College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

同济大学应用数学系 编

高等数学
习题全解指南

同济·第四版

高等教育出版社

大学数学学习辅导丛书

高等数学习题全解指南

同济·第四版

上下册合订本

同济大学应用数学系　编

高等教育出版社

内容提要

本书是与同济大学数学教研室主编的《高等数学》第四版相配套的学习辅导书，由同济大学应用数学系的教师编写。本书按《高等数学》（上、下册）的章节顺序编排，对全部习题与总习题给出解答。部分题目在解答之后对该类题的解法作了小结、归纳，有的提供了多种解法。

本书对教材具有相对的独立性，可为工科和其他非数学类专业学生学习以及准备报考硕士研究生的人员复习高等数学提供解题指导，也可供讲授《高等数学》的教师在备课和批改作业时参考。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学习题全解指南：同济·第四版/同济大学应用数学系编.上下册合订本—北京：高等教育出版社，2004.5
ISBN 7-04-013993-6

Ⅰ.高... Ⅱ.同... Ⅲ.高等数学-高等学校-解题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 004969 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn

经　　销　新华书店北京发行所
印　　刷　北京星月印刷厂

开　　本	850×1168　1/32	版　　次	2004 年 5 月第 1 版
印　　张	23	印　　次	2004 年 5 月第 1 次印刷
字　　数	590 000	定　　价	26.10 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

前　　言

本书是同济大学数学教研室主编的《高等数学》(第四版)的配套用书，主要是为学习《高等数学》的大学生以及准备报考硕士研究生的人员复习《高等数学》提供一本解题指导的参考书，也可供讲授《高等数学》的教师在备课和批改作业时参考。

本书内容为《高等数学》(第四版)各章的习题与总习题及解答。在解答中，有的题在解答之后，以注释的形式对该类题的解法作了归纳小结，有的题提供了常用的具有典型意义的多种解法。由于我校主编的《高等数学》已于2002年7月出了第五版，新版中对第四版采用的某些数学记号作了必要的修改，这次编写习题全解时，原则上仍采用第四版中的记号，但为了便于读者了解有关记号的变化，我们对涉及的这些数学记号，在首次出现的习题中作了注释，指出新版中所采用的记号。个别地方在习题及解答中改用了新版中的记号，希望读者在使用时加以注意。

本书由同济大学应用数学系的下列五位教师编写(按编写的章节次序排列)：邱伯驺(第一、八章)、徐建平(第二、三、七章)、朱晓平(第四、五、六章)、郭镜明(第九、十章)、应明(第十一、十二章)。

本书中存在的问题，欢迎广大专家、同行和读者批评指正。

编者

二〇〇三年十月

目　　录

第一章　函数与极限

习　题　1-1

1. 用区间表示变量的变化范围：

(1) $2<x\leqslant 6$；　　(2) $x\geqslant 0$；

(3) $x^2<9$；　　(4) $|x-3|\leqslant 4$.

解　(1) $(2,6]$.　　(2) $[0,+\infty)$.

(3) $(-3,3)$.　　(4) $[-1,7]$.

2. 求函数

$$y=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

的定义域和值域.

解　定义域：$(-\infty,+\infty)$；值域：$[-1,1]$.

3. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$；

(2) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}, g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.

解　(1) 不同. 因为两者定义域不同.

(2) 不同. 因为两者对应法则不同，$g(x)=\sqrt{x^2}$

$$=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

(3) 相同.因为两者定义域、对应法则均相同.

4. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{1-x}$;　　(2) $y=\sqrt{3x+2}$;

(3) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$;　　(4) $y=\sqrt{x^2-4}$;

(5) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$;　　(6) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$;

(7) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;　　(8) $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$.

解 (1) $1-x\neq0,x\neq1$,定义域为$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

(2) $3x+2\geqslant0,x\geqslant-\dfrac{2}{3}$,定义域为$\left[-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$.

(3) $1-x^2\neq0,x\neq\pm1$,定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(4) $x^2-4\geqslant0,|x|\geqslant2$,定义域为$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

(5) $1-x^2\neq0$　且　$x+2\geqslant0$,

即 $x\neq\pm1$ 且 $x\geqslant-2$,定义域为$[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(6) $x\neq0$ 且 $1-x^2\geqslant0,x\neq0$ 且 $|x|\leqslant1$,定义域为$[-1,0)\cup(0,1]$.

(7) $4-x^2>0,|x|<2$,定义域为$(-2,2)$.

(8) $x^2-3x+2\neq0,x\neq1$ 且 $x\neq2$,

定义域为$(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$.

5. 用描点法作出函数 $y=\dfrac{1}{x^2}$的图形.

解 略.

6. 设 $f(x)=\sqrt{4+x^2}$,求下列函数值:

$f(0),f(1),f(-1),f\left(\dfrac{1}{a}\right),f(x_0),f(x_0+h)$.

解 $f(0)=\sqrt{4+0}=2$，　$f(1)=\sqrt{4+1^2}=\sqrt{5}$，

$f(-1)=\sqrt{4+(-1)^2}=\sqrt{5}$，

$f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\sqrt{4+\dfrac{1}{a^2}}=\dfrac{1}{|a|}\sqrt{4a^2+1}$，

$f(x_0)=\sqrt{4+x_0^2}$，$f(x_0+h)=\sqrt{4+(x_0+h)^2}$.

7. 若 $f(t)=2t^2+\dfrac{2}{t^2}+\dfrac{5}{t}+5t$，证明 $f(t)=f\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

证 $f\left(\dfrac{1}{t}\right)=2\left(\dfrac{1}{t}\right)^2+\dfrac{2}{\left(\dfrac{1}{t}\right)^2}+\dfrac{5}{\dfrac{1}{t}}+5\,\dfrac{1}{t}$

$=2t^2+\dfrac{2}{t^2}+\dfrac{5}{t}+5t=f(t)$.

8. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3},\end{cases}$ 求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\varphi(-2)$，并作出函数 $y=\varphi(x)$的图形.

解 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{6}\right|=\dfrac{1}{2}$，

$\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{4}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\varphi(-2)=0$.

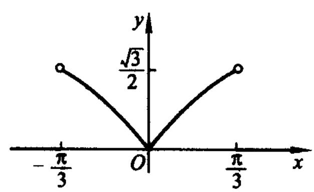

图 1－1

$y=\varphi(x)$的图形如图 1－1 所示.

9. 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些既非奇函数又非偶函数？

(1) $y=x^2(1-x^2)$；　　　(2) $y=3x^2-x^3$；

(3) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;　　(4) $y=x(x-1)(x+1)$;

(5) $y=\sin x-\cos x+1$;　　(6) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$.

解 (1) 记 $f(x)=x^2(1-x^2)$. 因为 $f(-x)=(-x)^2[1-(-x)^2]=x^2(1-x^2)=f(x)$,所以 $f(x)$为偶函数.

(2) 记 $f(x)=3x^2-x^3$. 因为 $f(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3\neq f(x)$,且 $f(-x)\neq -f(x)$,所以 $f(x)$既非奇函数又非偶函数.

(3) 记 $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$. 因为 $f(-x)=\dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$,所以 $f(x)$为偶函数.

(4) 记 $f(x)=x(x-1)(x+1)$. 因为 $f(-x)=(-x)\times[(-x)-1][(-x)+1]=-x(x-1)(x+1)=-f(x)$,所以 $f(x)$为奇函数.

(5) 记 $f(x)=\sin x-\cos x+1$. 因为 $f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1\neq f(x)$,且 $f(-x)\neq -f(x)$,所以 $f(x)$既非奇函数又非偶函数.

(6) 记 $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$. 因为 $f(-x)=\dfrac{a^{(-x)}+a^{-(-x)}}{2}=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}=f(x)$,所以 $f(x)$为偶函数.

10. 设 $f(x)=2x^2+6x-3$,求 $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ 及 $\psi(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$,并指出 $\varphi(x)$及 $\psi(x)$中哪个是奇函数? 哪个是偶函数?

解 $\varphi(x)=2x^2-3$,是偶函数;

$\psi(x)=6x$,是奇函数.

11. 设下面所考虑的函数都是定义在对称区间$(-l,l)$上的. 证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数,两个奇函数的和是奇函数;

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数,两个奇函数的乘积是偶函数,偶函数与奇函数的乘积是奇函数;

(3) 定义在对称区间$(-l,l)$上的任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数的和.

证 (1) 设$f_1(x),f_2(x)$均为偶函数,则$f_1(-x)=f_1(x)$,$f_2(-x)=f_2(x)$.令

$$F(x)=f_1(x)+f_2(x).$$

用$-x$替换x,得

$$F(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=f_1(x)+f_2(x)=F(x),$$

故$F(x)$为偶函数.

设$g_1(x),g_2(x)$均为奇函数,则$g_1(-x)=-g_1(x)$,$g_2(-x)=-g_2(x)$.令

$$G(x)=g_1(x)+g_2(x).$$

用$-x$替换x,得

$$G(-x)=g_1(-x)+g_2(-x)=-g_1(x)-g_2(x)=-G(x),$$

故$G(x)$为奇函数.

(2) 设$f_1(x),f_2(x)$均为偶函数,则$f_1(-x)=f_1(x)$,$f_2(-x)=f_2(x)$.令

$$F(x)=f_1(x)\cdot f_2(x).$$

用$-x$替换x,得

$$F(-x)=f_1(-x)\cdot f_2(-x)=f_1(x)\cdot f_2(x)=F(x),$$

故$F(x)$为偶函数.

设$g_1(x),g_2(x)$为奇函数,则$g_1(-x)=-g_1(x)$,$g_2(-x)=-g_2(x)$.令

$$G(x)=g_1(x)g_2(x).$$

用$-x$替换x,得

$$G(-x)=g_1(-x)g_2(-x)=[-g_1(x)][-g_2(x)]=g_1(x)g_2(x)=G(x),$$

故 $G(x)$为偶函数.

设 $f(x)$为偶函数,$g(x)$为奇函数,则 $f(-x)=f(x)$, $g(-x)=-g(x)$.令

$$H(x)=f(x)g(x).$$

用 $-x$ 替换 x,得

$$H(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)[-g(x)]=-f(x)g(x)=-H(x),$$

故 $H(x)$为奇函数.

(3) 设 $f(x)$为定义于$(-l,l)$上的任意一个函数,令

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)].$$

因为
$$\varphi(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(-(-x))]$$
$$=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=\varphi(x),$$

所以 $\varphi(x)$为偶函数.

令
$$\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)].$$

因为
$$\psi(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(-(-x))]$$
$$=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]$$
$$=-\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=-\psi(x),$$

所以 $\psi(x)$为奇函数.

而
$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=\varphi(x)+\psi(x),$$

所以 $f(x)$可以表示为一个偶函数与一个奇函数的和.

12. 试证下列函数在指定区间内的单调性:

(1) $y=x^2$, $(-1,0)$;

(2) $y=\lg x$, $(0,+\infty)$;

(3) $y=\sin x$, $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

解 (1) 记 $f(x)=x^2$. 设 $x_1,x_2\in(-1,0)$ 且 $x_1<x_2$. 因为

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2=(x_2-x_1)(x_2+x_1),$$

$$x_2+x_1<0,\quad x_2-x_1>0,$$

所以 $f(x_2)-f(x_1)<0,\quad f(x_2)<f(x_1)$,

即 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内单调减少.

(2) 记 $f(x)=\lg x$. 设 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 且 $x_1<x_2$. 因为

$$f(x_2)-f(x_1)=\lg x_2-\lg x_1=\lg\frac{x_2}{x_1},$$

而 $\frac{x_2}{x_1}>1,\lg\frac{x_2}{x_1}>0$,所以 $f(x_2)-f(x_1)>0$,

即 $y=\lg x$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

(3) 记 $f(x)=\sin x$. 设 $x_1,x_2\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 且 $x_1<x_2$. 因为

$$f(x_2)-f(x_1)=\sin x_2-\sin x_1=2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2},$$

而 $$-\frac{\pi}{2}<\frac{x_1+x_2}{2}<\frac{\pi}{2},\quad \cos\frac{x_2+x_1}{2}>0,$$

又 $$0<\frac{x_2-x_1}{2}<\frac{\pi}{2},\quad \sin\frac{x_2-x_1}{2}>0,$$

所以 $$f(x_2)-f(x_1)>0,$$

即 $y=\sin x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加.

13. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数,若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加,证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

证 设 $x_1,x_2\in(-l,0)$ 且 $x_1<x_2$,则

$$-x_1,-x_2\in(0,l)\text{且}-x_2<-x_1.$$

由 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加,得

$$f(-x_2)<f(-x_1).$$

因为 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 内是奇函数,所以

$$f(-x_2)=-f(x_2),f(-x_1)=-f(x_1),$$

从而 $$-f(x_2)<-f(x_1),\text{即 } f(x_1)<f(x_2).$$

这就证明了对 $(-l,0)$ 内任取的 $x_1<x_2$,都有 $f(x_1)<f(x_2)$,因此,$f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

14. 下列各函数中哪些是周期函数?对于周期函数,指出其周期:

(1) $y=\cos(x-2)$;　　(2) $y=\cos 4x$;

(3) $y=1+\sin \pi x$;　　(4) $y=x\cos x$;

(5) $y=\sin^2 x$.

解 (1) 是周期函数,周期 $l=2\pi$.

(2) 是周期函数,周期 $l=\frac{\pi}{2}$.

(3) 是周期函数,周期 $l=2$.

(4) 不是周期函数.

(5) 是周期函数,周期 $l=\pi$.

15. 求下列函数的反函数:

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$;　　(2) $y=\frac{1-x}{1+x}$;

(3) $y=\frac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq 0)$,又问当 a,b,c,d 满足什么条件时,这反函数与直接函数相同?

解 (1) $y=\sqrt[3]{x+1}$ 改写为 $x=\sqrt[3]{y+1}$,再解出 y,即得反函数为 $y=x^3-1$.

(2) $y=\frac{1-x}{1+x}$ 改写为 $x=\frac{1-y}{1+y}$,再解出 y,即得反函数为 $y=\frac{1-x}{1+x}$.

(3) $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ 改写为 $x=\frac{ay+b}{cy+d}$,再解出 y,即得反函数为 $y=\frac{-dx+b}{cx-a}$.