

高中数学基础知识 与例题分析

GAOZHONG SHUXUE JICHU

ZHISHI YU LITI FENXI

乔家瑞 任中文 张鸿菊 蒋佩锦 陈俊辉 刘绍贞 储瑞年



北京师范大学出版社

高中数学

基础知识与例题分析

乔家瑞 任中文 张鸿菊 蒋佩锦
陈俊辉 刘绍贞 储瑞年 编

北京师范大学出版社

高中数学
基础知识与例题分析
乔家瑞等 编

北京师范大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
西安新华印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：24.125 字数：516千

1985年10月第1版 1985年10月第1次印刷

印数：1—33,000

统一书号：7243·285 定价：3.30元

前 言

为了满足高中数学教学的需要，我们编写了这本“高中数学基础知识与例题分析”。它是本社出版的“初中数学基础知识与例题分析”的续篇。本书是根据教育部颁发的中学数学基本要求和较高要求，以及全日制统编教材而编写的，以基本要求为主，带“*”号的内容为较高要求。全书按知识系统共分二十二章，每章包括基础知识、典型例题分析和练习题三部分。基础知识力求简明扼要，系统全面，例题分析给出了解题的思路、方法和技巧，练习题分为基本练习题与综合练习题，基本练习题主要是对基本知识进行训练，综合练习题可以培养读者分析问题和解决问题的能力，最后还安排了总复习题，并附有答案或提示。

本书可供高中学生在学习中使用，也可以作为毕业复习用书。本书还可以作为在职职工，自学青年的自学用书，数学教师的教学参考书。

本书由北京市部分重点中学的教师：刘绍贞（北京四中）、蒋佩锦（北京五中）、任中文（北京二十六中）、张鸿菊（北京师大附中）、陈俊辉（北京师大二附中）、储瑞年（北京师大实验中学）及北京教育学院崇文分院乔家瑞等编写，由任中文、乔家瑞审理全部原稿。

限于我们的水平，书中定有不妥之处，请读者批评指正。

编 者

1985.8.

目 录

第一部分 代 数

第一章	实数与式	(1)
第二章	方程	(29)
第三章	函数	(56)
第四章	数列与数学归纳法	(93)
第五章	不等式	(131)
第六章	行列式和线性方程组	(171)
第七章	复数	(198)
第八章	一元多项式和高次方程	(218)
第九章	排列, 组合, 二项式定理	(232)
第十章	概率	(264)

第二部分 平面三角

第十一章	三角函数	(285)
第十二章	两角和与差的三角函数	(323)
第十三章	反三角函数和简单三角方程	(371)

第三部分 立体几何

第十四章	直线和平面	(399)
第十五章	多面体和旋转体	(427)

第四部分 解析几何

第十六章	直线	(449)
第十七章	圆锥曲线	(486)

第十八章 坐标变换.....(526)

第十九章 参数方程 极坐标.....(540)

第五部分 微积分初步

第二十章 极限和连续.....(573)

第二十一章 导数和微分.....(612)

第二十二章 积分.....(633)

第六部分 总复习题

基本练习题.....(655)

综合练习题.....(671)

第七部分 提示和答案

第一章.....(685)

第二章.....(688)

第三章.....(691)

第四章.....(694)

第五章.....(696)

第六章.....(698)

第七章.....(700)

第八章.....(702)

第九章.....(705)

第十章.....(707)

第十一章.....(710)

第十二章.....(716)

第十三章.....(719)

第十四章.....(724)

第十五章.....(725)

第十六章.....(729)

第十七章.....	(735)
第十八章.....	(739)
第十九章.....	(741)
第二十章.....	(744)
第二十一章.....	(750)
第二十二章.....	(754)
总复习题.....	(758)

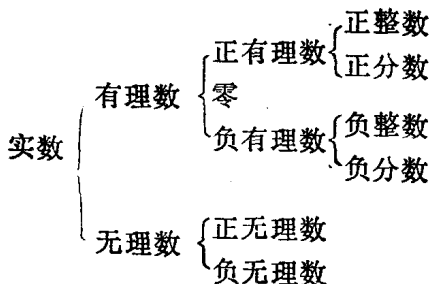
第一部分 代 数

第一章 实数与式

一、实 数

1. 整数与分数统称有理数,有理数与无理数统称实数。

有理数包括整数和分数(有限小数、无限循环小数),无理数是无限不循环小数。实数还可以做如下分类:



各个数集的符号表示如下:

实数集—— R , 有理数集—— Q ,

整数集—— Z .

任何一个有理数都可以表示为 $\frac{n}{m}$, 这里 m 、 n 为互

质的整数, $m \neq 0$ 。此外, 奇数、偶数可以表示为 $2n-1$, $2n(n \in \mathbb{Z})$ 。

2. 数轴 规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴。

实数集与数轴上点集之间是一一对应的。在数轴上越往右边的点所对应的实数越大。

3. 实数的绝对值

$$|a| = \begin{cases} a & (a > 0), \\ 0 & (a = 0), \\ -a & (a < 0). \end{cases}$$

$|a|$ 的几何意义是实数 a 在数轴上的对应点到原点的距离。在对字母进行讨论时, 要注意分正数、零、负数三种情况。

4. 实数的运算 在实数集合内可以施行加、减、乘、除、乘方等运算, 非负实数的 n 次方根和负实数的奇次方根有意义, 但负实数的偶次方根无意义。

实数运算满足交换律、结合律和分配律。

二、代 数 式

1. 代数式 用运算 (指加、减、乘、除, 乘方、开方) 符号把数或表示数的字母连结而成的式子叫做代数式。代数式的分类:

$$\text{代数式} \begin{cases} \text{有理式} \\ \text{无理式} \end{cases} \begin{cases} \text{整式} \\ \text{分式} \end{cases}$$

2. 整式

(1) 整式和它的四则运算 (略)

(2) 乘法公式, 要熟练掌握以下七个公式:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2;$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3;$$

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3.$$

特别要避免发生以下错误: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm b^2;$

$$(a \pm b)(a^2 \pm ab + b^2) = a^3 \pm b^3.$$

(3) 多项式的因式分解

把一个多项式化成几个整式的积的形式叫做多项式的因式分解。

因式分解的结果与给出的数集有关, 并且在给定的数集内做到不能再继续分解为止。例如

$$x^4 - 9 = (x^2 + 3)(x^2 - 3) \quad (\text{在有理数集中})$$

$$= (x^2 + 3)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) \quad (\text{在实数集中})$$

$$= (x + \sqrt{3}i)(x - \sqrt{3}i)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$$

(在复数集中)

因式分解的主要方法有:

对一般多项式 $\left\{ \begin{array}{l} \text{①提取公因式法} \\ \text{②乘法公式法} \\ \text{③分组分解法} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{适当分组} \\ \text{拆项分组} \\ \text{添减项分组} \end{array} \right.$

对二次三项式 $\begin{cases} \text{①十字相乘法} \\ \text{②配方法} \\ \text{③求根公式法} \end{cases}$

此外，当多项式可以表示为某种确定形式的乘积时，还可利用待定系数法分解因式。配方法与待定系数法是两个重要的数学方法，要注意熟练掌握。

3. 分式

分式的基本性质： $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} (m \neq 0)$ ，分式的约分和

通分是分式运算的根据和基础，要熟练准确的掌握。

4. 根式

(1) 概念 如果 $x^n = a (n \in N, n > 1)$ ，那么 x 叫做 a 的 n 次方根。表示方根的代数式 $\sqrt[n]{a}$ 叫做根式。其中 n 叫做根指数， a 叫做被开方数。求一个数的方根运算叫做开方。

对方根的定义，要特别注意：

$\sqrt[n]{a}$ 要有意义。当 n 为偶数时， a 为非负实数，当 n 为奇数时， a 为实数。

当 $\sqrt[n]{a}$ 有意义时，则 $(\sqrt[n]{a})^n = a$ 。

对于 $\sqrt[n]{a^n}$ ，则要视 n 的情况决定：

当 n 为偶数， $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ ，

当 n 为奇数， $\sqrt[n]{a^n} = a$ 。

此外，还要分清最简根式，同次根式，同类根式。

具有以下三个条件的根式，叫做最简根式。

①被开方数的指数和根指数互质；

②被开方数的每一个因式的指数都小于根指数；

③被开方数不含分母。

根指数相同的根式叫做同次根式，根指数和被开方数都相同的最简根式叫做同类根式。

(2) 算术根 正数 a 的正的 n 次方根，叫做 a 的 n 次算术根，记作 $\sqrt[n]{a}$ 。当 $n=2$ 时，特别有

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0), \\ -a & (a < 0). \end{cases}$$

(3) 根式的基本性质

当 $a \geq 0$ 时， $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$ ($m, n, p \in N, n > 1$)。

(4) 积、商、幂、方根的算术根

在 $a \geq 0, b \geq 0$ 的条件下，

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad (n \in N, n > 1);$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (n \in N, n > 1 \text{ 且 } b \neq 0)$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \quad (m, n \in N, n > 1)$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \quad (m, n \in N, m > 1, n > 1)$$

(5) 根式的化简与运算 (略)

三、指数式和对数式

1. 指数与对数的概念

(1) 各种有理指数幂的定义

正整数指数幂 $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \uparrow}$ ($n \in N$)

零指数幂 $a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$;

负整数指数幂 $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (n \in N, a \neq 0)$;

正分数指数幂 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a \geq 0, m, n \in N, n > 1)$;

负分数指数幂 $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \quad (a > 0, m, n \in N, n > 1)$.

(2) 对数的定义

如果 $a^b = N \quad (a > 0, a \neq 1)$, 那么 b 叫做以 a 为底的 N 的对数. 记作 $b = \log_a N$.

2. 指数与对数的关系和比较

	指 数	对 数
互 化	$a^b = N$	$\iff b = \log_a N$ $a > 0, a \neq 1$
对数恒等式	$a^{\log_a N} = N$	
运算性质	① $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	$\log_a (m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$
	② $(a^p)^k = a^{kp}$	$\log_a m^k = k \log_a m$
	③ $(a^p \cdot a^q)^k = a^{kp} \cdot a^{kq}$	$\log_a (m^\alpha \cdot n^\beta) = \alpha \log_a m + \beta \log_a n$
特殊值	$a^0 = 1 \quad a^1 = a$	$\log_a 1 = 0 \quad \log_a a = 1$

注: 对数运算的实质是同底数幂运算中, 指数的运算.

3. 对数换底公式

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}.$$

由换底公式得到的三个重要推论:

$$(1) \log_a b = \frac{1}{\log_b a}; \quad (2) \log_a b \cdot \log_b c = \log_a c;$$

$$(3) \log_a b^n = \frac{n}{k} \log_a b; \quad \text{特别地} \log_a b^a = \log_a b.$$

即当底数和真数同时 a 次方 (a 为有理数) 时, 对数的值不变. 例如 $\log_{\sqrt{2}} 4 = \log_2 16$, $\log_{40} 64 = \log_7 8$,

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} = \log_3 27 \text{ 等等.}$$

4. 常用对数

以10为底的对数叫做常用对数, 即 $\log_{10} N$, 简记为 $\lg N$. 一个正数 A 的常用对数可以写成两部份:

$$\lg A = k + a \quad (k \in \mathbb{Z}, 0 \leq a < 1).$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 首数 尾数

(1) 首数 用科学记数法, A 可以写成 $a \times 10^k$ 的形式 (其中 $1 \leq a < 10, k \in \mathbb{Z}$), k 就是正数 A 的常用对数的首数.

(2) 尾数 只是小数点位置不同的数, 它们的对数尾数相同. 这是对数尾数的重要性质.

例1 回答下列问题:

(1) 化简 ① $\sqrt{-a-b+2\sqrt{ab}} \quad (a < 0, b < 0);$

② $\sqrt{\lg^2 a - \lg a^2 + 1}.$

(2) 比较 $\sqrt{3x-1-2x^2}$ 与 $\lg\left(\frac{6x-2}{5}\right)$ 的大小.

(3) 已知 $|\log_m 3 - \log_m 2| = -(\log_m 3 - \log_m 2)$, 求实数 m 的取值范围.

$$\text{解: (1)} \sqrt{-a-b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{(\sqrt{-a}+\sqrt{-b})^2} \\ = \sqrt{-a}+\sqrt{-b} \quad (a < 0, b < 0);$$

$$\sqrt{\lg^2 a - \lg a^2 + 1} = \sqrt{\lg^2 a - 2\lg a + 1}$$

$$= |\lg a - 1| = \begin{cases} \lg a - 1 & (a \geq 10) \\ 1 - \lg a & (0 < a < 10) \end{cases}.$$

$$(2) \sqrt{3x-1-2x^2} \text{ 有意义, 要求 } 3x-1-2x^2 \geq 0,$$

$$\therefore (2x-1)(x-1) \leq 0, \text{ 则 } \frac{1}{2} \leq x \leq 1.$$

$$\text{当 } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ 时, } \frac{1}{5} \leq \frac{6x-2}{5} \leq \frac{4}{5},$$

$$\therefore \lg\left(\frac{6x-2}{5}\right) < 0,$$

$$\text{又 } \sqrt{3x-1-2x^2} \geq 0,$$

$$\therefore \sqrt{3x-1-2x^2} > \lg\left(\frac{6x-2}{5}\right).$$

$$(3) \text{ 由绝对值的概念, 有 } -(\log_m 3 - \log_m 2) \geq 0,$$

$$\therefore \log_m 3 \leq \log_m 2.$$

根据对数函数的增减性, 有 $0 < m < 1$.

绝对值、算术根概念性强。特别是在综合应用中容易发生错误, 其根本原因是对“用字母表示数”的认识不深。随着学习内容的深入, 字母 a 的含义也不不断深化, 不能只根据外表判断符号。如例 1 的 (1) 中 ① $-a-b+2\sqrt{ab}$ 误为 $-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$; ② $|\lg a - 1|$ 误为 $\lg a - 1$ 。(2) 中的 $\sqrt{3x-1-2x^2}$ 忘记了算术根有意义的要求, 不去考虑 x 的取值范围, 从而使问题无法下手。

例2 已知实数 x, y, z 满足 $\frac{1}{2}|x-y| + \sqrt{2y+z} + z^2$

$-z + \frac{1}{4} = 0$, 求 $(z+y)^x$ 的值.

解: 由条件 $\frac{1}{2}|x-y| + \sqrt{2y+z} + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$

又 $|x-y| \geq 0$, $\sqrt{2y+z} \geq 0$, $\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$

$$\therefore \begin{cases} x-y=0, \\ 2y+z=0, \\ z-\frac{1}{2}=0. \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} x=-\frac{1}{4}, \\ y=-\frac{1}{4}, \\ z=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\therefore (z+y)^x = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)^{-1/4} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1/4} = \sqrt{2}.$$

此题强调了实数的一些重要性质: (1) 绝对值、算术根, 完全平方数都是非负数. (2) 如果若干个非负数的和为零, 则每个非负数均是零. 即若 $a, b \in R$, 且 $a^2 + b^2 = 0$, 或 $\sqrt{a} + |b| = 0$, 则 $a = b = 0$.

例3 试回答下列各式所确定的实数 a, b 或 a, b, c 之间的关系

- (1) $ab = 1$; (2) $a + b = 0$; (3) $a^2 = b^2$;
 (4) $abc \neq 0$; (5) $(a-b)(b-c)(c-a) = 0$;
 (6) $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$.

解: (1) a, b 互为倒数; (2) a, b 互为相反数;
 (3) a, b 的绝对值相等; (4) a, b, c 都不为零;

(5) $a-b$, $b-c$, $c-a$ 三个数中至少有一个为零, 即 a 、 b 、 c 中至少有两个相等; (6) $a=b=c$.

上述六个关系是非常基本而且重要的关系, 在审题和解题意中经常遇到, 要能准确, 熟练地运用.

例4 在实数集中, 把下列各式分解因式;

$$(1) \quad 36a^{3n+5} - 54a^{2n+3};$$

$$(2) \quad 6x^2 + 15ab - 10ax - 9bx;$$

$$(3) \quad a^3 - 2a^2 + 4a - 3;$$

$$(4) \quad x^4 - 13x^2 + 36;$$

$$(5) \quad (x^2 + 3x - 2)(x^2 + 3x + 4) - 16;$$

$$(6) \quad (1+a)^2(1+b^2) - (1+a^2)(1+b)^2.$$

解: (1) $36a^{3n+5} - 54a^{2n+3} = 18a^{2n+3}(2a^{n+2} - 3);$

$$\begin{aligned}(2) \quad 6x^2 + 15ab - 10ax - 9bx \\&= 3x(2x - 3b) - 5a(2x - 3b) \\&= (2x - 3b)(3x - 5a); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \quad a^3 - 2a^2 + 4a - 3 \\&= a(a-1)^2 + 3(a-1) \\&= (a-1)(a^2 - a + 3); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4) \quad x^4 - 13x^2 + 36 \\&= (x^2 - 9)(x^2 - 4) \\&= (x+3)(x-3)(x+2)(x-2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(5) \quad (x^2 + 3x - 2)(x^2 + 3x + 4) - 16 \\&= (x^2 + 3x + 1 - 3)(x^2 + 3x + 1 + 3) - 16 \\&= (x^2 + 3x + 1)^2 - 9 - 16 \\&= (x^2 + 3x + 1 + 5)(x^2 + 3x + 1 - 5) \\&= (x-1)(x+4)(x^2 + 3x + 6); \end{aligned}$$