中等专业学校工科类试用教材

数学

（应用部分）

上

川、陕、黔工科类中专数学编写组

四川科学技术出版社

中等专业学校工科类试用教材

数学

（应用部分）

上

川、陕、工科黔类中专数学编写组 编

四川科学技术出版社

1991年·成都

(川)新登字004号

责任编辑：洪荣泽
封面设计：李焕伦
技术设计：安小望
责任校对：戈　木　刘生碧

中等专业学校工科类试用教材　数　学
（应用部分　上册）

川、陕、黔工科类中专数学编写组　编

四川科学技术出版社出版　（成都盐道街三号）
四川省新华书店经销　德阳新华印刷厂印刷
开本 787×1092毫米 1/32　印张 7.25　字数 154 千
1991年11月第1版　1991年11月第1次印刷　印数 1—9000册

ISBN 7-5364-2032-3/G·475(课)　定　价：2.40元

编 者 的 话

本教材由四川、陕西、贵州三省中专数学协作组工科类教研联组，在川、陕、黔三省教委职教处领导和支持下，根据《中等专业学校数学教学大纲》（工科类通用）审定稿（1990.12）编写的，全书分基础部分（上、下）和应用部分(上、下)四册，由周世武任主编，孙立绪、韩梅生、黄开明任副主编。

应用部分上册为排列与组合、概率论与数理统计初步、行列式与矩阵，由韩梅生任主编、黄英娴、张博厚任副主编，周国本、史安祥、徐大利参加编写工作，杨志新、吕振宇参加统稿。该书由蔡国才、陈国瑞任主审，谭洪坤任副主审，勾铁力、王德安、汪克力、谢良、刘荣生、熊寿刚、康果参加审稿。

本书紧密围绕工科类中专的培养目标和专业特点，编写内容注意削枝强干，文字力求简明，在不影响数学知识体系的前提下，适当降低理论要求。本书各部分的内容，可供教师根据专业的特点和课时的安排选用，并加强有关例题和习题的选配，以期在数学理论和实践的结合上具有较显著的特色。

本书在编写过程中，得到了四川省计经委教育处、重庆市教委职教处、成都市工业学校、涪陵工业学校、成都保险学校、贵州省建材工业学校、陕西省财经学校的大力支持和协助，谨在此表示衷心的感谢。

由于编者的水平有限和时间仓促，错误和不当之处在所难免，恳请师生批评指正，以便我们今后进一步修订改进。

川、陕、黔中专数学协作组工科类联组

1991.5

目　　录

第十六章　排列　组合和二项式定理

排列、组合在许多实际问题中有着广泛的应用，它是学习概率和数理统计等数学知识的基础。本章将介绍排列、组合的概念、计算方法以及二项式定理。

§16-1　两个基本原理

先看下面的例子：

例1　从甲地到乙地，可以乘火车，也可以乘汽车或轮船。如果每天火车有4班次，汽车有3班次，轮船有2班次，问从甲地到乙地每天共有几种不同的走法？

解　因为从甲地到乙地既可以坐火车，也可以乘汽车或轮船，采用这三类方法中的任何一个班次都能实现从甲地到乙地的目的，所以一天中共有

$$4+3+2=9\text{(种)}$$

不同的走法。

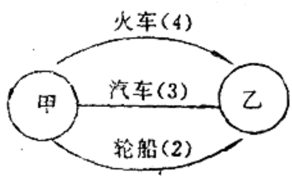

图16—1

一般地，有下面的原理：

加法原理(addition principle)　完成一件事，有k类方式，第一类中有n_1种不同方法，第二类中有n_2种不同方法，…，第k类中有n_k种不同方法，那么完成这件事共有

$$N=n_1+n_2+\cdots+n_k$$

种不同方法.

例2 某人从甲地经过乙地到丙地，假定从甲地到乙地有3条路径，从乙地到丙地有2条路径. 问从甲地经过乙地到丙地共有多少种不同的路径？

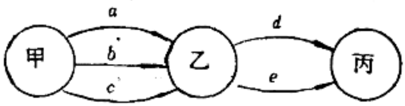

图16—2

解 因为从甲地到丙地必须分两步走，第一步从甲到乙可以有三种不同的路径. 当选定一种走法后，第二步从乙到丙又有二种不同的路径. 所以，从甲到丙共有

$$3\times2=6\text{（种）}$$

不同的路径. 它们是

$$a\begin{cases}d\\e\end{cases}\qquad b\begin{cases}d\\e\end{cases}\qquad c\begin{cases}d\\e\end{cases}$$

即a,d；a,e；b,d；b,e；c,d；c,e共六种.

一般地，有下面的原理：

乘法原理(multiplication principle) 如果完成一件事，必须经过k个步骤. 完成第一步有n_1种方法，完成第二步有n_2种方法，…，完成第k步有n_k种方法，那么完成这件事共有

$$N=n_1\times n_2\times\cdots\times n_k$$

种不同的方法.

习题 16-1

1. 从甲城到乙城，可乘火车，可乘汽车，也可乘轮船．每天中，火车有16班次，汽车12班次，轮船5班次．问乘坐不同的火车、汽车、轮船共有几种走法？

2. 某人从学校出发，经过甲地、乙地到丙地，学校到甲地有三种走法，甲地到乙地有两种走法，乙地到丙地有两种走法．问从学校经甲、乙两地到丙地共有多少种不同的走法？

3. 信号弹有红、黄、绿三种颜色，按不同顺序向天空连发三枪，一共可发出多少种不同的信号？

4. 一个口袋内装有5个小球，另一个口袋内装有4个小球，所有这些小球的颜色都不相同．(1) 从两个口袋内任取一个小球，有多少种取法？(2) 从两个口袋内各取一个小球，有多少种取法？

§16-2 排 列

一、排 列

先看下面的例子

1. 在西安、武汉、广州间的民用航空线上，需要准备多少种不同的飞机票？

这个问题就是从西安、武汉、广州三个民航站中，每次取两个，按照起点站在前，终点站在后的顺序去排，问共有多少种不同的排法．

完成上述问题可分两个步骤：

（1）首先在三个站中任选一个作起点站，共有3种方法；

（2）当选定一个起点站以后，再在余下的两个站中选取一个作为终点站，共有2种方法。

根据乘法原理，完成上述排法共有 $3\times2=6$（种），也就是说，需要准备6种不同的飞机票：

起点站：　西安　　　　武汉　　　　广州

终点站：武汉　广州　西安　广州　西安　武汉

2．从分别写有数字1，2，3，4的四张卡片中，每次取出三张，可排出多少个不同的三位数？

这个问题就是从1，2，3，4四个数字中，每次取出三个按照百位、十位、个位的顺序来排，求共有多少种不同的排法？

排出上述三位数可分为三个步骤：

（1）先在1，2，3，4四个数字中任选一个，作为百位数字，共有4种方法；

（2）当百位数排定后，从余下的3个数字里，任选一个作为十位数字，共有3种方法；

（3）当百位、十位数字排定后，个位数只能从余下的两个数字中取一个，共有2种方法。

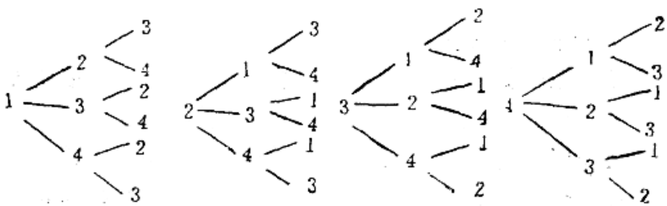

图16—3

根据乘法原理，排成三位数的方法共有：$4\times3\times2=24$

种．即可以排成24个不同的三位数．

一般地，我们把被取的对象（如上面问题中的民航站、数字等）称为**元素**．第一个问题，就是从3个不同的元素中每次取出2个元素，按照一定的顺序排成一列，求共有多少种不同的排法．第二个问题，就是从4个不同的元素中，每次取出3个元素，按照一定的顺序排成一列，求共有多少种不同的排法．

定义 从n个不同的元素中，任取m个不同的$(m\leqslant n)$元素，按照一定的顺序排成一列，称为从n个不同的元素中每次取出m个元素的一个**排列**(permutation)．

当$m<n$时，所得的排列称为**选排列**(selection permutation)．

当$m=n$时，所得的排列称为**全排列**(completely permutation)．

二、排列种数的计算公式

从n个不同元素中每次取出m个$(m\leqslant n)$元素的所有排列的个数，称为从n个不同的元素中取出m个元素的**排列种数**，记作P_n^m，当$m=n$时，即全排列种数P_n^n简记为P_n．

求排列的种数，我们可以这样考虑：设有排好顺序的m个空位，从n个不同的元素$a_1,a_2,a_3,\cdots$，a_n中任取m个去填空，一个空位填一个元素，每一种填法就得到一个排列，因此所有不同填法的种数就是排列种数P_n^m．

如图16—4所示，第一个空位从n个元素中任选一个填上，有n种填法；第二个空位只能从余下的$(n-1)$个元素中任选

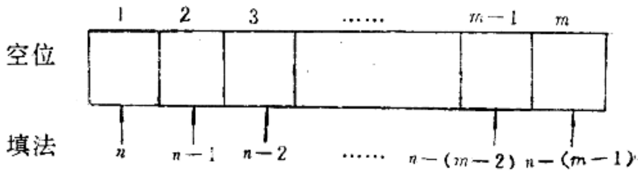

图16—4

一个填上，有$(n-1)$种填法；依此类推，当前面的$m-1$个空位填好后，第m个空位只能从余下的$[n-(m-1)]$个元素中任选一个填上，有$(n-m+1)$种填法．根据乘法原理，全部填满m个空位有

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-m+1)$$

种填法．所以排列种数公式为

$$\boxed{P_n^m=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-m+1)} \qquad (16\text{—}1)$$

当$m=n$时，就得到n个不同元素的全排列种数公式：

$$\begin{aligned}P_n&=n\cdot(n-1)(n-2)\cdots(n-n+1)\\&=n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1.\end{aligned}$$

连乘积$1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)\cdot n$用符号$n!$表示，读做$n$的阶乘．所以，$n$个不同元素的全排列种数公式可写成

$$\boxed{P_n=n!} \qquad (16\text{—}2)$$

排列种数公式还可以写成下面的形式：

$$\begin{aligned}P_n^m&=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)\\&=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)\cdot(n-m)\cdots3\cdot2\cdot1}{(n-m)\cdots3\cdot2\cdot1}\end{aligned}$$

$$=\frac{n!}{(n-m)!}.$$

为了使$m=n$时上式也能成立，我们规定

$$0!=1.$$

例1 计算P_9^6及P_7.

解 $P_9^6=9\times8\times7\times6\times5\times4=60480$;

$P_7=7!=7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=5040$.

例2 求证：$m\cdot P_n^{m-1}+P_n^m=P_{n+1}^m$.

证

$$\begin{aligned}m\cdot P_n^{m-1}+P_n^m&=m\cdot\frac{n!}{[n-(m-1)]!}+\frac{n!}{(n-m)!}\\&=\frac{n!(m+n-m+1)}{(n-m+1)!}\\&=\frac{(n+1)!}{[(n+1)-m]!}=P_{n+1}^m.\end{aligned}$$

例3 一条铁路上有8个车站，共需准备多少种普通客车票？

解 因为每一种车票只能适用于从一个车站到另一个车站，所以这个问题可以归结为从8个元素中每次取出2个元素的排列问题．排列种数为 $P_8^2=8\times7=56$.

即 共需准备56种普通客车票．

例4 用三面颜色不同的旗，按不同次序挂在一根竖直的旗杆上表示信号，可以用一面、二面或三面，一共可以得到几种不同的信号？

解 我们将信号分为三类，它们分别是由一面、二面、三面彩旗组成的信号．用一面旗做成的信号有P_3^1种，用二

面旗做成的信号有 P_3^2种，用三面旗做成的 信 号 有P_3^3 种

根据加法原理，所求的信号种数是：

$$P_3^1+P_3^2+P_3^3=3+3\times2+3\times2\times1=15.$$

即 一共可以得到15种不同的信号.

例5 用0到9这10个数字可以排成多少个没有重复 数 字的三位数？

解法一 分两步来排，先排第一位(即百位数字). 因为0不能排在第一位，所以从0以外的其他9个数字里每次取出1个排在第一位，排列的 种 数 为 P_9^1；然后在余下的9个数字(包括 0) 每次取出 2 个排在第二、第三位，排列的种数为 P_9^2，根据乘法原理，得到所求的三位数的个数是：

$$P_9^1\cdot P_9^2=9\times9\times8=648(\text{个}).$$

解法二 所求三位数可分为两类：

第一类是不含数字0的三位数有 P_9^3个. 第二类是含数字0的三位数：个位数字为0的三位数有 P_9^2个；同理，十位数字为0的三位数也有 P_9^2个，所以含数字0的三位数 有 $2P_9^2$个. 根据加法原理，符合条件的三位数有

$$P_9^3+2P_9^2=648(\text{个}).$$

解法三 从这10个数字里每次取出 3 个数字的排列种数为 P_{10}^3，应去掉0为百位数的“三位数”的个数 P_9^2. 因 此所求的三位数有

$$P_{10}^3-P_9^2=10\times9\times8-9\times8=648(\text{个}).$$

这种方法就是在不加限制条件的排列种数中减去不符合条件的排列种数，得到符合条件的排列种数.

三、重复排列

在以上的排列问题中，每一种排列中的元素不允许有重复. 但在某些情况下，可以允许重复，例如电话号码就允许数字重复. 元素可以重复选取的排列称为**重复排列**（repeated permutation）.

例6 由数字1,2,3,4能组成多少个数字可以重复的不同的三位数？

解 排出符合题意的三位数可以分三个步骤完成：

（1）从1,2,3,4中任取一个数字作为百位数，有 $P_4^1=4$ 种取法；

（2）在百位数字确定后，由于数字可以重复，所以十位数字仍是从1,2,3,4中选取一个，仍有 $P_4^1=4$ 种取法；

（3）在十位数字确定后，由于数字可以重复，个位数字仍是从1,2,3,4中选取一个，也有 $P_4^1=4$ 种取法.

根据乘法原理，符合题意的三位数的个数是

$$4\times4\times4=4^3=64.$$

一般地，从 n 个不同的元素中，任取可以重复的 m 个元素的排列种数 N 的计算公式为：

$$\boxed{N=n^m} \tag{16—3}$$

其中 n 为可以重复选取的元素的个数，m 为每个元素最多可重复的次数.

例7 以277为首的六位数电话号码，最多有几个？

解 符合题意的电话号码的形式为“277×××”，后三个数字从0,1,2,…,9十个数字中选取，所以公式(16—3)中$n=10$；而每个数字最多可重复三次 即$m=3$；所以符合题意的电话号码的个数是$N=10^3=1000$.

习题 16·2

1．计算：

(1) P_8^3；　　(2) $9P_8^4-2P_8^5$；

(3) $P_4^1+P_4^2+P_4^3+P_4$；

(4) $\dfrac{P_8^5+P_8^4}{P_9^5-P_9^4}$；　　(5) $\dfrac{P_5-P_5^2}{5}$

2．求证：

(1) $P_2+P_3^2+P_4^2=P_5^2$；　(2) $P_{n+1}-P_n=n^2\cdot P_{n-1}$；

(3) $\dfrac{(n+1)!}{k!}-\dfrac{n!}{(k-1)!}=\dfrac{(n-k+1)\cdot n!}{k!}$.

3．解方程：

(1) $P_n^2=30$；　　(2) $P_n^2=56n$；

(3) $P_n^5+P_n^4=4P_n^3$.

4．一条铁路沿线共有20个车站，需要准备多少种客车票？

5．8个人组成一排，有几种不同的排法？

6．由1,2,3,4,5,6六个数字，能组成多少个没有重复数字的四位数？能组成多少个没有重复数字的六位数？

7．由0,1,3,5,7,9六个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数？

8．有8个不同的产品，每次取1件，连续取三次．

(1) 每次取出一件产品，不再放回，有几种取法？

(2) 每次取出一件产品，取后放回，有几种取法？

§16-3 组 合

一、组 合

看下面的例子：

(1) 在西安、武汉、广州三个民航站之间的直达航线上，有几种不同的飞机票价？

我们知道，飞机票的种数与起点站，终点站的顺序有关，从西安到武汉和从武汉到西安应当准备两种不同的飞机票．但是，飞机票的票价与起点站、终点站的顺序无关，只和起点站到终点站间的距离有关．从西安到武汉和从武汉到西安，飞机票价是一样的．因此，当三个站的距离两两不相等时，票价的种数只有票的种数的一半，即有$\frac{1}{2}\times P_3^2=3$种不同的票价．

(2) 袋中有四个球，上面分别标有1,2,3,4四个号码，从袋中任取三个球，问有多少种不同的取法？

显然，取到1,2,3号三个球与取到1,3,4号三个球是不同的取法，但取到1,2,3号三个球与取到1,3,2号三个球是同一种取法，即抽取的结果与取到的球有关而与球被取的顺序无关．对于这类问题，我们有如下定义：