的四边形”是定义者。

给概念下定义有多种方式，在数学中常见的有以下各种：

(1)属加种差定义

所谓**属加种差定义**，就是定义者由属与种差组成的定义。例如，要给“平行四边形”这个概念下定义，就要先找到它的属概念。我们知道，平行四边形包含在四边形里面，四边形就是它的属。但是，四边形这个属里，除了包含平行四边形这个种以外，还包括梯形、不规则四边形等，所以还要进一步找出平行四边形所具有的、区别于其它四边形的性质。我们把这种性质叫做**种差**。容易知道，平行四边形的种差是：“两组对边分别平行”。于是，用属加种差就可以得到平行四边形的定义：

$$\underbrace{\text{平行四边形}}_{\text{被定义者}}\ \text{是}\ \underbrace{\text{两组对边分别平行的}}_{\text{种差}}\ \underbrace{\text{四边形}}_{\text{属}}$$
$$\text{被定义者} = \text{种差} + \text{属}$$

对于同一个事物来说，种差往往不是唯一的。因此，用属加种差作出的定义一般也不是唯一的。例如，关于平行四边形的概念，也可以这样来定义：“平行四边形是两组对边分别相等的四边形”、“平行四边形是一组对边平行且相等的四边形”；“平行四边形是两条对角线互相平分的四边形”等等。容易证明，这些定义都是彼此等价的。

(2)发生定义

发生定义，是用事物发生或形成过程中的情况作种差的定义。例如，椭圆的定义：如果平面内一个动点到两定点的距离之和等于定长，则动点的轨迹叫做椭圆。这是一个关于椭

圆的发生定义，它的种差是如何描出椭圆的情况。

(3)**约定式定义**

约定式定义，是通过约定的方式来下的定义。例如，"零指数"的概念规定为：$a^0=1\ (a\neq 0)$；"零阶乘"的概念规定为：$0!=1$。这种规定不是主观臆想的，而是以符合客观规律为前提的。

此外，数学中的一些原始概念，如点、直线、平面、集合等，因为没有比它们更高的属概念，所以不能用属加种差的方法来下定义。这类原始概念，通常用比较和描述的方法，揭示它们所反映的对象的基本特征，以代替定义。

数学中还有一些概念，如延长、介于等，既不定义，也不描述，而是直接作为明显的常识应用的。

5．划分

划分是揭示概念外延的逻辑方法。也就是通过把一个属概念分为若干个种概念来明确概念的逻辑方法。

把一个属概念分成若干个种概念，前者叫做**划分的母项**，后者叫做**划分的子项**。例如，圆锥曲线可分为椭圆（包括圆）、双曲线、抛物线三类。这里，"圆锥曲线"是划分的母项，"椭圆"、"双曲线"、"抛物线"是划分的子项。

有些概念的划分，情况比较复杂，这时采用二分法是比较合适的。所谓**二分法**，就是按概念的对象是否具有某一性质来进行的划分，即把属概念的外延，一贯地分为两个互相矛盾的概念，一直分到不必再分为止。

有时，为了便于划分，还常常把二分法和三分法结合起来使用。例如，对于复数的划分，可以用下表给出：

- 复数 ($a+bi$, a、$b\in R$)
  - 实数 ($b=0$)
    - 有理数
      - 正有理数
        - 正整数(自然数)
        - 正分数
          - 正有限小数
          - 正无限循环小数
      - 非正非负有理数——零
      - 负有理数
        - 负整数
        - 负分数
          - 负有限小数
          - 负无限循环小数
    - 无理数
      - 正无理数——正无限不循环小数
      - 负无理数——负无限不循环小数
  - 虚数 ($b\neq 0$)
    - 纯虚数 bi ($a=0$)
    - 非纯虚数 $a+bi$ ($a\neq 0$)

§2　数学判断

判断是思维的另一种重要形式。判断由概念组成，概念用判断揭示。如果把概念比作思维的一环，那么判断就是由概念之环所组成的思维链条。

1．什么是判断

判断是对客观事物有所肯定或有所否定的思维形式。例如，在研究有理数的时候，我们容易作出这样的判断："正数都大于零"；"负数都小于零"；"零既不是正数，也不是负数"，等等。

判断有真假之分。一个判断如实地反映了客观事物的情况，就是**真判断**；否则，就是**假判断**。上面提到的几个判断，都是真判断。而"任意两个无理数的和是无理数"却是一个假判断。因为两个无理数的和不一定是无理数，譬如，$\sqrt{2}$和它的相反数$-\sqrt{2}$都是无理数，但它们的和$\sqrt{2}+(-\sqrt{2})$

$=0$ 却是有理数．因此，只有做到判断恰当，在质和量上都正确地反映客观事物的真实性，而无虚假，才能严密准确地进行思维，从根本上提高解题的能力．

从判断的结构形式上来考察，判断可分为简单判断和复合判断两大类．下面，我们分别进行讨论．

2．简单判断

简单判断也叫**直言判断**，它是由两个概念组成、用单句来表达的判断．下面的例子是数学中常见的简单判断．

例 1　(1)任何一个集合是它本身的子集．

(2)负数没有对数．

(3)有些一元二次方程有两个相等的实数根．

(4)有些无理数不是不尽方根．

简单判断由主项、谓项、量项、联项四个部分组成．

主项表示判断的对象．例 1 中，“集合”、“负数”、“一元二次方程”、“无理数”分别是四个判断的主项．

谓项表示主项具有或者不具有的性质．例 1 中，“它本身的子集”、“对数”、“两个相等的实数根”、“不尽方根”分别是四个判断的谓项．

量项表示主项的数量，反映判断的量的差别．根据量的多少，量项可以分为全称量项和特称量项两类．表示对象全体的叫做**全称量项**，常用“所有”、“一切”、“任何”、“凡”、“每一个”等词表达．表示对象一部分的叫做**特称量项**，常用“有些”、“有的”等词表达．在数学中，为了表达简洁，简单判断的全称量项常常省略．如例 1(2)省略了量项“所有”．

联项表示判断是肯定的还是否定的，反映判断的质的差

异。根据质的不同，联项可分为肯定联项和否定联项两类。通常用"是"或"有"表示**肯定联项**；用"不是"或"没有"表示**否定联项**。简单判断的肯定联项，有时也可以省略。

根据量项的"全称"或"特称"的量，以及联项的"肯定"或"否定"的质，简单判断可以分为四种形式：

①全称肯定判断　如例1(1)，它的形式是

所有S是P。

这里，S表示判断的主项，P表示判断的谓项。

②全称否定判断　如例1(2)，它的形式是

所有S不是P。

⑧特称肯定判断　如例1(3)，它的形式是

有些S是P。

④特称否定判断　如例1(4)，它的形式是

有些S不是P。

此外，还有单称肯定判断，如"π是无理数"，单称否定判断，如"$\lg\sqrt{10}$不是无理数"。单称判断的主项的外延是一个单独的个体，它和全称判断有类似的性质，都是肯定或否定主项的全部外延，这里就不详细讨论了。

量项和联项是简单判断的两个重要组成部分，决定着判断的量和质。只有准确地使用量项和联项，才能恰当地进行判断。

3. 复合判断

复合判断是由两个或两个以上的其它的判断被逻辑联结词结合起来而构成的判断。数学中常用的复合判断有假言判断、选言判断、联言判断和负判断等四类。

（1）假言判断

假言判断又叫**蕴涵判断**，它是断定某一事物情况存在是另一事物情况存在的条件的判断。例如，"若两角是对顶角，则此两角相等"。这就是一个假言判断，它断定了"两角是对顶角"这一情况的存在，就会导致"此两角相等"这一情况的存在。

假言判断是借助于逻辑联结词"若…则…"或"如果…那么…"把任何两个其它判断联结起来的，它的形式是

$$若\ A\ 则\ B,$$

或记作

$$A \Rightarrow B.$$

这里判断 A 叫做**条件**或**前件**；B 叫做**结论**或**后件**。

假言判断在数学中有着广泛的应用，数学中的定理、公式大多是用假言判断给出的。

（2）选言判断

选言判断是断定在几个事物情况中至少有一个事物情况存在的判断。例如，"一个三角形或者是锐角三角形，或者是直角三角形，或者是钝角三角形"，就是一个选言判断。它指出了一个三角形可以是锐角三角形，也可以是直角三角形，还可以是钝角三角形，三者必居其一，但是目前还不能判定这一三角形是何种三角形。

选言判断是借助于逻辑联结词"…或者…"把任何两个或两个以上的其它判断联结起来的，它的形式是

$$A \vee B.$$

读作"A 或 B"。

（3）联言判断

联言判断是断定几种事物情况都存在的判断。例如，"6