中学理科学习指导丛书

北京市海淀区教师进修学校主编

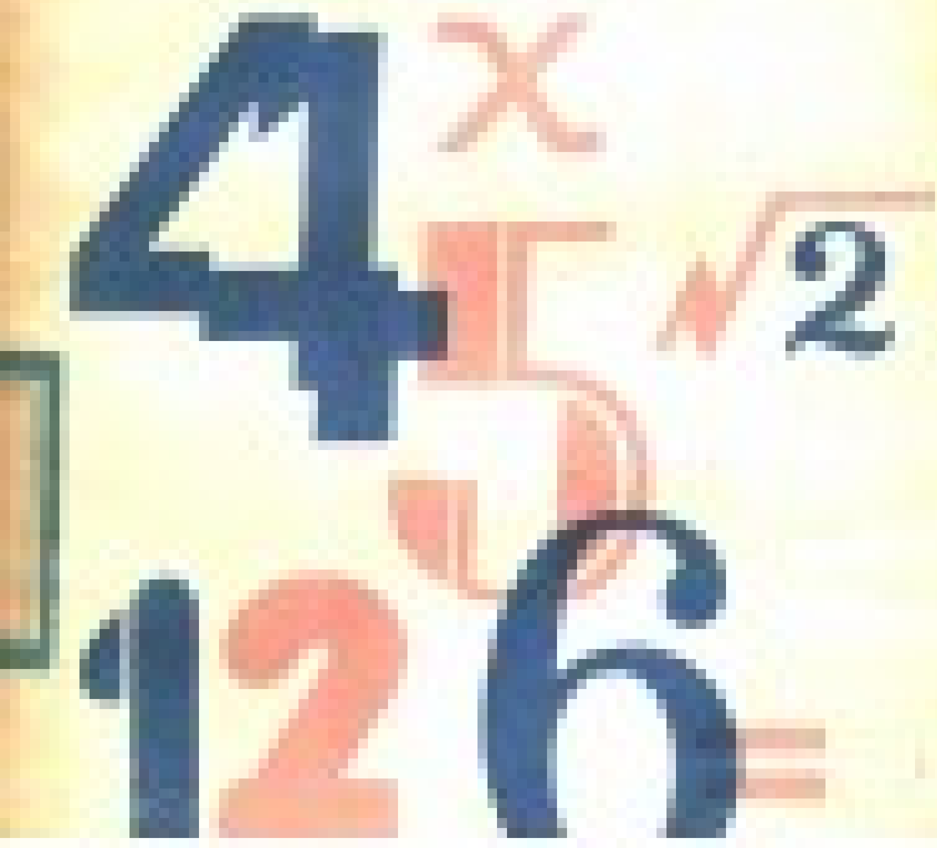
重庆出版社

初二代数

辅导与练习

初二代数

辅导与练习



中学理科学习指导丛书

初二代数辅导与练习

北京市海淀区教师进修学校主编

重庆出版社

一九八五年·重庆

编　　者

张君达　北京第三师范学校

王燕谋　北京十一学校

庄燕民　北京市海淀区教师进修学校

陈宝民　北京市海淀区教师进修学校

责任编辑　王镇寰

初二代数辅导与练习

重庆出版社出版（重庆李子坝正街102号）

新华书店重庆发行所发行

重庆新华印刷厂印刷

*

开本787×1092　1/32　印张　6.5　字数　140千

1985年7月第一版　　1985年7月第一次印刷

印数　1—2.320.600

书号：7114·296　　定价：0.71元

前　　言

长期以来，我们感到学生迫切需要一种能帮助他们学好功课的课外读物；家长希望有一种能督促和检查自己孩子学习的材料；教师欢迎出版一种能帮助自己辅导学生的书籍。为了解决这些问题，我们组织一些有教学经验的教师编写了这套丛书。

通过实践，我们认识到中学数学的学习和练习应做到以下几点：

(1) 只有把知识的结构分析清楚时，知识才易于学生理解、记忆和运用，并从而掌握知识的整体；

(2) 打好基础，是学生学好全部知识的前提。在基础知识中，重点和难点掌握不好，是有些学生学习不好的原因之一；

(3) 引导学生对所学过的那些主要题型做到心中有数，同时又掌握各级题型的解题规律，是帮助学生消化知识，提高解题能力的有效途径；

(4) 知识必须通过不断地复习、检查，才能逐步深化、巩固；

(5) 对学习较好的学生来说，在学好基础知识的前提下，要不断提高他们综合运用知识，以及把知识向深、广两个方面进行适当引伸的能力，这不但是可以的，而且是应该的。

基于以上认识，本书在编写时，各章都包含以下几部分：

（1）结构分析：有些章分析比较简单，可以在学习开始时看，有些则分析较深入，可以在学完全章后再看。

（2）重点和难点分析：说明重点内容的重要性在哪里，特别是如何通过它们掌握全章内容；说明难点之所以难的原因，特别是通过解决难点能学到哪些思考方法，解题技巧，和促进哪些能力的增长。

（3）各级题型：配以典型的例题，并说明解题规律。

（4）习题和自我检查题：在每单元之后，配备知识面尽量全，并且有一定综合性的练习和检查本单元学习的一套题目，以帮助学生了解自己学习后的收获与存在的问题。

（5）启发与体会：着重介绍教师的经验和体会；教科书上一般不讲的思路、观点、方法；以及适当启发学生对所学知识作更深入的思考。

本书尽量做到体现以上各项中的要求；紧密配合教材；但又不重复教材内容。但是，限于编者水平，未必都能做到，且不免出现错误或不妥之处，我们诚恳地希望读者给予批评和指正。

北京海淀区教师进修学校

1985年1月

内容提要

本书在编写过程中，注意了适应初中二年级学生的特点；力求使本书朝着提纲挈领、深入浅出、通俗易懂、注重双基的方向努力。每章包括结构分析、重点和难点分析，各级题型，和启发与体会四部分，另外还配备了一些灵活的综合性练习题和习题，以及供阶段测验或学生自我检查用的自我检查题。

目　　录

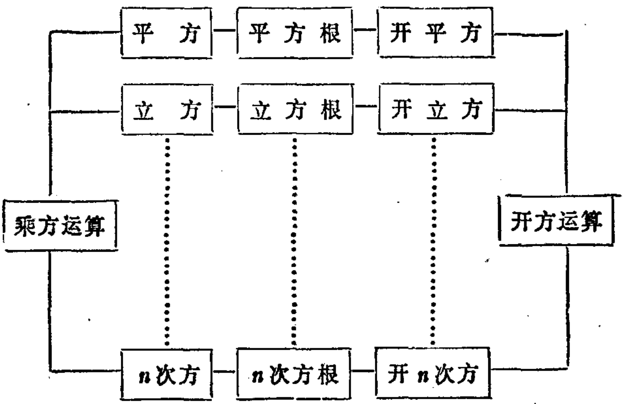
第一章　数的开方

一　结构分析

本章的主要内容有数的开方运算、方根的概念、无理数和实数的概念与运算。

数的开方运算是在数的乘方运算的基础上引入的。“平方”与“开平方”互为逆运算，这是研究开平方的方法和进行验算的基础。课本中先介绍平方根的概念和性质，然后把求平方根的运算称为开平方运算，与此类似，开立方、开n次方的运算都是这样引入的。

求一个数的方根的运算，叫做开方。“开方”这一概念的发展见下表：



算术根的概念是一个重要的概念，在数与式的开方运算中经常要用到．在引入无理数概念以后，使数的范围从有理数扩充到实数．

二　重点和难点分析

同学们在学习这一章的内容时，应该注意理解数的概念的扩充的意义，掌握平方根表与立方根表的使用方法．

算术根问题是本章学习的一个重点，也是难点，应该争取透彻理解算术根的概念，并掌握它的一些性质．

数的概念的扩充

数的概念的发展是实践的需要所决定的．例如人们需要知道一天中猎得野兽的数目，就要数数，再要记录下来就首先产生了数字：1、2、3、4、5、6、7、8、9和0，特别用“0”表示没有．由于人有天然的计数器——两只手，因此，自然地产生了十进位制记数法．十进位制记数法在记数与运算时非常方便，这一实践的需要使得它一直保留到今天，并且得到广泛地应用．

从数学本身的发展来看，一类新数的产生常常是某种运算的需要．例如定义了除法运算以后，$2\div5$的结果不再是整数，这就需要定义一类新数——分数．同样，也可以认为引入负数的概念是减法运算的需要．到目前为止，我们已经把数的概念从整数、分数扩充到有理数．

事实上，任何一次数的概念扩充后所引进的新数，既应满足某种新的运算的需要，又应保持“旧”数的一切性质和运

算规律。例如有理数的引入既满足了减法运算的需要，又保证了整数与分数的性质与运算律在有理数范围内仍然成立。

这一章，我们通过学习一种新的运算——开方运算，引入由开方运算的需要所产生的一种新数——无理数。

我们先来回忆一下减法与除法是怎么引入的：

如果$a+x=b$，那么求x的运算就叫做减法，x叫做b减a所得的差，记为

$$x=b-a$$

如果$a\cdot x=b$，那么求x的运算就叫做除法，x叫做b除以a所得的商，记为

$$x=b\div a$$

我们注意到这两种运算的引入共同具备三个特点：

1）减法与除法分别是在加法与乘法的基础上引入的；

2）假设a、b都是整数，减法运算的引入将需要产生一类新数——负数；假设a、b都是整数，且$a\neq 0$，除法运算的引入将需要产生一类新数——分数；

3）如果a、b是某两个给定的数，那么减法运算的结果——差与除法运算的结果——商都存在并且是唯一的。

与此类似，我们将在乘方运算的基础上引入开方运算。

如果$x^2=a$，那么求x的运算就叫做开平方，x叫做a的平方根；

如果$x^3=a$，那么求x的运算就叫做开立方，x叫做a的立方根；

一般地，如果$x^n=a$，且n是大于1的整数，那么求x的运算就叫做开n次方，x叫做a的n次方根。

我们看到：开方运算是在乘方基础上引入的，事实上，

它是乘方运算的一种逆运算．引入一种新的运算以后，首先应该考虑这种运算的结果是不是存在？如果运算的结果是存在的，那么这个结果是不是唯一？要回答这两个问题，特别是第一个问题，需要用到同学们还没有学过的一些知识，在这里，我们仅能以开平方运算为例作些浅显的说明．

如果x是a的平方根，那么a叫做被开方数。因为任何数的平方都是正数或者为零，所以负数没有平方根存在。这就是说只有当a是正数或零时，才可能有平方根．例如，因为$8^2=64$，且$(-8)^2=64$，所以8与-8都是64的平方根，又如$\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$，$\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$，所以$\frac{2}{3}$与$-\frac{2}{3}$都是$\frac{4}{9}$的平方根．由此可知正数64与$\frac{4}{9}$的平方根都有两个，它们互为相反数．而$0^2=0$，所以零的平方根是零．同样，对于$x^n=a$，如果$n$是正偶数，那么仅当$a$是非负数时，开平方的结果——平方根才有可能存在．同时从上面的例子看出：被开方数a是正数、且是完全平方数时，它的平方根是存在的，并且不是唯一的，只有被开方数a是零时，它的平方根才是唯一的．

应该指出(不是证明)：当被开方数a是正数但不是完全平方数时，它的平方根存在，且是两个互为相反符号的数．那么a的平方根是两个什么样的数呢？它们不再是互为相反符号的两个有理数，我们以2为例来证明2的平方根不是有理数．

例1 试证：没有一个有理数的平方等于2．

证：如果有一个负有理数的平方等于2，

那么与它相反的正有理数的平方也等于2．因此只需要

证明没有一个正有理数的平方等于 2 就可以.

∵$1^2<2<2^2$，∴任何正整数的平方都不等于2。

我们再证明任一正分数的平方也不等于2. 用反证法.假定有一个正分数$\frac{m}{n}$(m、n是正整数，$n\neq 1$，$(m, n)=1$)*它的平方等于2，即

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2=2$$

于是$m^2=2n^2$，因此m^2是一个偶数，m一定也是个偶数。

设$m=2m'$(m'是一个正整数)，代入上式，得

$$(2m')^2=2n^2,$$

即
$$4m'^2=2n^2,\quad n^2=2m'^2.$$

因此n^2一定是偶数，n也一定是偶数.

这就推出了m与n有公约数2，与假设$(m, n)=1$矛盾，于是证明了“没有一个有理数的平方等于2”.

假定我们已经知道 2 的平方根是存在的，并且例 1 已经证明它们不是有理数，这就自然需要引进一类不是有理数的数. 正象当a小于b时，减法$a-b$产生负数一样，对 2 进行开平方运算就产生了一个新的数. 如果一个正数 a 的正的平方根用“$\sqrt{a}$”表示，负的平方根用“$-\sqrt{a}$”表示，那么 2 的平方根就用$\pm\sqrt{2}$表示，通过例 1 可以看出：$\sqrt{2}$不能写成一个有理数$\frac{m}{n}$(m是整数、n是自然数)，即$\sqrt{2}$不是一个有限小数或无限循环小数.

在实践中，我们会遇到一种小数，它们不能写成有限小

*$(m, n)=1$表示m、n两数互质，即它们的最大公约数是1

数或无限循环小数的形式。例如0.101001000100001…(两个1之间依次多一个0)；$\pi=3.14159265\cdots$，它们的小数位数是无限的，而且是不循环的。这样的小数叫做无限不循环小数。$\sqrt{2}$就是这样的无限不循环小数：

$$\sqrt{2}=1.41421356\cdots$$

我们把无限不循环小数叫做无理数。例如

$$-\sqrt{5}=-2.236067\cdots$$

$$\sqrt[3]{2}=1.259921\cdots$$

都是无理数，但是$\sqrt{4}$，$-\sqrt[3]{27}$就不是无理数。

以上我们仅仅从开方运算的需要说明引入无理数的必要，但是应该注意并不是所有的无理数都是开方开不尽而产生的数，如π是无理数，但它不是由开方运算所产生的。因此不能说"无理数就是开方开不尽的数"。

有理数和无理数统称为实数，即实数可以作如下分类：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数：有限小数或无限循环小数。}\\ \text{无理数：无限不循环小数。}\end{cases}$$

这样，在引入无理数的概念以后，我们又把数的概念从有理数扩充到实数。我们知道：在实数范围内四则运算总是可以实施的，这就是说对于任意的两个实数，他们的和、差、积、商(除数不为零)仍是实数。同时在进行这样的运算时有理数的性质与运算律也同样适用。这样一条属性并不是在任何一个数的范围内都具备的。

例2 (1) 两个有理数的和、差、积、商(除数不为零)还是有理数吗？证明你的结论；

(2) 两个无理数的和、差、积、商(除数不为零)还是无理数吗？举例说明。

证：(1) 一定是有理数。

设$\frac{p}{q}$和$\frac{m}{n}$是任意的两个有理数，其中p、q、m、n是整数，$q \neq 0$，$n \neq 0$，且$(p, q)=1$，$(m, n)=1$．由此

$$\frac{p}{q} \pm \frac{m}{n} = \frac{pn \pm mq}{nq};$$

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} = \frac{mp}{nq};$$

$$\frac{p}{q} \div \frac{m}{n} = \frac{np}{mq}.$$

由于p、q、m、n都是整数，因此上面各式右端的分子与分母都是整数，而且分母都不是零，故是有理数。

(2) 不一定是无理数．例如，令$\alpha=\sqrt{5}$、$\beta=-\sqrt{5}$则$\alpha+\beta=0$不是无理数；

令$\alpha=2+\sqrt{3}$，$\beta=2-\sqrt{3}$，则$\alpha \cdot \beta=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$不是无理数；

令 $\alpha=-5+\sqrt{2}$，$\beta=5+\sqrt{2}$，则$\alpha-\beta=(-5+\sqrt{2})-(5+\sqrt{2})=-10$不是无理数；

令$\alpha=\sqrt{18}$，$\beta=\sqrt{2}$，则$\frac{\alpha}{\beta}=3$不是无理数。

如果适当选取α与β，还可以使它们的和、差、积 商是一个无理数。

每一次数的概念的扩充对数学本身的发展都具有重大的影响，深刻理解数的概念扩充的意义对今后的学习是非常重要的。

通过这一部分知识的学习，你能回答下述一组问题吗？