



新世纪高等院校精品教材·数学类

整体微分几何初步

(第二版)

沈一兵 编著

浙江大学出版社

整体微分几何初步

沈一兵 编著

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

整体微分几何初步/沈一兵编著.—2版.—杭州:浙江大学出版社,2005.10

ISBN 7-308-04501-3/O.335

I.整... II.沈... III.整体几何:微分几何
IV.018

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第113644号

- 责任编辑** 杨晓鸣
封面设计 刘依群
出版发行 浙江大学出版社
(杭州浙大路38号 邮政编码310027)
(E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址:http://www.zjupress.com)
- 排 版** 浙江大学出版社电脑排版中心
印 刷 杭州杭新印务有限公司
开 本 850mm×1168mm 1/32
印 张 9
字 数 220千字
版 次 2005年10月第2版 2005年10月第2次印刷
书 号 ISBN 7-308-04501-3/O·335
定 价 13.50元

序

微分几何是一门古老的学科,历史悠久,它是以数学分析为工具来研究空间形式的数学分支.经典微分几何主要讨论曲线与曲面的局部性质.20世纪以来随着分析方法的发展,微分几何内容也越来越充实和深刻,除局部性质外,还研究关于图形的整体性质.由于整体微分几何的发展,这门学科虽然古老,但生命力至今还很旺盛,是当前基础研究的热门领域.它和其他许多数学学科以及理论物理等互相渗透.例如,它与微分方程、李群、变分学、泛函、拓扑、复变函数论、规范场论等的关系越来越密切,并互相影响、互相促进.因此,它的内容和方法也在不断更新.

多年来,一般高校微分几何教材是以经典的初等微分几何为其主要内容的.所谓“经典”,即如上所述,它所讨论的主要是图形的局部性质;所谓“初等”是指,为了初学者容易理解和入门,所研究的对象只限于三维欧几里得空间内的曲线和曲面.由于微分几何这个学科的不断

发展,也由于现代科学技术发展的需要,微分几何教材的内容所包含的范围必须扩大,即必须加入整体微分几何的部分内容.因此,编写一本整体微分几何教材已成为当前的需要,但这种教材目前国内尚不多见.沈一兵教授这本教材开始编写于20世纪80年代初期,经过十多年的教学实践,不断修改充实,并采用么正活动标架法,使得几何问题化为外形式计算,突破了用坐标系来计算的传统框架,这是几何学研究的一种现代方法.沈一兵教授在整体微分几何领域的研究造诣很深,以他一丝不苟的治学精神写成的这本书,我相信一定是一本好书,对于它的出版我寄予厚望.

白正国

1997年秋于杭州

第1版前言

整体微分几何的名称最早可能来自德国几何学家 W. Blaschke 对凸闭曲线和卵形面的研究. 后来经过许多数学家的努力, 使之得到全面发展. 今天已成为几何学、分析学和拓扑学相互交织的一个重要研究领域, 也成为研究理论物理的有力工具之一.

为了满足我系数学专业的教学需要, 在文献[1, 2]的启发影响下, 我们在 20 世纪 80 年代初期编写了有关整体微分几何的讲义. 经过十多年教学实践, 不断增删修改, 才形成本书现在的样子. 全书共分四章: 第一章, 活动标架法; 第二章, 曲线的整体微分几何; 第三章, E^3 中曲面的整体微分几何; 第四章, 曲面的内蕴几何学. 为了完整起见, 另加了两个附录: 附录 A, 欧氏空间点集拓扑概要; 附录 B, 曲面的拓扑分类.

对于已经熟悉活动标架法和外微分形式的读者, 可以跳过第一章. 第四章的内容实质上是黎曼几何的范畴, 目的是想引起读者对高维流形几何的兴趣. 有关局部微

分几何计算,我们主要采用活动标架法.这不仅为了简化计算,也想使高年级学生能了解外微分形式的有关知识.本书内容基本上是自封闭的,凡涉及较多或较高深的其他数学知识,则尽可能注明参考文献.限于笔者水平,书中疵谬之处可能难免,热忱欢迎读者不吝指正.

这里我要感谢我的老师白正国教授对本书的关心和指导,感谢我系几何学教研室有关老师的热情支持,也感谢郭孝英老师和傅吉祥博士在具体工作上的帮助.

最后,我要感谢杭州大学出版社对本书出版的大力支持和帮助.

沈一兵

1997年9月

再 版 跋

本书原是作者学习整体微分几何和外形式法的一些心得体会,整理后于1998年由原杭州大学出版社出版,拟作数学系高年级本科生的选修课教材。出版后颇受广大读者重视和钟爱,不久书即告罄。

书中不少内容源自著名几何学大师陈省身先生的学术论著和演讲。2001年先生来杭时曾对本书颇加嘉奖,并建议稍增内容,译成英文。但由于作者拖沓,一直未能兑现。不料先生于2004年12月3日突然仙逝,作者悲悼之余,也对此事遗憾万分。作者愿以再版此书敬献先生!

本版与初版的主要差别是增加了第五章:高维欧氏空间的超曲面。这是三维欧氏空间中曲面论的最直接和最自然的推广,至今还在发展。建议这一章作为学生讨论班的内容。限于作者水平,书中难免谬误与不妥之处,欢迎广大读者批评指正。

最后,借此机会,谨向被本书引用的文献作者、对本书厚爱的读者、国家自然科学基金会、浙江大学数学系和浙江大学出版社,致以衷心感谢。

沈一兵
2005年9月

目 录

第一章 活动标架法

§ 1	么正标架	(1)
1.1	么正标架	(1)
1.2	么正标架的运动方程	(4)
§ 2	外微分形式	(7)
2.1	外代数	(7)
2.2	外微分形式	(11)
2.3	外微分	(13)
2.4	微分形式的积分	(15)
§ 3	可积系统	(19)
3.1	E^3 的结构方程	(19)
3.2	Frobenius 定理	(19)
3.3	用活动标架法研究曲面	(22)
3.3.1	第一和第二基本形式	(23)
3.3.2	主曲率、Gauss 曲率和平均曲率	(26)
3.3.3	曲面论基本定理	(28)

第二章 曲线的整体微分几何

§ 1	平面曲线的某些整体性质	(33)
1.1	等周不等式	(33)
1.2	曲线的旋转指标	(37)

1.2.1	映射的度数	(37)
1.2.2	旋转指标定理	(41)
1.3	凸闭曲线	(44)
§ 2	空间曲线的某些整体性质	(49)
2.1	球面上的 Crofton 公式	(50)
2.2	空间曲线的全曲率	(53)
2.3	空间曲线的全挠率	(58)

第三章 E^3 中曲面的整体微分几何

§ 1	曲面的 Gauss-Bonnet 公式	(67)
1.1	曲面的整体描述	(67)
1.2	Gauss-Bonnet 公式	(72)
§ 2	Liebmann 定理	(78)
2.1	球面的刚性	(78)
2.2	两个引理	(79)
2.3	Liebmann 定理的证明	(82)
§ 3	凸曲面和积分公式	(85)
3.1	凸曲面的 Hadamard 定理	(85)
3.2	Cohn-Vossen 定理	(87)
3.3	Minkowski 积分公式	(90)
§ 4	Minkowski 问题和 Christoffel 问题的唯一性	(92)
4.1	概述	(92)
4.2	基本公式	(93)
4.3	Minkowski 问题的唯一性	(94)
4.4	Christoffel 问题的唯一性	(97)
§ 5	全平均曲率与 Willmore 猜想	(99)
5.1	全平均曲率	(99)
5.2	球面的一个特征	(102)

5.3	环面的全平均曲率	(104)
§ 6	常负曲率曲面和 Bäcklund 变换	(107)
6.1	常负曲率曲面和 SG 方程	(107)
6.2	伪球线汇和焦曲面	(110)
6.3	Bäcklund 变换	(113)
§ 7	Hilbert 定理	(117)
7.1	负曲率曲面上的渐近线网	(118)
7.2	常负曲率完备曲面上的整体渐近线网	(120)
7.3	定理的证明	(124)
§ 8	Hartman-Nirenberg 定理	(125)
8.1	预备引理	(125)
8.2	定理的证明	(130)
§ 9	极小曲面的 Bernstein 定理	(132)
9.1	共变微分和 Laplacian Δ	(133)
9.2	关于 Gauss 曲率的计算	(137)
9.3	极小图的 Gauss 曲率计算	(138)
9.4	Bernstein 定理的证明	(139)
§ 10	常平均曲率曲面	(142)
10.1	面积的变分	(142)
10.2	保体积的变分	(144)
10.3	Hopf 定理	(148)

第四章 曲面的内蕴几何学

§ 1	曲面上的向量场	(153)
1.1	曲面上的向量场	(153)
1.2	曲面上向量场的平行移动	(155)
1.3	向量场的奇点	(157)
1.4	抽象曲面上的向量场	(162)

§ 2	测地线与完备曲面	(166)
2.1	测地线	(166)
2.2	指数映射 \exp	(168)
2.3	测地线的最短性	(168)
2.4	完备性	(174)
§ 3	弧长的第一变分	(177)
3.1	曲线的变分	(177)
3.2	第一变分公式	(178)
3.3	第一变分公式的应用	(180)
§ 4	弧长的第二变分及 Jacobi 场	(181)
4.1	弧长的第二变分公式	(181)
4.2	Jacobi 场	(184)
4.3	共轭点	(187)
§ 5	曲率与拓扑	(189)
5.1	曲率与 Jacobi 场	(189)
5.2	Gauss 曲率非正的曲面	(192)
§ 6	闭测地线与基本群	(194)
6.1	闭测地线与基本群	(194)
6.2	覆盖空间与闭测地线	(196)
6.3	紧致闭曲面上的闭测地线	(199)

第五章 高维欧氏空间的超曲面

§ 1	基本公式	(201)
1.1	超曲面的结构方程和曲率张量	(201)
1.2	主曲率与平均曲率	(204)
§ 2	积分公式	(206)
2.1	Minkowski 积分公式	(206)
2.2	紧致凸超曲面	(208)

§ 3	球面的刚性定理	(209)
3.1	非负 Ricci 曲率的紧致超曲面	(209)
3.2	常数数量曲率的紧致超曲面	(211)
§ 4	极小超曲面的 Bernstein 型定理	(215)
4.1	关于第二基本形式的一个估计	(215)
4.2	稳定性不等式	(217)
4.3	Bernstein 定理的推广	(219)
4.4	定理 4.4 的另一证明	(223)
§ 5	常平均曲率的完备超曲面	(227)
5.1	常平均曲率图	(227)
5.2	常平均曲率超曲面的曲率估计	(229)
5.3	具有有限全曲率的常平均曲率超曲面	(235)
§ 6	平均曲率流	(238)
6.1	平均曲率流方程	(238)
6.2	解的短时间存在性	(240)
6.3	度量和曲率的发展	(241)
6.4	紧致凸超曲面的收缩	(244)
附录 A 欧氏空间点集拓扑概要		(250)
附录 B 曲面的拓扑分类		(259)
参考文献		(274)

第一章 活动标架法

活动标架法是由法国大数学家 E. Cartan (1869 ~ 1951) 发扬光大的, 现已成为研究微分几何和几何分析的有力工具. 我们在这里只作最初步的介绍, 目的是为后面讨论曲线和曲面几何性质作准备.

§ 1 么正标架

1.1 么正标架

考虑通常的三维欧氏空间 \mathbb{E}^3 . 在 \mathbb{E}^3 中可引入一固定的右手系直角坐标标架 $\{O; E_1, E_2, E_3\}$, 其中 O 是原点, E_1, E_2, E_3 是三个相互正交的单位向量, 它们构成右手系. 本书中向量也用普通拉丁字母表示, 省去了字母上头的箭头. 读者可从上下文中辨认这点.

\mathbb{E}^3 中的一个活动么正标架 $\{x; e_1, e_2, e_3\}$ 是指任一点 $x \in \mathbb{E}^3$ 和从 x 出发的任意三个相互正交的单位向量 e_1, e_2, e_3 , 它们构成右手系, 如图 1-1 所示. 显然, $\{O; E_1, E_2, E_3\}$ 也是一个么正标架, 但它一旦取定后, 就固定不动了. \mathbb{E}^3 中的点 x 对应位置向量 \vec{Ox} ; 以后我们就把 x 看成位置向量 \vec{Ox} 而不再一一说明.

\mathbb{E}^3 中所有么正标架的全体构成一个标架空间, 它依赖于六个参数: 三个参数用来确定标架的顶点 x 的位置, 三个参数用来确定右手系的三个单位向量 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 绕顶点的旋转. 从刚体运动学知, 活动标架 $\{x; e_1, e_2, e_3\}$ 可由固定标架 $\{O; E_1, E_2, E_3\}$ 经适当平移和旋转而得. 六个参数可理解为 x 的三个坐标和标架旋转的三

个 Euler 角.

E^3 中的一个运动是指由平移和旋转组成的一个点变换. 在运动下, 空间两点的距离和两向量之间的角度都保持不变. 显然, 所有运动的全体构成一个群 G , 称为 E^3 的运动群. E^3 中任一么正标架总可由固定标架经一运动 (即 G 的一元素) 得来. 因此, E^3 的运动

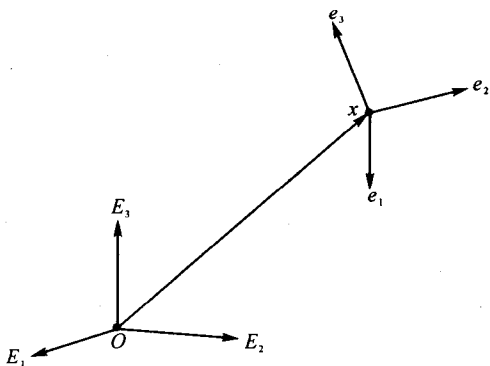


图 1-1

群 G 与标架空间是一一对应的. 我们可把么正标架看成运动群 G 的元素的几何表示, 从而使标架空间与 G 等同起来.

设 E^3 中连续可微地变动的么正标架依赖于 m (≤ 6) 个参数 u^1, u^2, \dots, u^m :

$$x = x(u^1, \dots, u^m), \quad e_i = e_i(u^1, \dots, u^m), \quad (i = 1, 2, 3).$$

那么, 这样的么正标架的全体称为 m 参数的活动标架场, 它们构成标架空间 (即 G) 的一个 m 维子空间. E. Cartan 的活动标架法的主要思想是, 通过活动标架这座桥梁, 把所研究的几何图形 (子空间) 看成 G 的子空间, 然后把 G 的性质自然地诱导到这个子空间上, 从而得出所要研究的图形在 G 变换下不变的几何性质. 这正是 Lie 群论在微分几何上的应用.

下面举两个大家熟悉的例子.

例 1 (单参数么正标架场) 给定 E^3 中一条光滑曲线 $C: x = x(s)$, 其中 s 为弧长参数. 在曲线 C 上每点可配置一个 Frenet 标架:

$$x = x(s),$$

$$e_1 = \frac{dx}{ds} = T(s),$$

$$e_2 = \frac{dT}{ds} \Big/ \left| \frac{dT}{ds} \right| = N(s),$$

$$e_3 = T(s) \times N(s) = B(s).$$

这样, $\{x(s); e_1(s), e_2(s), e_3(s)\}$ 就构成一单参数活动标架场. 反之, 一个单参数活动标架场的顶点描绘出空间的一条曲线(见图 1-2). 因此, 空间曲线 C 可看成运动群 G 的一维子空间.

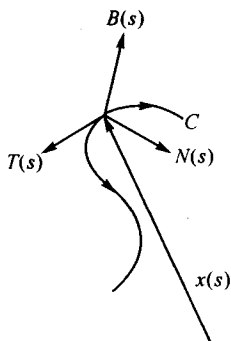


图 1-2

例 2(双参数么正标架场) 给定 E^3 中一片正则曲面 $M: x = x(u, v)$, 其中 (u, v) 为一般坐标网. 于是, 在 M 的每点 $x(u, v)$ 可配置一个么正标架:

$$x = x(u, v),$$

$$e_1 = \frac{x_u}{|x_u|},$$

$$e_2 = \frac{x_v - (x_v \cdot e_1)e_1}{|x_v - (x_v \cdot e_1)e_1|},$$

$$e_3 = e_1 \times e_2 = n(u, v).$$

这里 $x_u = \frac{\partial x}{\partial u}$, $x_v = \frac{\partial x}{\partial v}$, $n(u, v)$ 就是 M 在 x 的单位法向量. 这样, $\{x(u, v); e_1(u, v), e_2(u, v), e_3(u, v)\}$ 就构成一双参数的活动标架场(见图 1-3). 反之, 任一双参数活动标架场的顶点描绘出空间一片曲面. 因此, 曲面可看成运动群 G 的二维子空间.

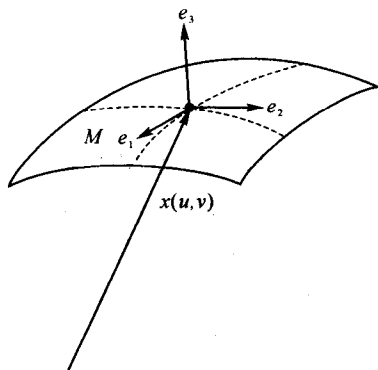


图 1-3

1.2 么正标架的运动方程

设 $\{x(u); e_i(u)\}$ 是 E^3 中的 $m (\leq 6)$ 参数活动标架场, 这里约定

$$u = (u^1, \dots, u^m), \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

它们关于固定么正标架 $\{O; E_1, E_2, E_3\}$ 有分解式

$$\begin{cases} x = x^i(u)E_i, \\ e_i = a_i^j(u)E_j. \end{cases} \quad (1.1)$$

其中, $x^i(u)$ 和 $a_i^j(u)$ 都是参数 u 的函数. 这里及以后, 我们采用 Einstein 求和约定: 凡一项中出现两个相同的指标 (一个在上, 一个在下) 即表示对该指标求和. 这个指标称为 **哑指标**, 或 **求和指标**.

(1.1) 中 (a_i^j) 是正交矩阵, 设其逆矩阵为 (b_i^j) , 则

$$E_i = b_i^j e_j. \quad (1.2)$$

取(1.1)的微分得

$$\begin{cases} dx = (dx^i)E_i, \\ de_i = (da_i^j)E_j. \end{cases} \quad (1.3)$$

若记 $x(u + du)$ 处的标架为 $\{x(u + du); e_i(u + du)\}$, 则忽略二阶以上微分后, 它便是 $\{x + dx; e_i + de_i\}$. 因此, (1.3) 表示标架 $\{x(u); e_i(u)\}$ 经无穷小变换 $u \mapsto u + du$ 后, 无穷小位移 dx 和无穷小向量 de_i 在固定么正标架下的分解式. 注意到

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^a} du^a, \quad da_i^j = \frac{\partial a_i^j}{\partial u^a} du^a \quad (\alpha = 1, \dots, m),$$

把(1.2)代入(1.3)便得

$$\begin{cases} dx = \omega^i e_i, \\ de_i = \omega_i^j e_j, \end{cases} \quad (1.4)$$

其中,