中央广播电视大学教材

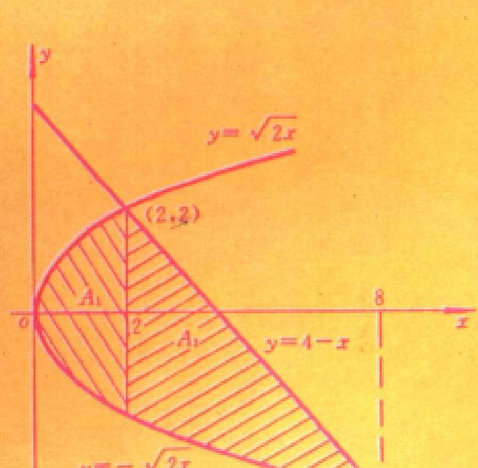
高等数学

多元函数微积分

下册

GAO DENG SHU XUE

柳重堪 编



中央广播电视大学出版社

高 等 数 学

下 册

多元函数微积分

柳重堪 主编

中央广播电视大学出版社

（京）新登字 163 号

图书在版编目(CIP)数据

高等数学　下册/柳重堪编. —北京：中央广播电视大学出版社，1994.10

ISBN 7-304-01079-7

Ⅰ.高…　Ⅱ.柳…　Ⅲ.高等数学-电视大学-教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第 14699 号

高 等 数 学

下　册

多元函数微积分

柳重堪　主编

中央广播电视大学出版社出版

社址　北京西城区大木仓 39 号北门　邮编：100032

北京耿华印刷厂印刷　新华书店北京发行所发行

开本 787×1092　1/16　印张 14　千字 320

1994 年 10 月第 1 版　　1994 年 10 月第 1 次印刷

印数 1—60000

定价 8.70 元

ISBN 7-304-01079-7/O·74

前　言

《高等数学》（上、下册）是中央广播电视大学理工科大专教材．上册包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、级数、微分方程等八章．下册包括空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分介绍、傅里叶级数等五章，电视课共117学时，其中上册72学时，下册45学时．

本书的编写依据是国家教委组织制订的“高等工程专科教育基础课程（高等数学）教学基本要求”及中央广播电视大学高等数学教学大纲与教学计划．编写时尽可能考虑下列因素：

1．读者对象是大学专科理工类各专业学生；

2．电视教学的远距离、多媒体的特点；

3．不过于追求理论上的严密性，但保持自身体系的完整性；

4．注意启发式和几何直观，以便于自学；

5．加强基本运算的训练，不追求复杂的计算技巧，除每节配有练习外，每章还配有总习题，供读者自我测验，所有习题都附有答案；

6．适当介绍高等数学在现代科技领域中的应用；

7．适当补充一些超出大纲但为某些专业所需要的内容，这些内容均以“*”号标出．

参加本书下册编写的有柳重堪（第十一章，第十二章），梁映森（第十章，附录），李林曙（第九章，第十三章），张旭红（第十一、十二章的练习题）等．最后由主编统一修改定稿．

本书下册由盛祥耀教授主审．参加审校的还有邵士敏、凌德筠、施学瑜、周德润、胡蕖等先生，他们对本书初稿提出了许多宝贵意见，在此谨表衷心的谢意．

本书编写过程中得到中央广播电视大学各级领导的大力支持和关心，在此一并致谢．

由于编者的水平和经验有限，书中不当之处在所难免，恳请广大读者指正，以俟再版时更正．

编　者

1994年7月

目　录

第九章　空间解析几何与向量代数

在平面解析几何中，我们通过在平面上建立坐标系，将平面上每一个点用坐标（两个有序数）来表示，使平面几何问题化为代数问题，从而可以利用代数方法解决几何问题；另一方面，这又可借助于几何图形的直观性，方便地考虑和解决代数问题．在这一章里我们将用同样方法建立空间直角坐标系，利用空间点的坐标（三个有序数）来研究空间几何问题．

空间解析几何是平面解析几何的自然推广，它是学习多元函数微积分的基础．在学习这部分内容时，应经常与平面解析几何作比较，并不断提高空间想象能力．

§9.1　空间直角坐标系

我们知道，平面直角坐标系 OXY 是由两条互相垂直并以交点为原点的数轴 OX，OY 构成的；把它的所在的平面称为 OXY 平面（图 9-1-1）．现在，将此 OXY 平面置于空间中，并过 O 点作一垂直于 OXY 平面的数轴 OZ（如图 9-1-2 所示），这样 OX，OY，OZ 就构成一**空间直角坐标系** $OXYZ$，O 仍称为**坐标原点**；OX 轴、OY 轴仍分别称为**横轴**、**纵轴**，或称为 X 轴、Y 轴，OZ 轴则称为**立轴**，或称为 **Z 轴**，统称为**坐标轴**．

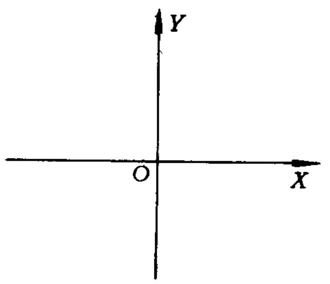


图 9 1 1　平面直角坐标系

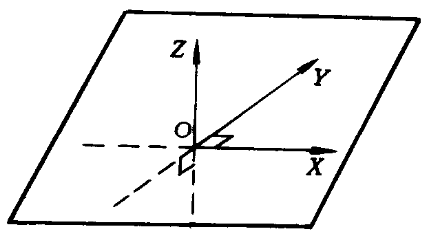


图 9-1 2　空间直角坐标系的构成

注意到上面所作的垂直于 OXY 平面的 OZ 轴其方向可以有两个，一个朝上，一个朝下．我们将如图 9-1-2 朝上的坐标系称为**右手系**（即用右手四指由 X 轴正向到 Y 轴正向的方向握住 Z 轴，大姆指的指向规定为 Z 轴的正向）．以后我们均采用右手系．

X 轴与 Y 轴，Y 轴与 Z 轴，Z 轴与 X 轴所张成的平面分别称为 ***OXY* 平面**，***OYZ* 平面**，***OXZ* 平面**，统称为**坐标平面**．

对于空间直角坐标系 $OXYZ$ 中的任意一点 P_0，我们可用类似于平面直角坐标系中的方法来规定 P_0 的空间直角坐标．如图 9-1-3 所示，从点 P_0 作 OXY 平面的垂线与 OXY 平面交于点 P_1（P_1 称为点 P_0 在 OXY 平面上的**投影**），设 P_1 在平面直角坐标系 OXY 中的坐标为（x_0，

y_0)，再过点 P_0 作 Z 轴的垂直平面与 Z 轴相交，设此交点在 OZ 轴上的坐标为 z_0. 这样，空间中任意一点 P 就对应了三个有序实数 (x_0，y_0，z_0). 反之，任给三个有序实数 (x_0，y_0，z_0)，都可以下列方式确定空间中一个相应的点：先在 OXY 平面上确定一点 P_1，其平面坐标为 (x_0，y_0)，再过 P_1 点作 OXY 平面的垂直线段 P_1P，使得 $\overline{P_1P}$ 的长度为 $|z_0|$，P 在 OXY 平面的上方或下方取决于 z_0 的值为正或为负. 称 (x_0，y_0，z_0) 为点的**空间直角坐标**.

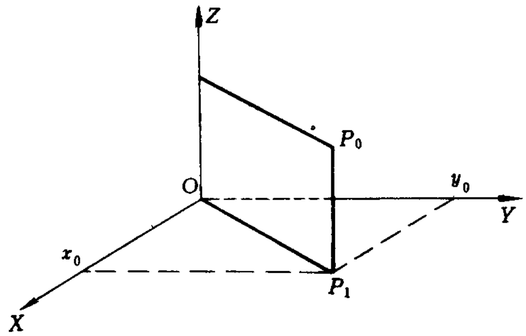


图 9-1-3　空间点 P_0 的坐标

由上可见，在空间直角坐标系中，空间中的点与三个有序实数是一一对应的.

显然，坐标原点的坐标是 (0，0，0)，点 (a，0，0) 在 X 轴上. 对于一般的点，例如 (2，3，−2)，我们可按照如图 9-1-4 所示的方法确定其在空间直角坐标系中的位置.

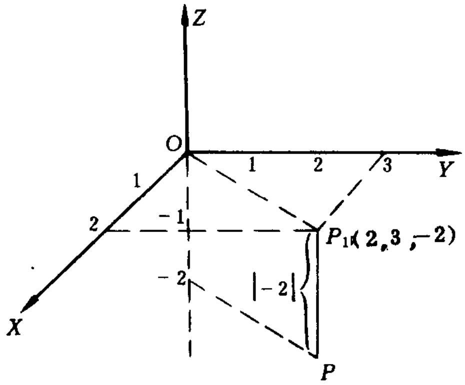


图 9-1-4　点 (2，3，−2) 在坐标系 $OXYZ$ 中的位置

三个坐标平面把空间划分成八个区域，如图 9-1-5 所示. 每一区域称为**卦限**. 在每个卦限内，点的坐标的符号是固定的.

由图 9-1-5 可知，八个卦限中坐标的符号依次为：

Ⅰ (＋，＋，＋)，Ⅱ (－，＋，＋)，

Ⅲ (－，－，＋)，Ⅳ (＋，－，＋)，

Ⅴ (＋，＋，－)，Ⅵ (－，＋，－)，

Ⅶ (－，－，－)，Ⅷ (＋，－，－).

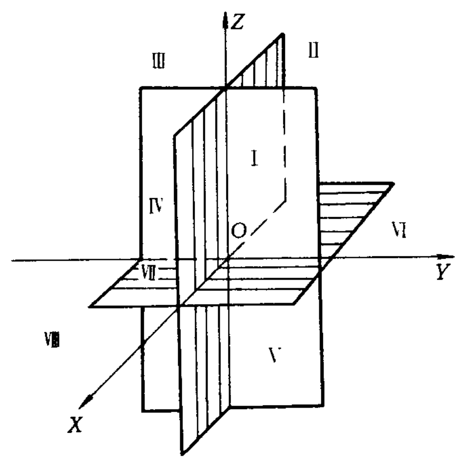


图 9-1-5　空间直角坐标系中的八个卦限

例 1　求空间中任意两点 P_1 (x_1，y_1，z_1)，P_2 (x_2，y_2，z_2) 之间的距离 d.

解　记点 P_1 与 P_2 在 OXY 平面上的投影分别为点 Q_1，Q_2，显然在 OXY 平面上点 Q_1 和点 Q_2 的坐标分别为 (x_1，y_1) 和 (x_2，y_2)，按照平面上两点距离公式知

$$|Q_1Q_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

连接 P_1，P_2；Q_1，Q_2，并过点 P_1 作 Q_1Q_2 的

平行线交 P_2Q_2 于 A 点，由图 9-1-6 可知

$$|P_1P_2|^2=|P_1A|^2+|AP_2|^2$$

而

$$|P_1A|=|Q_1Q_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$|AP_2|=|z_2-z_1|$$

于是得

$$|P_1P_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$$

即

$$d=|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{9-1-1}$$

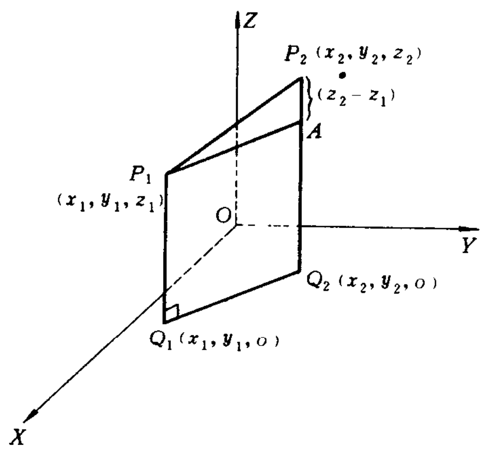


图 9-1-6 推导两点距离的示意图

此即空间直角坐标系中两点间距离公式. 显然，它是平面直角坐标系中两点间距离公式的直接推广.

例 2 空间中的球面方程.

设有一个球面，球心为 P_0，半径为 R $(R>0)$. 在建立空间直角坐标系后，球心 P_0 的坐标便是确定的，设为 (x_0, y_0, z_0). 我们来考虑位于该球面上的点的坐标应满足什么样的关系式. 显然，球面上任一点到球心 P_0 的距离恒为 R，故若设 $P(x, y, z)$ 为球面上任意一点，则根据两点间距离公式 (9-1-1)，有

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$$

或

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2 \tag{9-1-2}$$

易知，球面上的点其坐标必满足方程 (9-1-2)，球面外的点其坐标则不满足方程 (9-1-2). 我们称 (9-1-2) 为球心在 P_0、半径为 R 的**球面方程**.

特别，球心在原点 (0，0，0)，半径为 R 的球面方程为

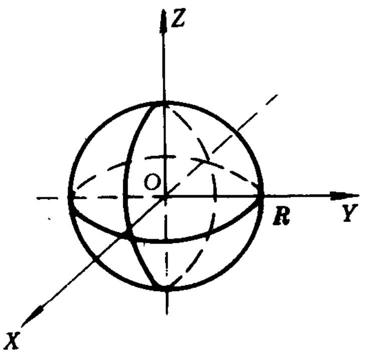


图 9-1-7 球心在原点，半径为 R 的球面

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \tag{9-1-3}$$

其图形如图 9-1-7 所示

方程（9-1-2）又可写成

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-R^2=0$$

一般地，在空间直角坐标系中的一个曲面 S 可以用一个关于 x，y，z 的方程

$$F(x,y,z)=0 \tag{9-1-4}$$

来表示. 其中 $F(x,y,z)$ 是一个三元函数，即含有三个自变量的函数. 确切地说，如果曲面 S 上每一点的坐标 (x,y,z) 都满足方程 $F(x,y,z)=0$，而任一组满足方程 $F(x,y,z)=0$ 的有序数 (x,y,z) 所对应的点都在曲面 S 上，则称 $F(x,y,z)=0$ 为曲面 S 的**方程**，也称曲面 S 为方程 $F(x,y,z)=0$ 的**图形**.

有时，空间曲面也可用下列形式的方程

$$z=f(x,y)$$

来表示，这里 $f(x,y)$ 是关于自变量 x，y 的二元函数. 例如，对于球面方程(9-1-3)可解出 z：

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

及

$$z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

显然，前者是上半球面的方程，后者是下半球面的方程.

练习 9.1

1. 在空间直角坐标系中，画出下列各点 A（2，3，4），B（1，2，-1），C（-2，2，2），D（2，-2，-2），E（0，0，-4），F（0，3，4）.

2. 点 P（x，y，z）的三个坐标 x，y，z 中若有一个为 0，这个点在何处？若有两个为 0，这个点在何处？

3. 指出下列各点位置的特点：

A（2，0，0），B（0，-3，0），C（0，-3，1），D（-5，0，3），E（3，2，0），F（0，0，0）

4. 求出定点（2，-3，-1）关于：(1) 各坐标平面；(2) 各坐标轴；(3) 坐标原点的对称点的坐标.

5. 一立方体放置在 OXY 平面上. 其底面的中心与原点相合，底面的顶点在 X 轴和 Y 轴上. 已知立方体的边长为 a，求它各顶点的坐标.

6. 求两点（1，2，2）和（−1，0，1）间的距离.

7. 分别求出点 $P(x,y,z)$ 到（1）各个坐标平面；（2）各个坐标轴；（3）坐标原点间的距离.

8. 根据下列条件求点 B 的坐标：

（1）$A(4,-7,1)$，$B(6,2,z)$，$|AB|=11$；

（2）$A(2,3,4)$，$B(x,-2,4)$，$|AB|=5$.

9. 求下列球面的球心与半径：

（1）$x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z-7=0$，

（2）$2x^2+2y^2+2z^2-5z-8=0$.

§9.2 空 间 向 量

一、向量概念

在实际问题中，有一类量（例如高度，重量，温度等）是完全可以用一个实数来表示的，这种量通常称为**数量**或**标量**. 但另有一类量，例如位移，力，速度，加速度，电场强度等却是不能用一个实数来完全表示的，因为它们都还有方向，如果方向不同，则它们产生的效果也不同，也就是说，这类量既有大小又有方向，通常称之为**向量**或**矢量**.

在数学中，引进向量的概念及其运算，也有助于用代数方法来解决有关问题，例如空间解析几何中平面、直线表示等.

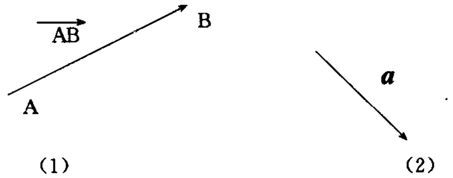


图9-2-1 向量的图形表示

向量的几何表示是一条带有箭头的线段，此线段的长度表示该向量的大小，而箭头表示该向量的方向. 如图 9-2-1（1）中所示的向量，其起点为 A，终点为 B，我们把这个向量记为 $\overrightarrow{AB}$，而该向量的长度则用 $|\overrightarrow{AB}|$ 表示. 有时为了简单起见，还可用小写黑体字例如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 等来表示向量如图 9-2-1（2）所示的 $\boldsymbol{a}$. 相应地，$\boldsymbol{a}$ 的长度记为 $|\boldsymbol{a}|$. 向量的长度通常又称为向量的**模**.

根据向量的定义，如果两个向量的模相等，而且方向也相同，则这两个向量相等. 如图 9-2-2 中，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AD}$. 由此可见，向量可以在空间中任意地平行移动.

方向相同或相反的向量称为是**平行的**，并记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

总之，向量有两个要素：模和方向.

向量本身不能比较大小，但其模是一实数，是可以比较大小的.

模为 1 的向量称为**单位向量**. 如图 9-2-2 中的 $\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{c}$，….

模为 0 的向量称为**零向量**，记作 $\mathbf{0}$. 零向量的方向规定为任意的. 即零向量可以认为平行于任何向量.

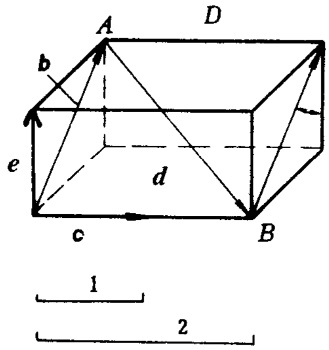


图 9-2 2　向量的平行移动

二、向量的加减法

向量可以进行加减运算.

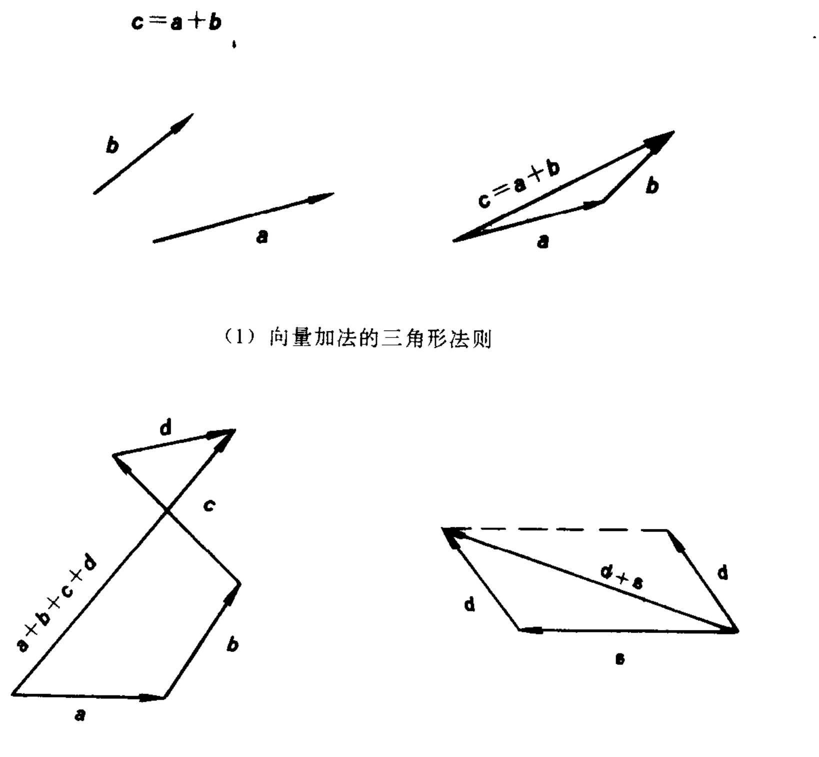
向量的加法可用下述**三角形法则**来定义：如图 9-2-3 (1) 所示，已知两向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，将 $\boldsymbol{b}$ 平移使其始点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，则以 $\boldsymbol{a}$ 的始点为始点，以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的向量 $\boldsymbol{c}$ 就是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和.

由两个向量的加法很容易推广到有限多个向量的加法，从图 9-2-3 (2) 可以看到，只要把这些向量首尾相连，而以第一个向量的始点为始点，以最后一个向量终点为终点的向量就是这些向量的和，这种加法又称为**折线法**.

另外，向量加法也可用**平行四边形法则**来进行：平移 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，使它们的始点重合，以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为相邻两边作平行四边形，则以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的始点为始点的对角线向量 $\boldsymbol{c}$ 就是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 如图 9-2-3 (3) 所示. 显然由于 $\boldsymbol{b}$ 的对边向量也等于 $\boldsymbol{b}$，故向量加法的平行四边形法则与上述三角形法则是等价的.



(1) 向量加法的三角形法则

(2) 多个向量加法的折线法　　(3) 向量加法的平行四边形法则

图 9 2 3　向量的加法

向量加法的物理意义是：如果 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示作用于某物体同一点处的两个力，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 表示

它们的合力.

由图 9-2-4 可验证，向量加法满足下列运算规律

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

(2) 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

可见它们和实数加法的运算规律是相同的.

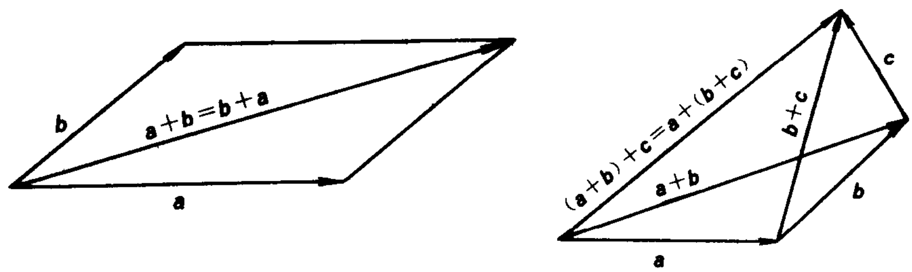


图 9 2 4 向量加法运算规律的图解

由向量加法的三角形法则可以看出

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \tag{9-2-1}$$

等号成立当且仅当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的方向相同. 事实上，若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 构成一个三角形，则由三角形两边之和大于第三边知

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| < |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$$

若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$. 反之亦然.

不等式 (9-2-1) 称为**三角不等式**. 由此也可看出，一般地说，两向量和的模并不等于这两个向量模的和，除非它们的方向相同.

与数量的减法是加法的逆运算一样，向量的减法定义为向量加法的逆运算：对于给定的两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，如果向量 $\boldsymbol{c}$ 满足下式

$$\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$$

则向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，并记为

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$$

向量的差也可用三角形法则来求得，如图 9-2-5 所示，其方法是通过平行移动将 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 首首相接，则两者尾尾相连的向量即为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，其方向指向被减向量 $\boldsymbol{a}$. 这很容易通过加法的三角形法则来验证.

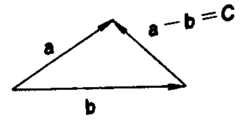


图 9 2-5 向量的减法

三、向量的数乘运算

如图 9-2-6 所示，设作用在重物 M 上有四个力：$\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{f}_1$，$\boldsymbol{f}_2$，$\boldsymbol{f}'$，它们之间的关系是：$\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{f}_1$，$\boldsymbol{f}_2$ 同向，但均与 $\boldsymbol{f}'$ 反向，且有

$|\boldsymbol{f}_1|=2|\boldsymbol{f}|$，$|\boldsymbol{f}_2|=\frac{3}{2}|\boldsymbol{f}|$，$|\boldsymbol{f}'|=|\boldsymbol{f}|$

为处理方便，很自然地记

$\boldsymbol{f}_1=2\boldsymbol{f},\boldsymbol{f}_2=\frac{3}{2}\boldsymbol{f},\boldsymbol{f}'=(-1)\boldsymbol{f}$

这就导致数与向量相乘，即向量的数乘运算.

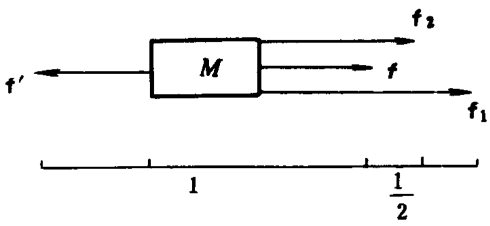


图 9-2-6　重物 M 受力图

定义 9.1　实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，称为 λ 与 $\boldsymbol{a}$ 的数乘，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 是零向量.

由定义 9.1 可知，无论 λ 为正为负或为零，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 都是与向量 $\boldsymbol{a}$ 平行的. 于是我们有

定理 9.1　向量 b 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 平行的充分必要条件是存在一个实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

由定义亦可知，对任意 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$是与 $\boldsymbol{a}$ 同向，且模为 1 的单位向量，若记其为 $\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，则对任意非零向量 $\boldsymbol{a}$，都可写成

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0 \tag{9-2-2}$$

另外，对任意向量 $\boldsymbol{a}$，称（-1）$\boldsymbol{a}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$；$-\boldsymbol{a}=$（-1）$\boldsymbol{a}$. 例如图 9-2-6 中的 $\boldsymbol{f}'=-\boldsymbol{f}$ 即是 $\boldsymbol{f}$ 的负向量.

容易验证，向量的减法 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 可看作是向量 $\boldsymbol{a}$ 加上向量 $\boldsymbol{b}$ 的负向量，即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-1)\boldsymbol{b} \tag{9-2-3}$$

式(9-2-3)可用图 9-2-7 来验证

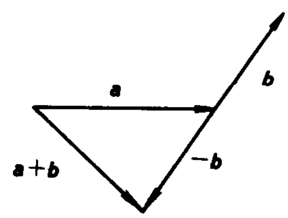


图 9-2-7　式(9-2-3)的图示

由数乘向量的定义，可以验证它满足下列运算规律

(1)结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$

(2)分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$　（对于数的分配律）

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$　（对于向量的分配律）

例 1　$\triangle ABC$ 边 BC 的三等分点为 D，E，记$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$.

解　如图 9-2-8 所示，由向量的加法和减法法则以及数乘向量的定义知

$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$

$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$

$\overrightarrow{EC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$

$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\overrightarrow{BD}$

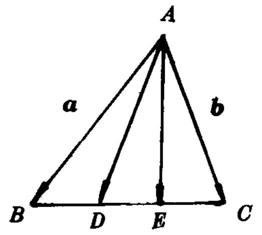


图 9 2 8　例 1 图

$$=\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$$

$$\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{b}-\overrightarrow{EC}=\boldsymbol{b}-\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$$

$$=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$$

例 2　设 $ABCD$ 为平行四边形，M，N 分别为 DC，BC 的中点，已知 $\overrightarrow{AM}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{AN}=\boldsymbol{d}$，试用 $\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{d}$ 表示 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$

解　由图 9-2-9，设

$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$

则

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b} \tag{2}$$

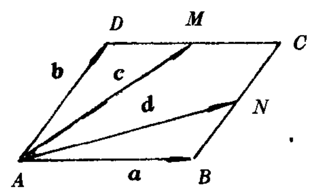


图 9-2-9　例 2 的示意图

由　$2\times(1)-(2)$：$2\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}=\frac{3}{2}\boldsymbol{b}$

　　$2\times(2)-(1)$：$2\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}=\frac{3}{2}\boldsymbol{a}$

故

$$\boldsymbol{a}=\frac{2}{3}(2\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}),\boldsymbol{b}=\frac{2}{3}(2\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d})$$

四、向量的坐标表示

根据向量的定义，一个向量由其模及方向所确定．但到目前为止我们对向量的认识还只停留在图形表示上，这对于研究向量和利用向量去解决其它实际问题是很不方便的，下面我们引进向量的坐标表示.

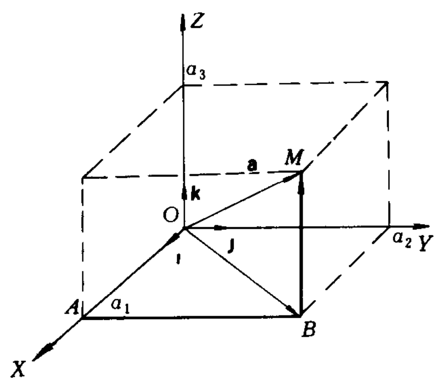


图 9-2-10　向量的坐标

在空间直角坐标系中，以原点为始点，而终点分别为点（1，0，0），（0，1，0），（0，0，1）的三个单位向量，相应地记作 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，称为该坐标系的**基本单位向量**.

对于任意一个向量 $\boldsymbol{a}$，先将其平移使其始点落在原点 O，设此时 $\boldsymbol{a}$ 的终点为 M（a_1，a_2，a_3），即 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$，如图 9-2-10 所示．并设点 A（a_1，0，0），B（a_1，a_2，0），根据向量加法，显然有

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}$$

而

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$$

∴　$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$$

再由数乘向量的定义及

$$\overrightarrow{OA}//\boldsymbol{i},\ \overrightarrow{AB}//\boldsymbol{j},\ \overrightarrow{BM}//\boldsymbol{k}$$

知

$$\overrightarrow{OA}=a_1\boldsymbol{i},\ \overrightarrow{AB}=a_2\boldsymbol{j},\ \overrightarrow{BM}=a_3\boldsymbol{k}$$

于是有

$$\overrightarrow{OM}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$$

可以看出上式中三个系数（a_1，a_2，a_3）正好是点 M 的坐标．由于任意向量 $\boldsymbol{a}$ 都可将其平移成始点在原点 O 的向量$\overrightarrow{OM}$，故将构成点 M 坐标的一组有序实数（a_1，a_2，a_3）定义为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标．

向量的坐标表示法有两种写法：一种是

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$$

这种写法比较清楚但稍繁一些；

第二种是较简单地写成

$$a=(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3)$$

这种写法需要从上下文来判断其表示的是否是向量，以免与点的坐标混淆．其实，向量的坐标与点的坐标有着密切的关系．向量$\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$称为点 $\boldsymbol{M}$ 的**向径**（或**矢径**）．从图 9-2-10 可见，向量$\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$的坐标与点 $\boldsymbol{M}$ 的坐标相同，即一点的坐标与该点的向径的坐标相同．或者换一个说法，当一个向量始点在原点时，向量的坐标就是其终点的坐标．

至于始点不在原点时向量的坐标与始、终点的坐标的关系将在下面讨论．

用向量的坐标很容易表示向量相加、相减和数乘向量．

设

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$$

则由数乘向量的运算规律及向量加法运算规律易知

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1)\boldsymbol{i}+(a_2+b_2)\boldsymbol{j}+(a_3+b_3)\boldsymbol{k} \tag{9-2-4}$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1)\boldsymbol{i}+(a_2-b_2)\boldsymbol{j}+(a_3-b_3)\boldsymbol{k} \tag{9-2-5}$$

即向量之和(差)的坐标等于它们对应坐标之和(差)

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})=\lambda a_1\boldsymbol{i}+\lambda a_2\boldsymbol{j}+\lambda a_3\boldsymbol{k} \tag{9-2-6}$$

即数乘向量的坐标等于该数乘以这个向量的每一个坐标．