新世纪高等院校精品教材·数学类

整体微分几何初步

（第二版）

沈一兵 编著

浙江大学出版社

整体微分几何初步

沈一兵　编著

浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

整体微分几何初步/沈一兵编著. —2版. —杭州:浙江大学出版社，2005.10
ISBN 7-308-04501-3/O.335

Ⅰ.整... Ⅱ.沈... Ⅲ.整体几何:微分几何
Ⅳ.018

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第113644号

责任编辑 杨晓鸣
封面设计 刘依群
出版发行 浙江大学出版社
(杭州浙大路38号 邮政编码310027)
(E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址:http://www.zjupress.com)
排　　版 浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷 杭州杭新印务有限公司
开　　本 850mm×1168mm 1/32
印　　张 9
字　　数 220千字
版 印 次 2005年10月第2版 2005年10月第2次印刷
书　　号 ISBN 7-308-04501-3/O・335
定　　价 13.50元

序

微分几何是一门古老的学科，历史悠久，它是以数学分析为工具来研究空间形式的数学分支. 经典微分几何主要讨论曲线与曲面的局部性质. 20 世纪以来随着分析方法的发展，微分几何内容也越来越充实和深刻，除局部性质外，还研究关于图形的整体性质. 由于整体微分几何的发展，这门学科虽然古老，但生命力至今还很旺盛，是当前基础研究的热门领域. 它和其他许多数学学科以及理论物理等互相渗透. 例如，它与微分方程、李群、变分学、泛函、拓扑、复变函数论、规范场论等的关系越来越密切，并互相影响、互相促进. 因此，它的内容和方法也在不断更新.

多年来，一般高校微分几何教材是以经典的初等微分几何为其主要内容的. 所谓“经典”，即如上所述，它所讨论的主要是图形的局部性质；所谓“初等”是指，为了初学者容易理解和入门，所研究的对象只限于三维欧几里得空间内的曲线和曲面. 由于微分几何这个学科的不断

发展，也由于现代科学技术发展的需要，微分几何教材的内容所包含的范围必须扩大，即必须加入整体微分几何的部分内容．因此，编写一本整体微分几何教材已成为当前的需要，但这种教材目前国内尚不多见．沈一兵教授这本教材开始编写于20世纪80年代初期，经过十多年的教学实践，不断修改充实，并采用幺正活动标架法，使得几何问题化为外形式计算，突破了用坐标系来计算的传统框架，这是几何学研究的一种现代方法．沈一兵教授在整体微分几何领域的研究造诣很深，以他一丝不苟的治学精神写成的这本书，我相信一定是一本好书，对于它的出版我寄予厚望．

白正国

1997年秋于杭州

第1版前言

整体微分几何的名称最早可能来自德国几何学家W. Blaschke对凸闭曲线和卵形面的研究.后来经过许多数学家的努力,使之得到全面发展.今天已成为几何学、分析学和拓扑学相互交织的一个重要研究领域,也成为研究理论物理的有力工具之一.

为了满足我系数学专业的教学需要,在文献[1,2]的启发影响下,我们在20世纪80年代初期编写了有关整体微分几何的讲义.经过十多年教学实践,不断增删修改,才形成本书现在的样子.全书共分四章:第一章,活动标架法;第二章,曲线的整体微分几何;第三章,$\mathbf{E}^3$ 中曲面的整体微分几何;第四章,曲面的内蕴几何学.为了完整起见,另加了两个附录:附录A,欧氏空间点集拓扑概要;附录B,曲面的拓扑分类.

对于已经熟悉活动标架法和外微分形式的读者,可以跳过第一章.第四章的内容实质上是黎曼几何的范畴,目的是想引起读者对高维流形几何的兴趣.有关局部微

分几何计算，我们主要采用活动标架法. 这不仅为了简化计算，也想使高年级学生能了解外微分形式的有关知识. 本书内容基本上是自封闭的，凡涉及较多或较高深的其他数学知识，则尽可能注明参考文献. 限于笔者水平，书中疵谬之处可能难免，热忱欢迎读者不吝指正.

这里我要感谢我的老师白正国教授对本书的关心和指导，感谢我系几何学教研室有关老师的热情支持，也感谢郭孝英老师和傅吉祥博士在具体工作上的帮助.

最后，我要感谢杭州大学出版社对本书出版的大力支持和帮助.

沈一兵
1997 年 9 月

再 版 跋

本书原是作者学习整体微分几何和外形式法的一些心得体会，整理后于1998年由原杭州大学出版社出版，拟作数学系高年级本科生的选修课教材．出版后颇受广大读者重视和钟爱，不久书即告罄．

书中不少内容源自著名几何学大师陈省身先生的学术论著和演讲．2001年先生来杭时曾对本书颇加嘉奖，并建议稍增内容，译成英文．但由于作者拖沓，一直未能兑现．不料先生于2004年12月3日突然仙逝，作者悲悼之余，也对此事遗憾万分．作者愿以再版此书敬献先生！

本版与初版的主要差别是增加了第五章：高维欧氏空间的超曲面．这是三维欧氏空间中曲面论的最直接和最自然的推广，至今还在发展．建议这一章作为学生讨论班的内容．限于作者水平，书中难免谬误与不妥之处，欢迎广大读者批评指正．

最后，借此机会，谨向被本书引用的文献作者、对本书厚爱的读者、国家自然科学基金会、浙江大学数学系和浙江大学出版社，致以衷心感谢．

沈一兵

2005年9月

目　录

第一章　活动标架法

第二章　曲线的整体微分几何

第三章 E^3 中曲面的整体微分几何

第四章　曲面的内蕴几何学

第五章　高维欧氏空间的超曲面

第一章　活动标架法

活动标架法是由法国大数学家E. Cartan（1869～1951）发扬光大的，现已成为研究微分几何和几何分析的有力工具. 我们在这里只作最初步的介绍，目的是为后面讨论曲线和曲面几何性质作准备.

§1　幺正标架

1.1　幺正标架

考虑通常的三维欧氏空间$\mathbf{E}^3$. 在$\mathbf{E}^3$中可引入一固定的右手系直角坐标标架$\{O;E_1,E_2,E_3\}$，其中O是原点，E_1,E_2,E_3是三个相互正交的单位向量，它们构成右手系. 本书中向量也用普通拉丁字母表示，省去了字母上头的箭头. 读者可从上下文中辨认这点.

$\mathbf{E}^3$中的一个活动幺正标架$\{x;e_1,e_2,e_3\}$是指任一点$x\in\mathbf{E}^3$和从x出发的任意三个相互正交的单位向量e_1,e_2,e_3，它们构成右手系，如图 I-1 所示. 显然，$\{O;E_1,E_2,E_3\}$也是一个幺正标架，但它一旦取定后，就固定不动了. $\mathbf{E}^3$中的点x对应有位置向量$\overrightarrow{Ox}$；以后我们就把x看成位置向量$\overrightarrow{Ox}$而不再一一说明.

$\mathbf{E}^3$中所有幺正标架的全体构成一个标架空间，它依赖于六个参数：三个参数用来确定标架的顶点x的位置，三个参数用来确定右手系的三个单位向量$\{e_1,e_2,e_3\}$绕顶点的旋转. 从刚体运动学知，活动标架$\{x;e_1,e_2,e_3\}$可由固定标架$\{O;E_1,E_2,E_3\}$经适当平移和旋转而得. 六个参数可理解为x的三个坐标和标架旋转的三

个 Euler 角.

$\mathbf{E}^3$ 中的一个运动是指由平移和旋转组成的一个点变换. 在运动下,空间两点的距离和两向量之间的角度都保持不变. 显然,所有运动的全体构成一个群 G,称为 $\mathbf{E}^3$ 的运动群. $\mathbf{E}^3$ 中任一幺正标架总可由固定标架经一运动(即 G 的一元素)得来. 因此,$\mathbf{E}^3$ 的运动群 G 与标架空间是一一对应的. 我们可把幺正标架看成运动群 G 的元素的几何表示,从而使标架空间与 G 等同起来.

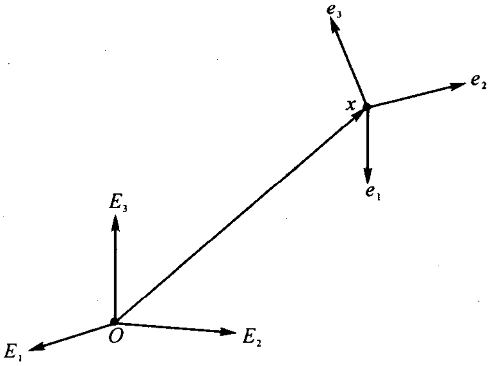

图 I-1

现设 $\mathbf{E}^3$ 中连续可微地变动的幺正标架依赖于 $m(\leqslant 6)$ 个参数 $u^1, u^2, \cdots, u^m$:

$$x = x(u^1, \cdots, u^m), \quad e_i = e_i(u^1, \cdots, u^m), \quad (i = 1,2,3).$$

那么,这样的幺正标架的全体称为 m 参数的活动标架场,它们构成标架空间(即 G) 的一个 m 维子空间. E. Cartan 的活动标架法的主要思想是,通过活动标架这座桥梁,把所研究的几何图形(子空间) 看成 G 的子空间,然后把 G 的性质自然地诱导到这个子空间上,从而得出所要研究的图形在 G 变换下不变的几何性质. 这正是 Lie 群论在微分几何上的应用.

下面举两个大家熟悉的例子.

例 1(单参数幺正标架场)　给定 $\mathbf{E}^3$ 中一条光滑曲线 $C: x = x(s)$,其中 s 为弧长参数. 在曲线 C 上每点可配置一个 Frenet 标架:

$$x = x(s),$$

$$e_1 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = T(s),$$

$$e_2 = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}\Big/\left|\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}\right| = N(s),$$

$$e_3 = T(s) \times N(s) = B(s).$$

这样，$\{x(s);e_1(s),e_2(s),e_3(s)\}$ 就构成一单参数活动标架场.反之，一个单参数活动标架场的顶点描绘出空间的一条曲线(见图 I-2).因此，空间曲线 C 可看成运动群 G 的一维子空间.

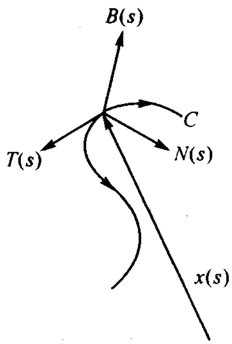

图 I-2

例 2(双参数幺正标架场)　给定 $\mathbf{E}^3$ 中一片正则曲面 M：$x = x(u,v)$，其中 (u,v) 为一般坐标网.于是，在 M 的每点 $x(u,v)$ 可配置一个幺正标架：

$$x = x(u,v),$$

$$e_1 = \frac{x_u}{|x_u|},$$

$$e_2 = \frac{x_v - (x_v \cdot e_1)e_1}{|x_v - (x_v \cdot e_1)e_1|},$$

$$e_3 = e_1 \times e_2 = n(u,v).$$

这里 $x_u = \frac{\partial x}{\partial u}, x_v = \frac{\partial x}{\partial v}, n(u,v)$ 就是 M 在 x 的单位法向量.这样，$\{x(u,v);e_1(u,v),e_2(u,v),e_3(u,v)\}$ 就构成一双参数的活动标架场(见图 I-3).反之，任一双参数活动标架场的顶点描绘出空间一片曲面.因此，曲面可看成运动群 G 的二维子空间.

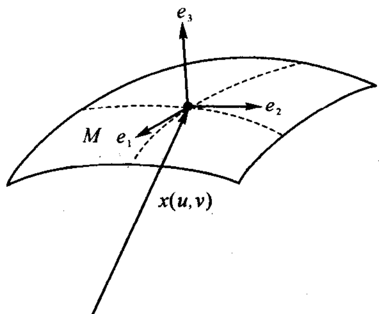

图 I-3

1.2 幺正标架的运动方程

设$\{x(u);e_i(u)\}$是$\mathbf{E}^3$中的$m(\leqslant 6)$参数活动标架场，这里约定

$$u=(u^1,\cdots,u^m),\quad i,j,k=1,2,3.$$

它们关于固定幺正标架$\{O;E_1,E_2,E_3\}$有分解式

$$\begin{cases}x=x^i(u)E_i,\\ e_i=a_i^j(u)E_j.\end{cases}\tag{1.1}$$

其中，$x^i(u)$和$a_i^j(u)$都是参数u的函数. 这里及以后，我们采用Einstein求和约定：凡一项中出现两个相同的指标（一个在上，一个在下）即表示对该指标求和. 这个指标称为哑指标，或求和指标.

(1.1)中(a_i^j)是正交矩阵，设其逆矩阵为(b_i^j)，则

$$E_i=b_i^je_j.\tag{1.2}$$

取(1.1)的微分得

$$\begin{cases}\mathrm{d}x=(\mathrm{d}x^i)E_i,\\ \mathrm{d}e_i=(\mathrm{d}a_i^j)E_j.\end{cases}\tag{1.3}$$

若记$x(u+\mathrm{d}u)$处的标架为$\{x(u+\mathrm{d}u);e_i(u+\mathrm{d}u)\}$，则忽略二阶以上微分后，它便是$\{x+\mathrm{d}x;e_i+\mathrm{d}e_i\}$. 因此，(1.3)表示标架$\{x(u);e_i(u)\}$经无穷小变换$u\mapsto u+\mathrm{d}u$后，无穷小位移$\mathrm{d}x$和无穷小向量$\mathrm{d}e_i$在固定幺正标架下的分解式. 注意到

$$\mathrm{d}x^i=\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\mathrm{d}u^\alpha,\quad \mathrm{d}a_i^j=\frac{\partial a_i^j}{\partial u^\alpha}\mathrm{d}u^\alpha\quad(\alpha=1,\cdots,m),$$

把(1.2)代入(1.3)便得

$$\begin{cases}\mathrm{d}x=\omega^ie_i,\\ \mathrm{d}e_i=\omega_i^je_j,\end{cases}\tag{1.4}$$

其中，