动力气象讲义

中国人民解放军空字六二三部队

一九七四年五月

目　录

第一章　流场的一些基本概念

恩格斯指出：**"整个自然界，从最小的东西到最大的东西，从沙粒到太阳，从原生生物到人，都处于永恒的产生和消灭中，处于不断的流动中，处于无休止的运动和变化中。"**①地球大气，正是处于不断的流动中，处于无休止的运动和变化中。大气中的各种物理现象和物理过程，都同大气的运动有关，并从各个方面反映了大气的运动。风是空气的水平流动。暖空气流向冷地区，冷空气流向暖地区，形成了大气中的热量输送，引起了一地区的冷暖变化。云和降水一般同空气的上升运动相联系，万里晴空又往往和空气的下沉运动相对应。可以说，大气的运动是大气中最基本、最重要的物理过程。弄清大气运动的基本规律，并应用这些规律来分析和预报天气的变化，就成为动力气象学的主要任务。大气是一种流体，流体的运动同单个的质点或刚体的运动有许多不同的特点，研究的方法也不尽相同。因此，我们的课程就从流场的一些基本概念讲起。

第一节　物理量场

在质点力学和刚体力学中，我们研究某一质点、质点系或刚体的运动。在那里，研究的对象是个别物体和物体间的相互作用。气象学则是研究分布于地球周围空间的大气。在这里，仅仅研究个别空气质点的运动是不够的，还必须研究空气质点运动状况的空间分布。实际上，我们所研究的是由无数的空气质点所构成的流场。场的概念，在物理学中已经碰到过了，如引力场、电磁场等。拿地球的引力场来说，如在空间的任一点放一物体，由于地球对物体的吸引，在该点有一确

① 恩格斯：《自然辩证法》，人民出版社1971年8月第1版(下同)，第16页。

定的引力存在，空间的每一点都有一确定的引力存在，地球引力的空间分布就是地球的引力场。类似地，在存在地球大气的空间中，大气温度的空间分布就是温度场，气压的空间分布就是气压场，速度的空间分布就是速度场。概括地说，物理量的空间分布就是物理量场。

物理量可以分为两类：数量(或标量)和矢量（或向量）。一个物理量，在其度量单位确定后，仅用数值的大小就可以完全表示的，称为数量，如质量、密度、温度、气压、湿度等。一个物理量，不仅有数值大小而且还有方向的，称为矢量，如速度、加速度、力等。相应地，可以把物理量场分为数量场和矢量场。温度场、气压场、湿度场等是数量场，速度场、加速度场、重力场等是矢量场。

在空间引入一坐标系，如直角坐标系，则空间任一点的位置可用其坐标值 x，y，z 表示。物理量场是物理量的空间分布，也就是空间点的函数。如温度场可表示为 $T=T(x,y,z)$，速度场可表示为 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}(x,y,z)$。一般地说，任何数量场 f 都可以表示为点 (x,y,z) 的数量函数

$$f=f(x,y,z)$$

任何矢量场 $\boldsymbol{R}$ 都可以表示为点（x,y,z）的矢量函数

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}(x,y,z)$$

如果场还随时间变化，则物理量就不仅是空间的函数，而且是时间 t 的函数。因此，对于随时间变化的数量场可表示为

$$f=f(x,y,z,t)$$

随时间变化的矢量场可表示为

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}(x,y,z,t)$$

不随时间变化的场称为定常场，随时间变化的场称为非定常场。应当注意：这里说的随时间变化或不变化，不是说个别空气质点的物理属性，而是说的整个场，两者是有区别的。例如，空间各固定点的

速度不随时间变化，但速度的空间分布是不均匀的，即空间两固定点的速度可以不同，这时速度场是不随时间变化的，是定常场。但对个别的空气质点来说，由于空气质点的运动，其位置(x, y, z)随时间改变，而且由于速度场的不均匀，空气质点的速度也随着其位置的变化而变化，即个别空气质点的速度是随时间变化的。

任何矢量都可以分解为坐标分量，任何矢量函数也可以分解为坐标分量的函数。坐标分量都是数量，因此，矢量场也可以通过其坐标分量的数量场来表示。例如，速度$\boldsymbol{V}$在x，y，z轴方向的分量为u，v，w，则速度场

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}(x, y, z, t)$$

可通过其分量表示为：

$$u=u(x, y, z, t)$$

$$v=v(x, y, z, t)$$

$$w=w(x, y, z, t)$$

第二节 数量場与梯度

今有一数量场f，f是空间和时间的函数。在时刻$t=t_0$，f可记为$f=f(x, y, z)$。设C为常量，在时刻$t=t_0$，空间中所有f等于C值的点组成一等值面$f(x, y, z)=C$。给C以不同的值，就得到许多不同的等f面，如$f(x, y, z)=C_0$，$f(x, y, z)=C_1$，$f(x, y, z)=C_2$，……。用这些等值面，可以把数量f在时刻t_0的空间分布直观地表示出来。

等值面$f(x, y, z)=C$同水平面$z=h$的交线，就是f在h水平面上的等值线$f(x, y, h)=C$。例如等压面与海平面的交线，就是海平面上的等压线。通过许多等值线就可以把f在某水平面上的分布直观地表示出来。因为空间任意两曲面$f(x, y, z)=C$和

$\varphi(x, y, z)=K$如果相交，必交为一空间曲线（当两曲面相切时，交于一点，我们把点当作曲线退化的特殊情形），这曲线就是f等值面在曲面φ上的等值线（当然也是φ等值面在f曲面上的等值线，这是完全对等的）。因此，要得到f的等值线，也可以不用水平面去与它相交，而用任何特定的曲面去与它相交。例如，日常天气分析中绘制的等压面上的等温线，就是空间的等温面和等压面的交线。

如果物理量$f=f(x, y, z)$是x, y, z的单值连续函数，则等值面（等值线）具有下列性质：

一、等值面（等值线）可以在空间闭合，也可以不闭合，当等值面（等值线）不闭合时，必能延伸至空间的边界，而不会中间断裂，否则将与f的连续性不符。

二、同一时刻，同一物理量的两数值不同的等值面（等值线）不能相交，因为如果相交，则在交点上该物理量将同时具有两个不同的值，这是不可能的。

三、在等值面近旁，一侧是高值区，另一侧是低值区。

由于等值面（等值线）分析能直观地表示出数量场的空间分布和变化，因此为目前天气分析预报工作所广泛采用。

为了定量地表示数量的空间变化，在这里还要讲一个同等值面有关的矢量——数量场的升度和梯度。

为明确起见，可以气压场为例来说明升度和梯度的概念，然后不难推广至任何数量场。我们知道，偏导数$\frac{\partial p}{\partial x}$，$\frac{\partial p}{\partial y}$，$\frac{\partial p}{\partial z}$分别表示气压$p$沿$x, y, z$轴方向的变化率。因为三个坐标分量确定一个矢量，所以可将$\frac{\partial p}{\partial x}$，$\frac{\partial p}{\partial y}$，$\frac{\partial p}{\partial z}$看作某一矢量在$x, y, z$轴上的分量。用符号$grad\,p$来记这一矢量，则有

$$grad\,p=\frac{\partial p}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial p}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial p}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

式中$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$分别表示$x, y, z$轴方向的单位矢量。矢量$grad\,p$称为

气压 p 的升度。若引用矢量微分算子

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

则气压升度可写为

$$grad\, p = \frac{\partial p}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\boldsymbol{k} = \nabla p \qquad (1-1)$$

现在来讨论气压升度 ∇p 的意义和性质。设 $\delta \boldsymbol{r}$ 是从空间任一点起始的微小位移，$\delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\delta x + \boldsymbol{j}\delta y + \boldsymbol{k}\delta z$，两矢量 ∇p 和 $\delta \boldsymbol{r}$ 的数量积为

$$\nabla p \cdot \delta \boldsymbol{r} = \frac{\partial p}{\partial x}\delta x + \frac{\partial p}{\partial y}\delta y + \frac{\partial p}{\partial z}\delta z = \delta p$$

δp 表示气压 p 在位移 $\delta \boldsymbol{r}$ 上的增量。另一方面，如 ∇p 与 $\delta \boldsymbol{r}$ 之间的夹角为 θ（图 1—1），应有

$$\nabla p \cdot \delta \boldsymbol{r} = |\nabla p|\,|\delta \boldsymbol{r}|\cos\theta$$

故 $$\delta p = |\nabla p|\,|\delta \boldsymbol{r}|\cos\theta$$

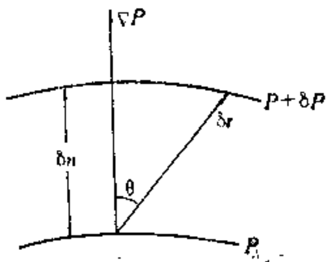

图 1—1

若微小位移 $\delta \boldsymbol{r}$ 是沿等压面 p 的，则 $\delta p = 0$，即 $|\nabla p|\,|\delta \boldsymbol{r}|\cos\theta = 0$，但 $|\nabla p|$ 和 $|\delta \boldsymbol{r}|$ 一般均不为零，故只有 $\cos\theta = 0$，$\theta = \frac{\pi}{2}$。这说明 ∇p 与 $\delta \boldsymbol{r}$ 垂直，也就是说 ∇p 与等压面 p 垂直，∇p 与等压面 p 的法线方向重合。当 $\delta \boldsymbol{r}$ 与 ∇p 同向时，$\theta = 0$，$\cos\theta = 1$，δp 取最大值，并且是正的。这说明气压升度 ∇p 指向气压升高的方向，沿气压升度方向气压的空间变化率最大。因两等压面 p 和 $p + \delta p$ 之间的垂直距离 $\delta n = |\delta \boldsymbol{r}|\cos\theta$，由此有

$$|\nabla p| = \frac{\delta p}{\delta n}$$

令 $\delta n \to 0$ 得

$$|\nabla p| = \frac{\partial p}{\partial n}$$

因此，气压升度的绝对值就是沿等压面法线方向的气压变化率。如果令$\boldsymbol{n}$表示沿等压面法线并指向气压升高方向的单位矢量，可以把气压升度表示为：

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial n}\boldsymbol{n} \qquad (1-2)$$

公式（1—2）很明确地表示了气压升度的意义，即气压升度是一个矢量，它的方向同等压面的法线重合并指向气压升高的方向，它的数值等于气压沿等压面法线方向的变化率。

如以$\boldsymbol{l}$表示$\delta\boldsymbol{r}$方向的单位矢量，$\delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{l}\delta r$，则有

$$\delta p = \nabla p \cdot \boldsymbol{l}\delta r$$

$$\frac{\delta p}{\delta r} = \nabla p \cdot \boldsymbol{l}$$

令$\delta r \to 0$得：

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \nabla p \cdot \boldsymbol{l} = \frac{\partial p}{\partial n}\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{l} = \frac{\partial p}{\partial n}\cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{l}) \quad (1-3)$$

$\cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{l})$表示$\boldsymbol{n}$和$\boldsymbol{l}$夹角的余弦。（1—3）式说明，沿空间任一方向气压的变化率等于气压升度在这一方向上的投影。

当研究水平运动时，我们要考虑水平气压升度

$$\nabla_h p = \frac{\partial p}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\boldsymbol{j} \qquad (1-4)$$

显然，只要把等压面换成水平面上的等压线，就可以得到水平气压升度同等压线之间的关系：水平气压升度$\nabla_h p$垂直于等压线并指向气压升高的方向，其数值等于气压沿这一方向的变化率。

在气象上，常用的是一个数值等于气压升度，但方向与气压升度相反的矢量，即$-\nabla p$。$-\nabla p$称为气压梯度。显然，气压梯度$-\nabla p$

与等压面垂直并指向气压降低的方向，沿气压梯度的方向气压降低最快。

类似地，可以引入温度梯度 $-\nabla T$。一般说来，对任何数量场 f，可以引入 f 的梯度 $-\nabla f$。

最后，作一点说明。在数学教材中，一般称 ∇f 为梯度，在气象学中则习惯于称 $-\nabla f$ 为梯度。我们在这里和今后各章均采用气象学上的用语规定，这不应引起误解。

第三节　流线与轨迹

上节讲了用等值面(等值线)直观地表示数量场的方法。显然，仅仅用等值面（等值线）是不能完全表示矢量场的，因为矢量不仅有数值的大小，而且有方向，矢量场和数量场的性质不同。**“不同质的矛盾，只有用不同质的方法才能解决。”**①表示矢量场的方法，必须顾及矢量的数值和方向两个方面。一种比较直观和常用的表示矢量场的方法是绘制矢量线。下面我们以速度场为例，来讨论如何用流线表示速度场。弄清了流线和速度场的关系，就不难推广至一般的矢量线和矢量场的关系。

若有一速度场 $\boldsymbol{V}$，从流场的任一点开始作一有向空间曲线，使曲线上每一点的切线与该点的速度矢量重合（图1—2），这样的曲线称为流线。由于流线上每一点的切线方向就是该点速度的方向，因此，用一条流线就可以把流线上各点的速度方向表示出来。流线的空间分布就表示了速度方向的空间分布。本来，流场中每一点都有流线通过，因此在流场中应有无数条

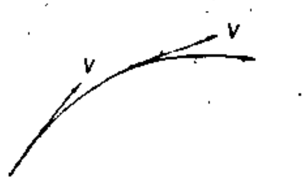

图1—2

① 《矛盾论》，《毛泽东选集》，人民出版社1967年11月横排袖珍本（下同），第286页。

流线。但为了表示速度的大小，我们绘制流线时可以作这样的规定：通过与流线垂直的单位面积的流线数与流速成比例，流速大的地方流线密，流速小的地方流线疏。

和等值线不同，平面流场中的流线可能聚散于一点或一条线，这些点或线反映了流场的某些奇异性质，图1—3给出了其示意图。流线

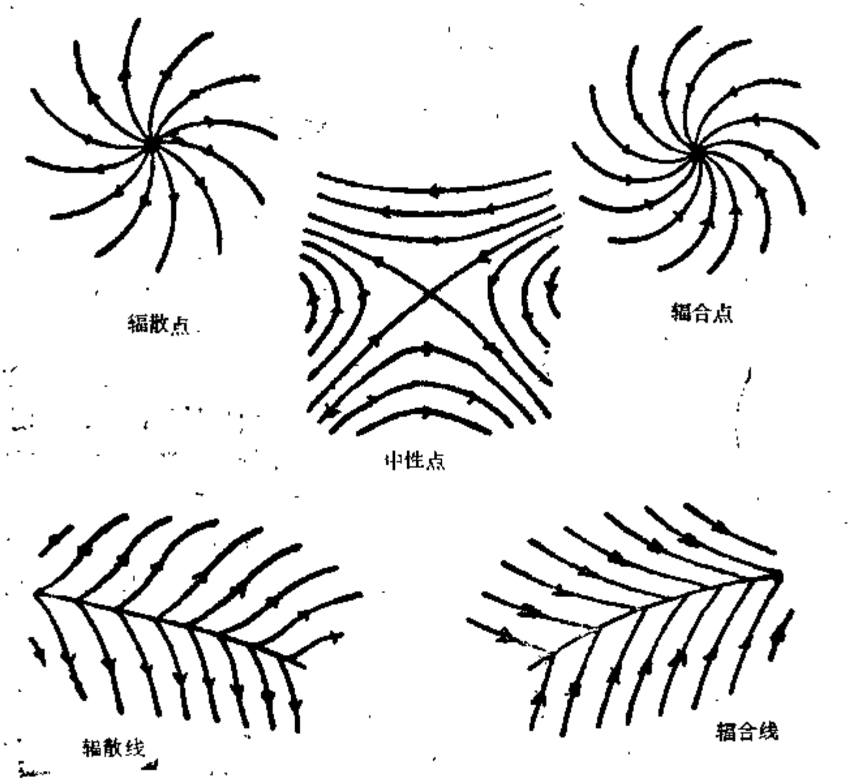

图1—3

从一点辐散开，这样的点称为辐散点，流体从辐散点流出，说明辐散点有流源。流线汇合的点称为辐合点，流体流向辐合点，辐合点是流汇。流体从两侧汇集于一条线或自一条线向两侧流去，称辐合线或辐散线。如果在一点上，对于某方向是辐合的，对另一方向是辐散的，

称为中性点。在辐合辐散点或线处，流体将发生垂直运动，以补偿由于辐散所流散的流体，输送由于辐合而集聚的流体。中性点可以认为是由两个靠得很近的辐合点和辐散点组成的，在这里聚集的流体又流散开去。

由于流线表示了速度的空间分布情况，因此对于分析流体的运动状况和性质是很有用的，在天气分析预报中也有广泛的应用。在中高纬度自由大气中，风是近似于梯度风的，等压线（或等高线）与风的方向基本一致，这样就可以把等压线（或等高线）近似地当作流线。在低纬地区，风与梯度风差别较大，等压线（或等高线）不能很好反映速度的分布，所以在低纬地区常常需要专门进行流线分析。

现在，我们讲一讲流线与轨迹的关系。轨迹是流点在空间运动的路径。轨迹上的点是同一流点在不同时刻的位置。轨迹上任一点的切线方向，代表流点流经该点时的速度方向。因此，轨迹与同一流点在不同时刻的速度相切。而流线是由同一时刻空间不同的点组成，流线与同一时刻空间不同点的速度方向相切。显然，流线与轨迹的意义是不同的。在一般情况下，流线与轨迹也不会重合。在特殊情况下，如果速度场不随间时变化，则流线也不会随间时变化，某一流点的轨迹必与流点所经过的空间各点的速度相切，这时流线与轨迹重合。

第四节 个别变化和局地变化

第一节讲到某物理量场的变化和个别空气质点的物理量的变化是不同的，现在讨论两者的关系。

考虑某运动的空气质点，在时刻 t，空气质点的位置为（x, y, z），在时刻 $t+\Delta t$，空气质点的位置为($x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z$)，则该空气质点的物理属性 f 随时间的变化率为：

$$\frac{df}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, t+\Delta t)-f(x,y,z,t)}{\Delta t}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

若空气质点运动的速度为$\boldsymbol{V}$，$\boldsymbol{V}$的坐标分量为u，v，w，则

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt}$$

因而有

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} \qquad (1-5)$$

显然，对于矢量$\boldsymbol{R}$同样有

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial t} + u\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial x} + v\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial y} + w\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial z} \qquad (1-6)$$

现在分析（1—5）式和（1—6）式的意义。（1—5）式和（1—6）式在形式上是一样的，只是讨论的物理量不同，（1—5）式是对数量场来说的，（1—6）式是对矢量场来说的。两式在形式上相同，说明这个关系式对任何物理量（不论是数量或矢量）都成立。这样，我们可以通过任一物理量例如温度T（x，y，z，t）来分析（1—5）和（1—6）式的意义。对于温度T有

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z} \qquad (1-7)$$

在推导这个关系式时已说明，$\frac{dT}{dt}$表示某空气质点温度随时间的变化，称为温度的个别变化。

偏导数$\frac{\partial T}{\partial t}$是$x$，$y$，$z$为常值时，也就是空间某固定地点温度随时间的变化，称为温度的局地变化。某一地点气象要素的局地变化，正是天气分析预报所关心和要解决的问题，也是容易直接观测到的变化。而要直接观测个别空气质点的温度变化$\frac{dT}{dt}$，就必须跟随该空气质点一起运动，这是较难做到的。

为讨论$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}$的意义，我们可取$x$轴的方向与水平风向$\boldsymbol{S}$一致，此时$u=V_s$，$v=0$，$\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{\partial T}{\partial S}$，因而有

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=V_s\frac{\partial T}{\partial S}$$

如图1—4所示，若空气质点起始时刻在A点，温度为T_A，经单位时间后，该质点将沿风的方向移动距离V_s而到达B点。如果温度的局地变化为零，则空气质点到达B点后的温度应为T_B。在单位时间内由于空气的运动和温度分布不均匀所引起的空气质点的温度变化为$T_B—T_A$。另一方面，沿$\boldsymbol{S}$方向单位距离温度的变化为$\frac{\partial T}{\partial S}$，$AB$距离为$V_s$，故$T_B-T_A=V_s\frac{\partial T}{\partial S}$。所以，$\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)$是由于空气的水平运动和温度水平分布不均匀所引起的空气质点的温度变化，称为温度的平流变化。

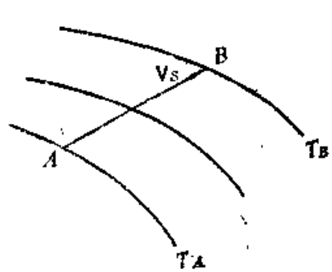

图1—4

同样，$w\frac{\partial T}{\partial z}$是由于空气质点的垂直运动和温度垂直分布不均匀所引起的温度变化，称为温度的对流变化。

（1—7）式说明，个别空气质点的温度变化，是由于温度的局地变化、平流变化和对流变化的综合结果。

（1—7）式也可写为：

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{dT}{dt}-u\frac{\partial T}{\partial x}-v\frac{\partial T}{\partial y}-w\frac{\partial T}{\partial z} \qquad (1—8)$$

我们也称$-\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)$为温度的平流变化，$-w\frac{\partial T}{\partial z}$为温度的对流变化。不过应当注意，（1—7）式中的平流变化和对流变化是对个

别空气质点的温度变化来说的，（1—8）式中的平流变化和对流变化则是对某一地点温度的变化来说的，两者意义不同，符号也相反。因为在天气分析预报中主要讨论某一地点温度的局地变化，因此，如果不特别加以说明，在谈到平流变化和对流变化时，通常都是对局地变化来说的。（1—8）式说明，温度的局地变化是由空气质点温度的个别变化、温度的平流变化和温度的对流变化综合作用的结果。

由于温度的平流变化对于温度的局地变化的影响比较重要，下面着重分析一下两者的关系。由温度的平流变化所引起的温度的局地变化记为$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_a$，

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_a=-u\frac{\partial T}{\partial x}-v\frac{\partial T}{\partial y}=-\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right) \qquad (1-9)$$

又
$$-\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=-V_s\frac{\partial T}{\partial S}=-\boldsymbol{V}_s\cdot\nabla_hT=\boldsymbol{V}_s\cdot(-\nabla_hT)$$
$$=V_s|-\nabla_hT|\cos\theta \qquad (1-10)$$

式中θ为风的速度$\boldsymbol{V}_s$与水平温度梯度$-\nabla_hT$之间的夹角（从$\boldsymbol{V}_s$方向转至$-\nabla_hT$方向的最小角度，$\theta\leqslant\pi$）。将（1—10）代入（1—9）得：

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_a=V_s|-\nabla_hT|\cos\theta \qquad (1-11)$$

因此，温度的平流变化与风速V_s，水平温度梯度的大小$|-\nabla_hT|$，以及风和水平温度梯度夹角的余弦成正比。

当$\theta<\frac{\pi}{2}$时（图1—5(*a*)），空气的流动方向是从高温区流向低温区，称为暖平流。暖平流会引起局地增温。如果$\theta=0$，即风的方向与水平温度梯度的方向完全一致时，暖平流最强，由暖平流引起的局地增温也最快。

当$\theta>\frac{\pi}{2}$时（图1—5(*b*)），空气的流动方向是从低温区流向

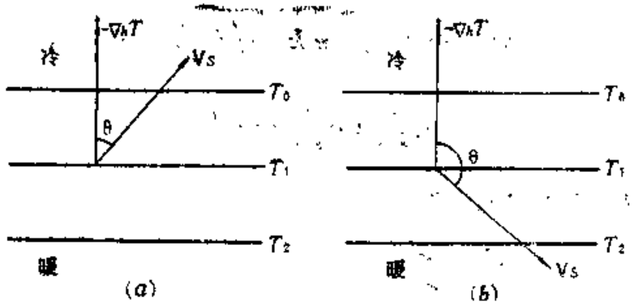

图 1—5

高温区，称为冷平流。冷平流会引起局地降温。如果 $\theta=\pi$，即风的方向与水平温度梯度相反时，冷平流最强，由冷平流引起的局地降温也最快。

当 $\theta=\frac{\pi}{2}$时，风的方向与水平温度梯度垂直，也就是风的方向与等温线平行，因而温度平流为零，此时平流不会引起局地温度的变化。

最后，我们讲一下用矢量符号表示个别变化和局地变化关系的问题。从（1—5）式和（1—6）式可以得到一个作用于任何矢量$\boldsymbol{R}$或数量f的关系式：

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z} \qquad (1—12)$$

已知速度矢量$\boldsymbol{V}$可以写为

$$\boldsymbol{V}=u\boldsymbol{i}+v\boldsymbol{j}+w\boldsymbol{k}$$

引入矢量微分算子

$$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

根据两矢量的数量积公式得：

$$\boldsymbol{V}\cdot\nabla=(u\boldsymbol{i}+v\boldsymbol{j}+w\boldsymbol{k})\cdot\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$=u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}$$

由此（1—12）式可以写为

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla \tag{1—13}$$

利用（1—13）式，（1—5）和（1—6）可以分别写为：

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)f$$

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}=\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial t}+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{R}$$

如要把平流变化和对流变化明显区别开来，则可将上两式改写为：

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+(\boldsymbol{V}_h\cdot\nabla_h)+w\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}=\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial t}+(\boldsymbol{V}_h\cdot\nabla_h)\boldsymbol{R}+w\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial z}$$

式中$\boldsymbol{V}_h$为水平速度，∇_h为二维矢量微分算子。

第五节　散度和连续方程

先讨论水平运动。若在水平流场中，在时刻t，有一由流点组成的小流片$abcd$（图1—6），其边长为$ab=\delta x, ad=\delta y$，小流片的面积为$A=\delta x\delta y$。如果速度场是不均匀的，即a、b、c、d各点的速度不一样，则在流动过程中，小流片将发生形变，其面积A亦可能发生变化。现在问，经过δt时间后，面积A的变化如何？设经δt后，小流片$abcd$移至$a'b'c'd'$。若a点沿x轴方向的速度为u，则b点沿x