

弹性细杆的非线性力学

—— DNA力学模型的理论基础

Nonlinear Mechanics of Thin Elastic Rod

— Theoretical Basis of Mechanical Model of DNA

刘延柱 著

Liu Yanzhu



清华大学出版社



Springer

弹性细杆的非线性力学

—— DNA力学模型的理论基础

Nonlinear Mechanics of Thin Elastic Rod

— Theoretical Basis of Mechanical Model of DNA

刘延柱 著

Liu Yanzhu



清华大学出版社
北京



Springer

内 容 简 介

本书的讨论对象为极端细长具有超大变形的弹性杆。细长弹性杆作为电缆、绳索、钻杆、纤维的力学模型,有着广泛的工程背景。近年来在分子生物学领域内将弹性细杆作为 DNA 和其他生物大分子链的宏观力学模型,使这一经典力学问题重新引起注意。力学与分子生物学的结合形成一个交叉的新学科分支,即应用传统的力学研究与分子生物学实验研究相结合的方法,讨论 DNA 等生物大分子链的几何形态和稳定性问题。

本书系统地叙述超大变形弹性细杆的非线性力学。作为一本力学著作,本书不涉及生物学范畴的内容,但注意力学概念与分子生物学之间的联系。全书共分 7 章,内容包括曲线和曲杆的微分几何和拓扑学基础,平衡方程的建立和特殊情况下的解析积分,挠性线的计算,稳定性分析,动力学问题,以及数值计算问题等。附录中给出与正文有关的数学和力学基础知识。

本书可作为力学学科或分子生物学学科的研究生教材或教学参考书,也可供相关学科的研究人员参考。

版权所有,翻印必究。举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

图书在版编目(CIP)数据

弹性细杆的非线性力学: DNA 力学模型的理论基础/刘延柱著. —北京:清华大学出版社, 2006.3
ISBN 7-302-11986-4

I. 弹… II. 刘… III. 弹性力学:非线性力学 IV. O343

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 119085 号

出 版 者: 清华大学出版社

<http://www.tup.com.cn>

社 总 机: 010-62770175

地 址: 北京清华大学学研大厦

邮 编: 100084

客户服务: 010-62776969

责任编辑: 陈朝晖

印 刷 者: 清华大学印刷厂

装 订 者: 三河市春园印刷有限公司

发 行 者: 新华书店总店北京发行所

开 本: 185×260 印张: 14.75 字数: 349 千字

版 次: 2006 年 3 月第 1 版 2006 年 3 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 7-302-11986-4/O·503

印 数: 1~2000

定 价: 78.00 元

序 言

P R E F A C E

弹性杆在外力作用下的平衡问题是一个古老的经典力学课题,其历史可追溯到 1730 年 Daniel Bernoulli 和 Euler 关于弹性杆变形的研究工作。1859 年 Kirchhoff 根据弹性杆的平衡微分方程与经典力学中刚体定点转动微分方程之间的相似性,提出了弹性杆平衡的动力学比拟理论,奠定了弹性杆静力学的理论基础。本书作为研究对象的弹性杆以其极端细长性和超大变形及平衡微分方程的强非线性,而不同于传统弹性力学的研究对象。在静力学中注入动力学的概念和方法也不同于传统弹性力学的研究方法。弹性杆作为电缆、绳索、钻杆、纤维的力学模型,有着广泛的工程背景。近年来由于在分子生物学领域内利用弹性杆作为 DNA 和其他生物大分子链的宏观模型研究工作的兴起,使这一经典力学问题重新引起注意。自 20 世纪 70 年代以来,在物理和化学物理、物理化学、生物化学和高分子化学,以及分子生物学等学科的刊物上发表了与弹性杆非线性力学有关的大量文献,逐渐形成了力学与分子生物学交叉的一个新学科分支,即应用传统的力学研究与分子生物学实验研究相结合的方法,讨论 DNA、RNA 以及细菌纤维等各种生物大分子链的几何形态和稳定性问题。

弹性杆非线性力学的经典理论在 Love 的弹性力学著作以及 Frisch-Fay, Antman 和 Ilyukhin 等人的专著中曾作过系统的论述,而国内至今尚无完整叙述弹性杆非线性力学的著作。本书的编写目的是试图将弹性杆非线性力学的经典理论与近年来以分子生物学为背景的弹性杆平衡和稳定性问题的新发展纳入统一的理论体系。除叙述基于 Kirchhoff 方程解析积分的经典内容以外,还讨论与稳定性问题、动力学问题和数值计算问题等有关的现代研究成果,包括作者在平衡稳定性方面的研究工作。为阅读正文所必须的数学和力学基础知识在附录中列出。

作者希望这本书能为力学学科或分子生物学学科的研究人员提供较系统的基础理论知识,从而为今后开展交叉学科的研究工作创造条件。也希望这本书有助于力学专业的研究生了解力学在更广阔领域中应用的可能性。

本书的编写工作得到各方面的帮助和鼓励。关于弹性杆非线性力学的研究工作得到国家自然科学基金项目“超细长弹性杆的非线性力学研究”(编号 10472067)的资助。本书的出版得到母校——清华大学,以及清华大学出版社-施普林格出版社合作编辑室的出

版支持。上海交通大学也为本书提供了资助。薛纭教授协助书稿的校对工作。作者谨表示衷心感谢。书中的错误和不当之处请读者不吝赐正。

刘延柱

2005 年 3 月

于上海交通大学

主要符号表

LIST OF SYMBOLS

A 杆绕 x 轴的抗弯刚度
 A_j 第 $\bar{j}$ 单元对 x 轴的抗弯刚度
 A_{pq} $\underline{e}^{(p)}$ 相对 $\underline{e}^{(q)}$ 的方向余弦矩阵
 a P_n 相对 P 的矢径
 $a^{(j)}$ a 对第 j 坐标系的坐标列阵
 a 圆截面杆的半径
 a $a = h + m^2 - l^2$
 B 中心线的副法线矢量
 B 杆绕 y 轴的抗弯刚度
 B_j 第 $\bar{j}$ 单元对 y 轴的抗弯刚度
 b 杆的轴向位移
 C 中心线
 C 杆的抗扭刚度
 C_j 第 $\bar{j}$ 单元对 z 轴的抗扭刚度
 C_1 $C_1 = C(\omega_{30} - \omega_3^0)/\omega_{30}$
 $c_{\pm}, c_3$ 介质的阻力系数
 c_0 介质的阻尼力矩系数
 D 杆的刚度矩阵
 D 复刚度, $D = D_1 + iD_2$
 D_j 有限元法的第 $\bar{j}$ 单元
 E 单位阵
 E 杆的杨氏模量
 E_j 第 $\bar{j}$ 单元的杨氏模量
 $E(\phi, k)$ 第二类椭圆积分
 $\tilde{E}(k)$ 第二类完全椭圆积分
 E_e 杆的弹性应变能
 E_p 杆的外力势能
 E_t 杆的静电引力势能
 E 杆的总势能
 E_c 与中心线形状相关的势能
 E_t 杆的扭转应变能
 $\tilde{E}$ 受约束杆的总势能

e_n, e_b, e_t Frenet 坐标系 ($P-NBT$) 的基矢量
 $e_i (i = 1, 2, 3)$ ($P-xyz$) 的基矢量
 e_ξ, e_η, e_ζ ($O-\xi\eta\zeta$) 的基矢量
 e_ρ, e_ψ 柱坐标的径向和周向基矢量
 F 截面作用力主矢
 F_0 截面作用力等效力螺旋的主矢
 F_{0k} 第 k 截面的集中力
 $F(\phi, k)$ 第一类椭圆积分
 F 复主矢, $F = F_1 + iF_2$
 $F_j (j = 1, 2, 3)$ F 对 ($P-xyz$) 的投影
 $F_{j0} (j = 1, 2, 3)$ F_j 的常值特解
 $F_{0,cr}$ 压杆的欧拉载荷
 f 单位长度接触力
 f 复分布力, $f = f_1 + if_2$
 $f_j (j = 1, 2)$ f 沿 x, y 轴的投影
 f_n, f_b f 沿法线轴和副法线轴的投影
 G 杆的剪切模量
 G_j 第 $\bar{j}$ 单元的剪切模量
 H 哈密顿函数
 h $h = (2H/A) - \lambda\omega_{30}^2$
 I_x, I_y 截面对 x 轴和 y 轴的惯性矩
 I_e 截面的极惯性矩
 $I_{x,j}, I_{y,j}$ 第 $\bar{j}$ 单元对 x 轴和 y 轴的惯性矩
 $I_{z,j}$ 第 $\bar{j}$ 单元对 z 轴的极惯性矩
 J 单位长度杆的惯量张量
 $J_i (i = 1, 2, 3)$ 单位长度杆的主惯量矩
 J Schrödinger 方程的初积分常数
 $K(k)$ 第一类完全椭圆积分
 k 第一类椭圆积分的模
 k 挠性线相对弧坐标的角频率
 $\bar{k}$ 无量纲化的角频率 k
 L 弯扭度与欧拉角导数的变换矩阵

- L 杆的长度
 L_{12} 曲线 C_1 与 C_2 的连接数
 L_k 曲杆的自连接数
 L_j 有限元法第 j 单元的长度
 l 积分常数 $l = M_0/A$
 M 截面作用力主矩
 M_0 截面作用力等效力螺旋的主矩
 M_{0k} 第 k 截面的集中力矩
 M 复弯矩, $M = M_1 + iM_2$
 $M_j (j = 1, 2, 3)$ M 对 $(P-xyz)$ 的投影
 $\tilde{M}$ Melnikov 函数
 m 单位长度分布力偶
 m 积分常数 $m = \lambda(\omega_{30} - \omega_3^0)$
 N 中心线的法线矢量
 N 螺旋线的圈数
 n 截面边界线的外法线基矢量
 n 弯曲振动模态的阶数
 n 封闭挠性线的分支数
 n_1 $n_1 = (\gamma_1 - \gamma_2)/(\gamma_1 - 1)$
 n_2 $n_2 = (\gamma_1 - \gamma_2)/(\gamma_1 + 1)$
 n_3 $n_3 = 4\Omega^2 k^2 / (h - p\gamma_1)$
 n_1 $n_1 = p(\gamma_2 - \gamma_1)/(a - p\gamma_1)$
 O 固定参考点
 P 中心线上任意点
 P' P 点的邻近点
 P_0 杆的起始端
 P_L 杆的终止端
 P_a 杆截面边缘上任意点
 $P_i (i = 1, 2, 3)$ 准动量
 $P_j (j = 0, 1, \dots, n)$ 有限元法的节点
 p 有限转动轴的基矢量
 p $p = 2F/A$
 $p_i (i = 1, 2, 3)$ 广义动量
 Q 截面上任意点
 $Q_i (i = 1, 2, 3, 4)$ $Q_i = dq_i/ds$
 $q_i (i = 1, 2, 3)$ 广义坐标(欧拉角)
 $q_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 广义坐标(欧拉参数)
 R 连接杆两端的矢径
 R 螺旋线半径
 R 杆的最大挠度
 $R_j (j = 1, 2, 3)$ R 对 $(P_0-\xi\eta\zeta)$ 的投影
 r P 点相对 O 点的矢径
 r_{12} P_1 点至 P_2 点的矢径
 r_a P_a 相对 P_0 的矢径
 S 横截面面积
 S_i 第 i 奇点
 S_j 第 j 单元的截面积
 s 弧坐标
 s_0 起始点的弧坐标
 $\bar{s}$ 无量纲化的弧坐标
 T 中心线的切线矢量
 T 尺度缩小的时间变量 $T = \bar{\epsilon}t$
 T_w 曲杆的扭转数
 T_{w0} 曲杆的原始扭转数
 $\bar{T}$ $\bar{T} = \bar{\epsilon}\bar{t}$
 t 时间变量
 $\bar{t}$ 无量纲化的时间变量
 u P 点的位移
 u $u = \sin(\theta/2)$
 V Lyapunov 函数
 $\tilde{V}$ Lyapunov 函数
 v P 点的速度
 $v_i (i = 1, 2, 3)$ v 对 $(P-xyz)$ 的投影
 $v_{Fi} (i = 1, 2, 3)$ v 对 $(P-NBT)$ 的投影
 $v(s)$ $v^2 = (\gamma - \gamma_1)/(\gamma_1 - \gamma_2)$
 W 外力功
 W_r 曲杆的缠绕数
 w 时域内的特征值
 X, Y, Z 柱坐标轴
 x, y, z 截面主轴
 x_i 有限元法第 i 个变量
 $x_{i,j}$ 变量 x_i 在节点 P_j 处的值
 $\bar{x}_{i,j}$ $\bar{x}_{i,j} = (x_{i,j} + x_{i,j-1})/2$
 α 螺旋线倾角
 β $\beta = F_0 R/M_0$
 α, β, γ ζ 轴相对 $(P-xyz)$ 的方向余弦
 Γ 势能密度函数
 $\hat{\Gamma}$ 受约束杆的势能密度函数
 Γ 截面边界线
 γ $\gamma = \cos\theta$
 γ_0 γ 的起始值
 $\gamma_i (i = 1, 2, 3)$ 方程 $f(\gamma) = 0$ 的根
 γ_{ij} 剪应变分量
 $\gamma_{km}^i (i, k, m = 1, 2, 3)$ Boltzman 三标记号

ΔF	截面作用力主矢的增量	$\tilde{A}$	四元数的投影方阵
ΔL	螺旋线的周长	$\Delta_j (j = 1, 2)$	拉格朗日乘子
ΔL_k	$\Delta L_k = L_k - T_{w0}$	λ	$\lambda = C/A$
ΔM	截面作用力主矩的增量	λ	线性系统的特征值
Δr	矢径 r 的增量	$\lambda_k (k = 0, 1, 2, 3)$	欧拉参数
Δs	弧坐标增量	μ	$\mu = BF_0/M_0^2$
Δt	时间增量	ν	杆的泊松比
ΔT_w	$\Delta T_w = T_w - T_{w0}$	ν	扭转振动的角频率
$\Delta \theta$	欧拉角 θ 的增量	ν	$\nu = (B/C) - 1$
$\Delta \omega_s$	杆的过扭率	ν_1	$\nu_1 = \nu + \delta(1 + \nu)$
$\Delta \phi$	截面的无限小角位移	ξ, η, ζ	定坐标轴
$\Delta \phi_F$	Frenet 坐标系的无限小角位移	ξ	复曲率, $\xi = \omega_1 + i\omega_2$
δ	$\delta = C\omega_s^0/M_0$	ξ	0 与 1 之间的无量纲变量
δ_1	$\delta_1 = \sqrt{B/\ F_0\ }\omega_s^0$	$\xi_i (i = 1, 2, 3)$	扰动量
δ_n	振动阻尼系数	$\Pi(u, n, k)$	第三类椭圆积分
δE	总势能的变分	$\tilde{\Pi}(n, k)$	第三类完全椭圆积分
δE_e	弹性应变能的变分	$\pi_i (i = 1, 2, 3)$	准坐标
δE_p	外力势能的变分	ρ	Q 相对 P 的矢径
δR	矢径 R 的变分	ρ	曲率半径
δT_w	扭转数 T_w 的变分	ρ	柱坐标
δW	截面作用力的虚功	ρ	杆的密度
δW_r	缠绕数 W_r 的变分	ρ_0	ρ 的起始值
ε	$\varepsilon = B\kappa^0/M_0$	σ	正应力
ε	杆的轴向应变	σ_i	正应力分量
ε_j	第 j 单元的轴向应变	σ	$\sigma = (B/A) - 1$
ε_i	正应变分量	τ	剪应力
ε	摄动参数	τ_{ij}	剪应力分量
ζ	$\zeta = \omega_2 + i\omega_3$	τ	中心线的挠率
η	$\eta = \beta + i\gamma$	τ_0	挠率的起始值
$\eta_i (i = 1, 2, 3)$	扰动量	τ^0	挠率的原始值
θ	欧拉角中的章动角	Φ	$\Phi = (-E_s, E_s)$
θ_0	θ 的起始值	ϕ	角位移矢量
θ_s	θ 的奇点	ϕ	有限转动角位移
θ_1	$\theta_1 = \theta \cos \varphi$	ϕ	椭圆函数的幅角
κ	中心线的曲率	φ	欧拉角中的自旋角
κ_0	κ 的起始值	φ_0	φ 的起始值
κ_p	中心线平面投影的曲率	φ_s	φ 的奇点
κ^0	κ 的原始值	φ_1	$\varphi_1 = \theta \sin \varphi$
κ_s	κ 的奇异值	χ	截面的相对扭角
Λ	有限转动四元数	χ^0	χ 的原始值
Λ^*	Λ 的共轭四元数	Ψ	柱坐标的极角

Ψ_0 Ψ 的起始值

Ψ $\Psi = ((1 - \xi)E_s, \xi E_s)$

ψ 欧拉角中的进动角

ψ_0 ψ 的起始值

Ω 截面的角速度矢量

Ω_F Frenet 坐标系的角速度矢量

Ω_j $\Omega_j = (\omega_{1,j} \quad \omega_{2,j} \quad \omega_{3,j} \quad \epsilon_j)^T$

$\Omega_{Fi} (i = 1, 2, 3)$ Ω_F 对 $(P-NBT)$ 的投影

Ω $\Omega^2 = (p/4)(\gamma_3 - \gamma_1)$

ω 弯扭度

$\omega^{(2)}$ 动坐标系的角位移变化率

ω_F Darboux 矢量

$\omega_j (j = 1, 2, 3)$ ω 对 $(P-xyz)$ 的投影

ω_3 杆的扭率

$\omega_j^0 (j = 1, 2, 3)$ ω_j 的原始值

ω_3^0 杆的原始扭率

绪 论

INTRODUCTION

早在 1730 年,伯努利(D. Bernoulli)和欧拉(L. Euler)就已开始研究细长弹性杆在外力和力矩作用下的变形问题。1859 年 Kirchhoff^①(见图 0.1)对不考虑轴向变形的圆截面杆,在刚性截面假定和无体积力作用的条件下,根据弹性杆的平衡微分方程与刚体定点转动微分方程之间的相似性,提出了弹性细杆平衡的动力学比拟理论^[1,4]。1862 年 Clebsch 在其弹性力学著作中论述了这一理论^[2,3]。根据 Kirchhoff 理论,将动力学中的时间变量 t 替换为一维空间变量即弧坐标 s ,经典刚体动力学几种可积情形的椭圆函数解即可移植到弹性杆静力学。其中拉格朗日(J. L. Lagrange)情形和欧拉情形刚体定点转动分别与一般受力状态的圆截面杆和受力矩单独作用的非圆截面杆的平衡相对应。判断拉格朗日情形重刚体绕垂直轴永久转动稳定性的 Maievskii (1865)条件也转换为判断受轴向拉扭的圆截面直杆平衡稳定性的 Greenhill (1883)公式^[5]。刚体动力学的经典结论与弹性杆几何形态之间的对应关系在 Nizzete, Goriely (1999)的论文中作了详尽的对照^[173]。作为弹性杆静力学的理论基础,Kirchhoff 理论在 Love (1927)的弹性力学著作中有详细的论述^[7],也见于 Timoshenko (1953)的材料力学史^[8]。Timoshenko (1957, 1961)^[9,10],Eriksen, Truesdell (1958)^[11], Reissner (1973)^[23], Maddocks (1984)^[54], Simo, Marsden, Krishnaparasad (1988)^[75]等对弹性杆非线性力学的发展做出了贡献。Frisch-Fay (1962)^[14] Antman (1972, 1995)^[22,118]和 Ilyukhin (1979)^[40]的专著系统地总结了弹性杆非线性力学的经典理论。国内关于 Kirchhoff 弹性杆理论的论述和报道不多,可参阅武际可、苏先樾和陈至达的著作^[253~255]。

弹性细杆的平衡和稳定性问题有着广泛的实际背景,电缆、绳索、钻杆、纤维乃至自然界中攀缘植物的细茎都可将弹性细杆作为其力学模型。以海底电缆等工业技术为背景,Zajac (1962)^[15], Cohen (1966)^[16], James (1981)^[42], Knap (1979, 1988, 1994)^[37,73,113], Coyne (1990)^[82], Miyazaki (1997)^[154]等对圆截面杆的平衡稳定性问题作了深入的研究,

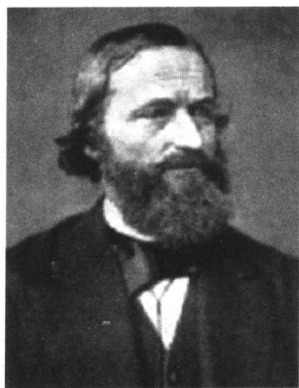


图 0.1 G. R. Kirchhoff
(1824—1887)

^① Gustav Robert Kirchhoff (1824—1887)出生于德国 Königsberg,1848 年于 Königsberg 大学获博士学位,先后于 Breslau, Heidelberg,柏林等大学任教授。弹性杆的动力学比拟理论发表于 1859 年。

van der Heijden, Champney, Thompson (1998, 1999)^[160, 161, 199]等研究了非圆截面杆的屈曲问题。以钻杆为背景, Seemann (1996)^[142], van der Heijden (2001, 2002)^[177, 204, 212]等讨论了受平面和圆柱面约束的弹性杆平衡和稳定性。Goriely, Tabor (1998)^[158]解释了攀缘植物细茎螺旋形态的力学原理。由于数学微分方程的相似性, 弹性杆非线性力学的研究结果也与更广泛的领域发生联系, 如卷浪的传播、涡管的运动、太阳黑子的形成等^[85]。而近代最重要的促使弹性细杆力学发展的新领域是分子生物学。

在分子生物学领域中, 自 20 世纪中期 Watson 和 Crick 提出了 DNA 分子的双螺旋三维结构模型以来, 关于 DNA 的基础理论研究不断取得突破, 促进了以基因工程为代表的生物技术的迅速发展。DNA 是由两条螺旋形戊糖-磷酸骨架和联系骨架的碱基对组成的双螺旋结构的长链分子。虽然对于分子内部结构的研究属于量子力学范畴, 但其宏观几何形态及宏观运动的研究可借助于经典力学方法。用具有原始扭率的圆截面弹性细杆作为 DNA 的宏观力学模型的理论研究得到了实验的肯定(见图 0.2)。Hagerman (1988), Smith (1992), Bustamante (2003)^[74, 97, 224]等借助分子生物学的实验手段和统计物理方法测出 DNA 弹性杆模型的杨氏模量、泊松比, 以及抗弯和抗扭刚度等力学计算所必需的物理常数。在这种宏观力学模型的基础上研究 DNA 的平衡和稳定性规律, 经典力学的基本原理和方法得到了充分应用。人体细胞的最大染色体所含 DNA 分子的螺旋直径约为 2nm, 而长度可达 7cm, 杆长为半径的 3.5×10^7 倍。此细长分子链必须反复缠绕、卷曲和折叠方能被容纳在半径仅 $10\mu\text{m}$ 的狭小的细胞核空间内。因此 DNA 的弹性杆模型以其极端细长性和超大变形而完全不同于传统弹性力学的研究对象。自 20 世纪 70 年代以来, 关于 DNA 力学模型的研究逐渐形成一支力学与分子生物学交叉的新学科分支, 即应用传统的力学分析与分子生物学的实验研究相结合的方法, 讨论 DNA、RNA 以及细菌纤维等各种生物大分子链的几何形态和稳定性问题。

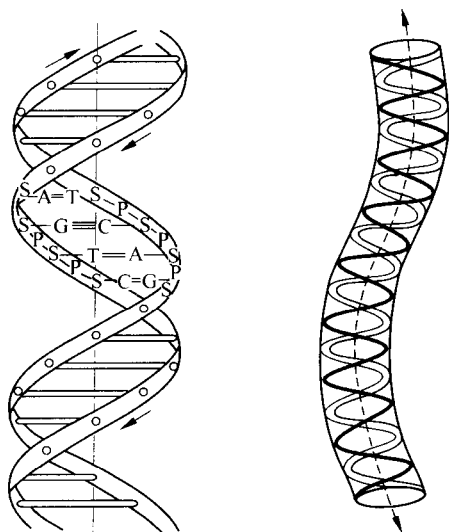


图 0.2 DNA 双螺旋结构与弹性杆

关于 DNA 弹性杆模型的研究工作已经取得不少成果,涌现出大量文献资料。White (1969)^[20], Fuller(1971)^[21] 最早研究了 DNA 双螺旋结构的拓扑性质,引入了缠绕数作为三维空间曲线的几何不变量。Crick(1976)^[26] 讨论了描述 DNA 双螺旋结构的连接数、扭转数、缠绕数及其相互关系。Benham (1977,1979)^[28,33] 和 Le Bret (1978,1979)^[30,34] 等在 Kirchhoff 弹性杆理论上建立了 DNA 弹性杆模型。此细长弹性杆的应变和位移仍满足小变形条件,也满足线弹性本构关系,但由于杆的极端细长性,局部的小应变沿弧长的积累可使变形后的挠性线远离变形前的松弛状态,表现出超大变形的整体效果。Benham (1983)^[48] 和 Le Bret (1984)^[49] 还讨论了封闭曲杆连接数的不变性。此外,还应提到 Tanaka, Takahashi (1985)^[58], Wadati, Tsuru, (1986)^[65~68], Jülicher (1994)^[110], Starostin (1996)^[135] 等人的工作。Kirchhoff 方程并非表达弹性杆平衡的唯一方式,Shi 和 Hearst 等(1994,1995)^[108,122] 以弹性杆的曲率和挠率为变量,建立了 Schrödinger 方程形式的另一种数学模型。Coleman, Westcott, Tobias, Swigon (1995, 2000)^[125,146,187,229], Starostin (2000,2004)^[201,217,231], van der Heijden(2003)^[219], Schubert(2003)^[221] 等研究了杆间自相接触情形。Kehrbaum, Kai Hu 等(1997,1999)^[153,180] 给出用欧拉参数代替欧拉角的数学表达。对于最普遍的情况,即同时考虑杆的非圆截面、轴向变形、体积力和杆间接触力等复杂因素时,则必须应用数值方法。如 Klenin (1991)^[88], Yang, Zhang, Westcott, Tobias, Olson (1993—1997)^[102,107,121,146], Schlick, Beard (1992,2000)^[93,194] 等人的工作。国内以分子生物学为背景的研究可参阅 Zhou Haijun, Zhang Yang, Ou-Yang Zhongcan(1999,2000)等发表的论文^[175,188]。1996 年 Mesirov 等编辑出版的关于分子生物学中数学方法的论文集中收集了与 DNA 弹性杆模型有关的综述文章^[134]。

Kirchhoff 的动力学比拟理论在将动力学的概念和方法注入弹性力学的同时,也向分析力学、运动稳定性等传统学科提出新问题。根据弹性力学最小势能原理分析弹性杆的平衡状态,可导出与分析力学形式相同的哈密顿(W. R. Hamilton)原理,仅时间积分变量 t 被弧坐标 s 代替,哈密顿作用量被弹性杆的总势能代替。由弧坐标哈密顿原理出发,可以导出弧坐标拉格朗日方程、哈密顿正则方程或 Boltzman-Hamel 方程。Kirchhoff 方程及其初积分可用任何一种分析力学方法导出。尽管利用分析力学方法讨论弹性杆的文章已见诸文献,如 Westcott, Tobias, Olson (1995)^[121], Langer, Singer (1996)^[140], Coronado (2000)^[198] 的工作,但目前尚未形成严格的弧坐标分析力学体系。经典分析力学的一些基本概念,如完整约束与非完整约束的含义在弧坐标分析力学中应重新加以阐释。杆的端部约束条件常以积分形式出现。定常约束,即同一约束条件施加于全杆的情形在弹性杆中并不多见,而约束条件随弧坐标改变的非定常约束在弹性杆中则普遍存在,因为作为 DNA 模型的弹性杆往往在不同区域内受到不同的几何约束。例如当考虑 DNA 在不同弧段自相接触或与蛋白质分子接触的可能性时,约束仅存在于杆的局部范围,即弧坐标的有限区间以内。产生约束的位置则有待于在计算过程中确定。在分析力学中,时间变量 t 只能朝正方向单调增大,约束的出现只影响随后的运动。而弧坐标 s 的变化具有可逆性,在 $s=s_0$ 处出现的约束不仅影响 $s>s_0$ 的状态,而且也影响 $s<s_0$ 的状态。这种特殊的“分段约束”问题在经典分析力学中尚无先例,必须建立新概念,研究新问题。

弹性杆力学的研究工作也对运动稳定性理论提出了新的问题。将时间变量 t 替换为空间变量 s 以后,原则上 Lyapunov 关于运动稳定性的严格定义和定理,以及各种形式的稳定性判据均可照搬到弹性杆的平衡稳定性。由于弹性杆仅占据有限空间域,关于平衡稳定性的判断仅在弧坐标的有限范围内进行,因此弹性杆的平衡稳定性属于在有限区间内考察的实用稳定性范畴。根据 Lyapunov 运动稳定性理论导出的稳定性判据超出了弹性杆稳定性的实际要求。Lyapunov 运动稳定性理论中的时间变量 t 从发生初扰动的时刻起只能朝正方向单调变化。考虑到弧坐标变化的可逆性,若初扰动位置不在弹性杆的端点,当弧坐标 s 朝正、负两个方向变化时,渐近稳定性或不稳定性可持相反结论。Lyapunov 稳定性不同于工程中判断弹性杆屈曲所依据的欧拉稳定性。以受轴向力作用的直杆为例,压杆受微扰的挠性线切线倾角在零附近变化而符合 Lyapunov 稳定性定义。拉杆的受微扰平衡状态为带回环的挠性线,其切线倾角在大范围内变化而符合 Lyapunov 不稳定性定义。但按照欧拉稳定性概念,对于确定的弹性杆端部约束,只要有与原平衡状态不同的新平衡状态出现,即认为原状态失稳,据此导出压杆失稳的欧拉载荷。于是对于相同的物理现象,根据两种稳定性概念可得出截然不同的结论。

在静力学范畴内研究弹性杆的稳定性,由于无时间变量参与,不可能根据挠性线变化的时间历程来判断受扰后弹性杆的运动趋向。更严格的稳定性判断必须在动力学范畴内进行,即必须研究具有弧坐标 s 和时间 t 双重自变量的离散系统的稳定性问题。在已发表的弹性杆动力学文献中,Tabor, Klapper(1994)^[116] 导出了杆截面的运动学关系式,以及用拓扑学参数描述杆几何形态的运动学方程。Goriely, Shipman(2000)^[190,191] 在线性化动力学方程的基础上,用数值方法研究了螺旋线平衡的一次近似稳定性。Tsuru(1986,1987)^[66,68], Tobias, Coleman 等(1996)^[133,144] 研究了杆的扭转转动, Antman(1979)^[39], Coleman(1992)^[98] 研究了弹性波问题。Goldstein, Camalet, Wolgemuth 等(1998,1999,2000)^[162,179,203] 研究了弹性杆在黏性介质中的运动。

弹性杆平衡方程的非线性必然导致分岔与混沌等非线性现象的出现。Thompson, Virgin, Milke, Holmes(1988)^[72,76], Davis, Moon(1993)^[101] 等研究了弹性杆平衡的混沌问题。由于时间变量被弧坐标所取代,动力学中的时间历程概念转换为弹性杆空间分布的几何概念。动力学中的周期运动转换为两端连接的封闭弹性杆。因此弹性杆的混沌概念应形象地理解为对初值极端敏感且在空间中无规则分布的不封闭的往复缠绕状态。混沌动力学的理论和研究方法均可用于分析弹性杆的混沌形态。Vielsack(1982)^[46], Buzano(1986)^[64], Domokos(2003)^[223] 等研究了弹性杆平衡的分岔问题。

国内在弹性细杆力学基础方面的研究工作主要偏重于平衡稳定性的分析^[240,259,260,264,271,274,279],以及与动力学有关的分析^[267,270,273,275,278]。此外,还提出了将 Schrödinger 方程的表达形式扩展到非圆截面杆,导出其近似解析解^[242,272],研究了弹性杆的分析力学问题^[241,281],以及受圆柱面约束杆的平衡稳定性等问题^[266,280]。

本书系统地叙述超大变形弹性细杆的非线性力学。全书共分 7 章。第 1 章为曲线和曲杆的微分几何和拓扑学基础,对描述曲杆几何形态的扭转数、连接数、缠绕数等参数的定义和计算作出解释。第 2 章分别应用矢量力学方法和分析力学方法建立弹性杆的 Kirchhoff 方程,讨论若干可积情况,即一般受力情况的圆截面杆和受力矩单独作用的非

圆截面杆。第3章建立以杆的曲率、挠率和截面扭角为变量的 Schrödinger 方程,作为 Kirchhoff 理论的另一种表达方式;在圆截面杆情形,有与 Kirchhoff 方程完全一致的解析积分。第4章叙述杆变形后的挠性线计算,讨论可利用解析积分计算挠性线的若干特殊问题,并讨论受约束杆的挠性线问题。第5章在 Lyapunov 稳定性理论上讨论弹性杆的平衡稳定性,分别利用能量方法、相平面方法、一次近似理论和 Lyapunov 直接方法推导圆截面和非圆截面直杆和螺旋杆的平衡稳定性条件;第1章中建立的拓扑学参数在能量法中得到了应用;通过对具体问题的分析,讨论 Lyapunov 稳定性概念与欧拉稳定性概念的区别与联系;此外还讨论弹性杆平衡状态的分岔和混沌问题。第6章讨论弹性杆的动力学问题,建立一般情况下以及黏性介质中弹性杆的动力学方程;在以弧坐标 s 和时间 t 为双重自变量的离散系统稳定性概念的基础上,利用一次近似理论推导直杆和螺旋杆的动态稳定性条件;讨论弹性杆的扭转振动和弯曲振动问题。第7章为计算弹性杆平衡的数值方法,使用欧拉参数代替欧拉角作为基本变量,以避免数值计算过程中的奇异性;对静电引力和几何约束两种不同情况,建立基于有限元方法的离散化弹性杆平衡方程。为使读者能顺利阅读,与正文有关的一些数学和力学基础知识,包括椭圆函数基础、刚体运动学基础、弹性杆的位移、应变和应变能和稳定性理论基础等在附录中列出。参考文献中列出的二百余篇文献分别按中英文以发表时间顺序排列。这些文章多发表在物理、化学物理、物理化学、生物化学、高分子化学,以及分子生物学等学科的刊物上,但却与力学学科密切相关。作为一本力学著作,本书在讨论弹性杆的力学问题时不涉及生物学范畴的内容,但在叙述中注意与分子生物学背景的联系,并在脚注中对具体概念之间的关系作出解释。

目 录

C O N T E N T S

序 言	1
主要符号表	3
绪 论	15
第 1 章 曲线和曲杆的几何学基础.....	1
1.1 曲线的几何学	1
1.2 曲杆的弯扭度	3
1.3 曲杆的扭转数	4
1.4 曲线的连接数	8
1.5 曲杆的缠绕数	9
第 2 章 Kirchhoff 方程及其积分	14
2.1 Kirchhoff 方程的建立	14
2.2 用欧拉角表示 Kirchhoff 方程	18
2.3 弧坐标分析力学.....	21
2.4 Kirchhoff 方程的初积分	29
2.5 圆截面杆的解析积分.....	32
2.6 非圆截面杆的解析积分.....	36
第 3 章 弹性杆平衡的 Schrödinger 方程	42
3.1 考虑分布力的弹性杆平衡方程.....	42
3.2 圆截面杆的 Schrödinger 方程	44
3.3 圆截面杆的解析积分.....	46
3.4 非圆截面杆的 Schrödinger 方程	47
3.5 非圆截面杆的解析积分.....	49

第 4 章 弹性杆的挠性线	53
4.1 挠性线方程的建立	53
4.2 螺旋挠性线	56
4.3 圆截面杆挠性线的定性分析	58
4.4 挠性线方程的解析积分	67
4.5 平面挠性线	69
4.6 拉扭杆的挠性线	73
4.7 封闭杆的挠性线	76
4.8 圆柱面约束杆的挠性线	80
第 5 章 弹性杆平衡的稳定性	85
5.1 稳定性分析的能量原理	85
5.2 圆截面直杆的平衡稳定性	89
5.3 圆截面螺旋杆的平衡稳定性	94
5.4 非圆截面螺旋杆的平衡稳定性	101
5.5 非圆截面直杆的平衡稳定性	107
5.6 受扭矩作用螺旋杆的稳定性与分岔	112
5.7 稳定性分析的 Lyapunov 直接方法	116
5.8 弹性杆的混沌平衡形态	120
第 6 章 弹性杆的动力学	124
6.1 曲线和曲杆的运动学	124
6.2 弹性杆的动力学方程	127
6.3 非圆截面螺旋杆的动态稳定性	131
6.4 弹性杆的扭转振动	135
6.5 弹性杆的弯曲振动	139
6.6 圆截面杆在黏性介质中的运动	146
第 7 章 弹性杆平衡状态的数值计算	151
7.1 用欧拉参数表示的 Kirchhoff 方程	151
7.2 Kirchhoff 方程的数值积分	155
7.3 弹性杆变分原理的离散化	159
7.4 考虑静电引力的变分原理离散化	163
7.5 考虑几何约束的变分原理离散化	166
7.6 考虑轴向变形的变分原理离散化	168
附录 A 椭圆函数基础	173

附录 B 刚体运动学基础	178
附录 C 弹性杆的应力、应变和应变能	189
附录 D 稳定性理论基础	193
名词索引	198
参考文献	201