数学物理方程

SHUXUE WULI FANGCHENG

◉ 郭时光 编著

西南交通大学出版社
SWJUP
Http://press.swjtu.edu.cn

数学物理方程

郭时光　编著

西南交通大学出版社
·成　都·

内 容 简 介

本书内容分为哈密尔顿算子与场，数学物理方程及其定解问题，通解定解法，格林函数定解法，积分变换定解法，分离变量定解法，两类特殊函数，变分定解法，以及其他数学物理问题等九章.

本书可用作工科院校各专业本科学生以及部分专业硕士研究生的数学物理方程课程教材，也可供其他数学爱好者阅读.

图书在版编目（CIP）数据

数学物理方程 / 郭时光编著. —成都：西南交通大学出版社，2005.8

ISBN 7-81104-051-4

Ⅰ. 数… Ⅱ. 郭… Ⅲ. 数学物理方程—教材 Ⅳ. 0175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 026123 号

数 学 物 理 方 程

郭时光 编著

*

责任编辑 张宝华

责任校对 韩松云

封面设计 意点·印象

西南交通大学出版社出版发行

(成都二环路北一段 111 号 邮政编码：610031 发行部电话：028-87600564)

http: //press.swjtu.edu.cn

E-mail: cbsxx@swjtu.edu.cn

成都新千年印制有限公司印刷

*

成品尺寸：140 mm×203 mm 印张：8.625

字数：230 千字 印数：1—2 000 册

2005 年 8 月第 1 版 2005 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 7-81104-051-4/O·006

定价：16.00 元

前言

作为公共课程的教科书，为了让读者能在规定的学时内掌握必要的内容，本书不打算对较难或较繁的数理知识做过多的介绍.因此，编写时择其精要，以够用为基准，以常见定解问题的常用解法为主线，把重点放在形式解的求得上.

虽然如此，在理论的严密性及表述的准确性上也做了不少工作.例如，对什么是变量分离解，什么是近似解，等等，均给出了明确的说法；对实变换与复变换在化标准形中的不同作用，有细致的分析；必须引用而未加证明的定理，一般有所解释，或附注其出处，以方便读者查阅.

最多的工作是化难为易.本书充分考虑到自学读者或仅有高等数学与线性代数基础的读者的需要.为了使他们在学习时不会有大的困难，本书在需引用其他学科内容时，都预先作了简要介绍.书中尽力设计出简捷的方法来证明定理或解例题，把一些较繁难的问题加以分解，使之更易理解.把能条目化的要点均条目化，结论归结论，分析归分析，证明归证明，使之一目了然，尽量避免做需要读者自己去归纳的分析.

在目录中加有“*”号的章节条目的内容主要用于硕士研究生教学，在本科的教学中可以选用或放弃.第一章中只有拉普拉斯算子及其表示式在以后的章节中要用到.第二章是以后各章的基础.除此而外，第三、四、五、六、八章基本上是相互

独立的；第七章只与第六章有联系，第九章需综合运用前面知识．据此，我们可以有选择地安排教学．

本书中的错误与不妥之处，敬请批评指正！

郭时光

2005年3月于四川自贡

目　录

*第一章　Hamilton 算子与场

场是物理学中的一个重要概念，场方程是数学物理方程的一部分. 本章中介绍的哈密尔顿（Hamilton）算子是场论中的一个算符，在本课程的各章中都要用到它.

第一节　Hamilton 算子与三度

本节介绍 Hamilton 算子在空间直角坐标系中的表示及其计算性质.

一、矢量的运算

设 $Oxyz$ 是空间直角坐标系. 为了方便使用和表示起见，常将其坐标记作 $x_1 = x$， $x_2 = y$， $x_3 = z$；而各坐标轴正向单位矢量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 依次记作 $\boldsymbol{l}_1$、$\boldsymbol{l}_2$、$\boldsymbol{l}_3$.

分量为函数的矢量（例如 $\boldsymbol{a} = \sum\limits_{k=1}^{3} \boldsymbol{l}_k a_k(x)$）称为**矢量函数**. 普通的函数则称为**纯量函数**或标量函数.

对于矢量或矢量函数，除了用到它的线性运算之外，还会用到下列运算:

（1）数量积（或点乘）　$\left(\sum\limits_{k=1}^{3} \boldsymbol{l}_k a_k\right) \cdot \left(\sum\limits_{k=1}^{3} \boldsymbol{l}_k b_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{3} a_k b_k$.

（2）矢量积（或叉乘） $\left(\sum_{k=1}^{3} \boldsymbol{l}_k a_k\right) \times \left(\sum_{k=1}^{3} \boldsymbol{l}_k b_k\right) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{l}_1 & \boldsymbol{l}_2 & \boldsymbol{l}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$.

（3）偏导数 $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{k=1}^{3} \boldsymbol{l}_k a_k\right) = \sum_{k=1}^{3} \boldsymbol{l}_k \dfrac{\partial a_k}{\partial x_j} \quad (j=1,2,3)$.

（4）积分 $\int\left(\sum_{k=1}^{3} \boldsymbol{l}_k a_k\right) \mathrm{d}x_j = \sum_{k=1}^{3} \boldsymbol{l}_k \int a_k \mathrm{d}x_j \quad (j=1,2,3)$. 其中 $a_k = a_k(x_1, x_2, x_3)$， $b_k = b_k(x_1, x_2, x_3)\,(k=1,2,3)$ 均为纯量函数.

注意：非特别申明时，本书中总假定所涉函数具有所需的连续的各阶偏导数.

二、Hamilton 算子

1. Hamilton 算子的定义

Hamilton 算子记作 ∇，它是矢量形式的偏导算子. 在三维空间直角坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 中，它的表达式为

$$\nabla = \boldsymbol{l}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \boldsymbol{l}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \boldsymbol{l}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \tag{1.1}$$

也可按矢量记法简记作

$$\nabla = \left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right\}$$

在一维空间与二维空间中，分别有

$$\nabla = \boldsymbol{l}_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_1}, \quad \nabla = \boldsymbol{l}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \boldsymbol{l}_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

下面主要讨论三维空间的情形，结论可以相应地推广到一、二维空间中.

2. 关于 Hamilton 算子的计算

从 Hamilton 算子表达式中可以看出，它在运算中应既具有矢量性质，也具有微分性质．设 $u=u(x_1,x_2,x_3)$ 是纯量函数，则有

$$\nabla u=\left(\boldsymbol{l}_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\boldsymbol{l}_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\boldsymbol{l}_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)u=\boldsymbol{l}_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+\boldsymbol{l}_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+\boldsymbol{l}_3\frac{\partial u}{\partial x_3}$$

$$u\nabla=\boldsymbol{l}_1u\frac{\partial}{\partial x_1}+\boldsymbol{l}_2u\frac{\partial}{\partial x_2}+\boldsymbol{l}_3u\frac{\partial}{\partial x_3}$$

设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{l}_1a_1+\boldsymbol{l}_2a_2+\boldsymbol{l}_3a_3$ 是矢量函数，其中 a_1、a_2、a_3 均是 x_1、x_2、x_3 的纯量函数，则按空间解析几何中定义的运算，有数量积（或点乘）

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\left(\boldsymbol{l}_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\boldsymbol{l}_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\boldsymbol{l}_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\cdot(\boldsymbol{l}_1a_1+\boldsymbol{l}_2a_2+\boldsymbol{l}_3a_3)$$

$$=\frac{\partial a_1}{\partial x_1}+\frac{\partial a_2}{\partial x_2}+\frac{\partial a_3}{\partial x_3}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\nabla=(\boldsymbol{l}_1a_1+\boldsymbol{l}_2a_2+\boldsymbol{l}_3a_3)\cdot\left(\boldsymbol{l}_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\boldsymbol{l}_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\boldsymbol{l}_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)$$

$$=a_1\frac{\partial}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial}{\partial x_2}+a_3\frac{\partial}{\partial x_3}$$

及矢量积（或叉乘）

$$\nabla\times\boldsymbol{a}=\left(\boldsymbol{l}_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\boldsymbol{l}_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\boldsymbol{l}_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\times(\boldsymbol{l}_1a_1+\boldsymbol{l}_2a_2+\boldsymbol{l}_3a_3)$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{l}_1 & \boldsymbol{l}_2 & \boldsymbol{l}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}$$

$$=\boldsymbol{l}_1\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2}-\frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right)+\boldsymbol{l}_2\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3}-\frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right)+\boldsymbol{l}_3\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)$$

$$\boldsymbol{a}\times\nabla=(\boldsymbol{l}_1a_1+\boldsymbol{l}_2a_2+\boldsymbol{l}_3a_3)\times\left(\boldsymbol{l}_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\boldsymbol{l}_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\boldsymbol{l}_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{l}_1 & \boldsymbol{l}_2 & \boldsymbol{l}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\end{vmatrix}$$

$$=\boldsymbol{l}_1\left(a_2\frac{\partial}{\partial x_3}-a_3\frac{\partial}{\partial x_2}\right)+\boldsymbol{l}_2\left(a_3\frac{\partial}{\partial x_1}-a_1\frac{\partial}{\partial x_3}\right)+\boldsymbol{l}_3\left(a_1\frac{\partial}{\partial x_2}-a_2\frac{\partial}{\partial x_1}\right)$$

注意：非特别申明时，本书中总假定所涉函数具有所需的连续的各阶偏导数.

例 1.1 在直角坐标系 $Oxyz$ 中，设 $M(x,y,z)$ 为动点，$M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为定点，又

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{l}_1(x-x_0)+\boldsymbol{l}_2(y-y_0)+\boldsymbol{l}_3(z-z_0) \tag{1.2}$$

$$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} \tag{1.3}$$

分别计算 ∇r，$\nabla\cdot\boldsymbol{r}$，$\nabla\times\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{r}\cdot\nabla$.

解 按定义，有

$$\nabla r=\left(\boldsymbol{l}_1\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{l}_2\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{l}_3\frac{\partial}{\partial z}\right)r=\boldsymbol{l}_1\frac{\partial r}{\partial x}+\boldsymbol{l}_2\frac{\partial r}{\partial y}+\boldsymbol{l}_3\frac{\partial r}{\partial z}$$

$$=\boldsymbol{l}_1\frac{x-x_0}{r}+\boldsymbol{l}_2\frac{y-y_0}{r}+\boldsymbol{l}_3\frac{z-z_0}{r}=\frac{1}{r}\boldsymbol{r}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{r}=\left(\boldsymbol{l}_1\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{l}_2\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{l}_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot[\boldsymbol{l}_1(x-x_0)+\boldsymbol{l}_2(y-y_0)+\boldsymbol{l}_3(z-z_0)]$$

$$=\frac{\partial(x-x_0)}{\partial x}+\frac{\partial(y-y_0)}{\partial y}+\frac{\partial(z-z_0)}{\partial z}=1+1+1=3$$

$$\nabla\times\boldsymbol{r}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{l}_1 & \boldsymbol{l}_2 & \boldsymbol{l}_3\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\end{vmatrix}=\boldsymbol{l}_1\left[\frac{\partial(z-z_0)}{\partial y}-\frac{\partial(y-y_0)}{\partial z}\right]+$$

$$\boldsymbol{l}_2\left[\frac{\partial(x-x_0)}{\partial z}-\frac{\partial(z-z_0)}{\partial x}\right]+\boldsymbol{l}_3\left[\frac{\partial(y-y_0)}{\partial x}-\frac{\partial(x-x_0)}{\partial y}\right]=\mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{r}\cdot\nabla=[\boldsymbol{l}_1(x-x_0)+\boldsymbol{l}_2(y-y_0)+\boldsymbol{l}_3(z-z_0)]\cdot\left(\boldsymbol{l}_1\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{l}_2\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{l}_3\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$=(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}+(z-z_0)\frac{\partial}{\partial z}$$

例 1.2 设矢量函数 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(u)$，其中 $u=u(x,y,z)$ 是纯量函数，求证：

$$\nabla\times\boldsymbol{a}=\nabla u\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}u}$$

证 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{l}_1a_1+\boldsymbol{l}_2a_2+\boldsymbol{l}_3a_3$，则

$$\nabla\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{l}_1\left(\frac{\partial a_3}{\partial y}-\frac{\partial a_2}{\partial z}\right)+\boldsymbol{l}_2\left(\frac{\partial a_1}{\partial z}-\frac{\partial a_3}{\partial x}\right)+\boldsymbol{l}_3\left(\frac{\partial a_2}{\partial x}-\frac{\partial a_1}{\partial y}\right)$$

$$=\boldsymbol{l}_1\left(\frac{\mathrm{d}a_3}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\boldsymbol{l}_2\left(\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\mathrm{d}a_3}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+$$

$$\boldsymbol{l}_3\left(\frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{l}_1 & \boldsymbol{l}_2 & \boldsymbol{l}_3\\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\\ \frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}u} & \frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}u} & \frac{\mathrm{d}a_3}{\mathrm{d}u}\end{vmatrix}$$

$$=\left(\boldsymbol{l}_1\frac{\partial u}{\partial x}+\boldsymbol{l}_2\frac{\partial u}{\partial y}+\boldsymbol{l}_3\frac{\partial u}{\partial z}\right)\times\left(\boldsymbol{l}_1\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}u}+\boldsymbol{l}_2\frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}u}+\boldsymbol{l}_3\frac{\mathrm{d}a_3}{\mathrm{d}u}\right)$$

$$=\nabla u\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}u}$$

三、梯度与方向导数

纯量函数 $u=u(x_1,x_2,x_3)$ 的**梯度**记作 $\operatorname{grad} u$，规定为

$$\operatorname{grad} u=\nabla u \tag{1.4}$$

u 沿方向 $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{l}_1\cos\alpha_1+\boldsymbol{l}_2\cos\alpha_2+\boldsymbol{l}_3\cos\alpha_3$ 的方向导数记作 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}$，规定为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}=\nabla u\cdot\boldsymbol{l}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\cos\alpha_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}\cos\alpha_2+\frac{\partial u}{\partial x_3}\cos\alpha_3 \tag{1.5}$$

四、散度与旋度

设矢量函数 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{l}_1a_1+\boldsymbol{l}_2a_2+\boldsymbol{l}_3a_3$. 其**散度**记作 $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$，规定为

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\nabla\cdot\boldsymbol{a} \tag{1.6}$$

其**旋度**记作 $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$，规定为

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\nabla\times\boldsymbol{a} \tag{1.7}$$

利用它们，高斯（Gauss）公式可简写作

$$\oint\!\!\!\!\iint_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s=\iiint_V\nabla\cdot\boldsymbol{a}\mathrm{d}v \tag{1.8}$$

其中：S 是空间区域 V 的边界曲面；$\boldsymbol{n}$ 是 S 的外法线方向矢量.

斯托克斯（Stokes）公式可简写作

$$\oint_L\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{t}\mathrm{d}l=\iint_S\nabla\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s \tag{1.9}$$

其中：S 是有界曲面；L 是 S 的边界曲线；$\boldsymbol{t}$ 是 L 的正向单位矢量；$\boldsymbol{n}$ 是 S 的外法线方向矢量.

五、Laplace 算子

为方便计，常将相同两个矢量（或矢量算子）$\boldsymbol{a}$ 的数量积记作 $\boldsymbol{a}^2$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2$$

拉普拉斯（Laplace）算子记作 ∇^2 或 Δ，规定为

$$\Delta=\nabla^2=\nabla\cdot\nabla \tag{1.10}$$

Laplace 算子是纯量算子，在直角坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 下，由式（1.1）有

$$\Delta=\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \tag{1.11}$$

对纯量函数 u，有

$$\Delta u=\nabla^2 u=\nabla\cdot(\nabla u) \tag{1.12}$$

对矢量函数 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{l}_1a_1+\boldsymbol{l}_2a_2+\boldsymbol{l}_3a_3$，有

$$\Delta\boldsymbol{a}=\nabla^2\boldsymbol{a}=\boldsymbol{l}_1\nabla^2a_1+\boldsymbol{l}_2\nabla^2a_2+\boldsymbol{l}_3\nabla^2a_3 \tag{1.13}$$

在一维与二维直角坐标系中，Laplace 算子依次为

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2},\qquad \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

未知函数的方程 $\nabla^2u=0$ 称作 Laplace 方程.

在某区域内满足 Laplace 方程的函数 u 称作该区域内的**调和函数**，调和函数是一类重要函数.

例 1.3 求证：$u=\dfrac{1}{r}$ 是调和函数，其中 r 的定义见例 1.1.

证 在直角坐标系 $Oxyz$ 中，按定义计算，有

$$\nabla^2 u=\nabla^2 \frac{1}{r}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{r}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{1}{r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{1}{r}$$

$$=\frac{3(x-x_0)^2}{r^4}-\frac{1}{r^3}+\frac{3(y-y_0)^2}{r^4}-\frac{1}{r^3}+\frac{3(z-z_0)^2}{r^4}-\frac{1}{r^3}=0$$

所以 u 是调和函数.

六、三度的计算公式

梯度、散度与旋度统称作三度，它们具有下列运算性质：

(1) $\nabla c=0$ (c为常数). (2) $\nabla(cu)=c\nabla u$ (c 为常数).

(3) $\nabla(u+v)=\nabla u+\nabla v$. (4) $\nabla(uv)=u\nabla v+v\nabla u$.

(5) $\nabla\frac{u}{v}=\frac{v\nabla u-u\nabla v}{v^2}$. (6) $\nabla f(u)=f'(u)\nabla u$.

(7) $\nabla\cdot(u\boldsymbol{l})=\nabla u\cdot\boldsymbol{l}$ ($\boldsymbol{l}$ 为常矢).

(8) $\nabla\cdot(c\boldsymbol{a})=c\nabla\cdot\boldsymbol{a}$ (c 为常数).

(9) $\nabla\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\nabla\cdot\boldsymbol{a}+\nabla\cdot\boldsymbol{b}$.

(10) $\nabla\cdot\boldsymbol{l}=0$ ($\boldsymbol{l}$ 为常矢).

(11) $\nabla\cdot(u\boldsymbol{a})=u(\nabla\cdot\boldsymbol{a})+(\nabla u)\cdot\boldsymbol{a}$.

(12) $\nabla\times\boldsymbol{l}=\boldsymbol{0}$ ($\boldsymbol{l}$ 为常矢).

(13) $\nabla\times(c\boldsymbol{a})=c\nabla\times\boldsymbol{a}$.

(14) $\nabla\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\nabla\times\boldsymbol{a}+\nabla\times\boldsymbol{b}$.

(15) $\nabla\times(u\boldsymbol{a})=u(\nabla\times\boldsymbol{a})+(\nabla u)\times\boldsymbol{a}$.

(16) $\nabla\times(\nabla u)=\boldsymbol{0}$.

(17) $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})=0$.

(18) $\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{b})$.

(19) $\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}(\nabla\cdot\boldsymbol{a})$.

(20) $\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b})$.

(21) $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a})-\nabla^2\boldsymbol{a}$.

这些公式均可按算子 ∇ 的定义及数量积与矢量积的相应运算公式予以证明，这里不一一证明.

例 1.4 求证：公式 $\nabla(uv)=u\nabla v+v\nabla u$.

证 我们仅在三维情形作证明，有

$$\nabla(uv)=\sum_{k=1}^{3}l_k\frac{\partial(uv)}{\partial x_k}=\sum_{k=1}^{3}l_k u\frac{\partial v}{\partial x_k}+\sum_{k=1}^{3}l_k v\frac{\partial u}{\partial x_k}=u\nabla v+v\nabla u$$

第二节 场与场方程

本节介绍场的概念、性质以及一些场方程.

一、标量场与矢量场

作用于一定范围的量叫做**场**.

如果对于空间区域 V 内任意点 M，均有唯一纯量函数值 $u=u(M)$ 与之对应，则称 u 是 V 内的**纯量场**或**标量场**. 例如，温度场、密度场均为纯量场.

梯度与方向导数是刻画纯量场的重要物理量.

如果对于空间区域 V 内任意点 M，均有唯一矢量函数值 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(M)$与之对应，则称 $\boldsymbol{a}$ 是 V 内的**矢量场**. 例如，力场、磁场均为矢量场.

旋度与散度是刻画矢量场的重要物理量.

二、无旋场及其位势

满足方程 $\nabla\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 的矢量场 $\boldsymbol{a}$ 称为**无旋场**.