

采矿系统工程

云庆夏 主编



陕西科学技术出版社

(陕)新登字第 002 号

采 矿 系 统 工 程

云庆夏 编著

陕西科学技术出版社出版发行

(西安北大街131号)

西安冶金建筑学院印刷厂印刷

787×1092毫米 16开本 9.5 印张 20万字

1993年11月第1版 1993年11月第1次印刷

印数: 1—1500

ISBN 7-5369-1909-3/TD·12

定 价: 5.85元

前 言

采矿系统工程是一门新兴的学科，它将运筹学、计算机科学等现代科学技术用于采矿工业，促使矿山的设计、生产和管理处于最优状态。目前，它已在采矿工业中发挥了巨大的作用，受到工程技术人员的普遍重视。

从1985年起，我们先后给西安冶金建筑学院采矿专业历届本科生开设了“采矿系统工程”课程，作为《矿业运筹学》课程的后续课，并编写了相应的讲义。1992年5月，在西安召开有冶金、化工、黄金系统高等学校参加的“采矿系统工程教学研讨会”，会议明确了本门课程的教学目的和教学内容，根据会议精神，我们修改原有的讲义，编写出本书。

采矿系统工程应用的范围很广，涉及到的学科也很多，本书只介绍其中比较实用而又成熟的课题。本书共分8章，分别介绍矿山设计、生产和管理中常用的优化技术。全书大约需要40学时的教学时间。某些叙述性的内容，可由学生课余自学。

本书由云庆夏主编，刘积学、陈永锋参加编写，由于作者水平有限，书中缺点和错误在所难免，恳切地希望读者指正。

编 者

1992年10月

目 录

第1章 绪 论

- § 1.1 系统与系统工程..... (1)
- § 1.2 系统工程的基本方法..... (2)
- § 1.3 采矿系统工程..... (3)

第2章 矿山预测技术

- § 2.1 概述..... (6)
- § 2.2 定性预测..... (7)
- § 2.3 因果关系预测..... (8)
- § 2.4 投入产出分析..... (13)
- § 2.5 时间序列预测..... (18)

第3章 矿山多目标决策

- § 3.1 概述..... (27)
- § 3.2 理想点法..... (28)
- § 3.3 层次分析法..... (32)

第4章 矿山计算机模拟

- § 4.1 基本原理..... (38)
- § 4.2 随机分布的确定..... (40)
- § 4.3 随机数的产生..... (46)
- § 4.4 随机变量的产生..... (48)
- § 4.5 模拟的方法..... (52)
- § 4.6 模拟结果的分析..... (61)

第5章 矿床模型与地质统计学

- § 5.1 矿床模型..... (64)
- § 5.2 地质统计学..... (71)

第6章 露天开采系统的优化

- § 6.1 露天开采境界的优化..... (82)
- § 6.2 露天采剥进度计划的优化..... (93)
- § 6.3 计算机辅助设计..... (100)

第7章 地下开采系统的优化

- § 7.1 采矿方法选择的优化..... (112)
- § 7.2 开拓方法选择的优化..... (117)
- § 7.3 采掘进度计划的优化..... (121)

第 8 章 矿山管理信息系统

§ 8.1 基本概念	(125)
§ 8.2 管理信息系统分析	(129)
§ 8.3 管理信息系统设计	(138)
§ 8.4 管理信息系统实施	(143)

第1章 绪 论

§ 1.1 系统与系统工程

1.1.1 系统的概念

无论自然界或社会里，系统是普遍存在的。一切事物既自成系统，又互成系统。一般地说，系统具有下述特征：

1. 整体性

系统总是由两个或更多个要素按照一定的结构方式结合起来，形成一个整体。

2. 层次性

任何系统的结构总是具有层次性，一个系统由若干子系统组成，它又从属于某个更大的系统。

3. 相关性

系统的各要素是相互联系、相互影响、相互制约的，从而持有某种特定的功能。

4. 目的性

系统具有一定的目的，并按照这一目的将各个要素组合起来。

5. 环境适应性

任何一个系统都处在一定的环境中，与外界环境不断进行物质、能量、信息、人员的交换。随着环境的变化，系统能够作出及时的和正确的响应。

6. 运动性

系统永远处于运动中，系统都有输入、输出及反馈，形成系统的流。

1.1.2 系统的概念

系统工程一词出现于40年代，关于系统工程这门学科的定义，至今还没有统一，今按时序列举如下：

“系统工程是为了更好地达到系统目标，而对系统的构成要素、组织结构、信息流动和控制机构等进行分析与设计的技术”（1967年日本工业标准JIS8121规定）。

“系统工程是应用科学知识设计和制造系统的一门特殊工程”（1969年美国质量管理学会系统工程委员会）。

“系统工程是一门把已有的学科分支中的知识有效地组织起来用以解决综合性的工程问题的技术”（1974年《大英百科全书》）。

“系统工程研究的是怎样选择工人和机器最适宜的组合方式以完成特定的目标”（1975年《美国百科全书》）。

“系统工程是一门研究复杂系统设计、建立、试验和运行的科学技术”（1976年《苏联大百科全书》）。

“系统工程是组织管理系统的规划、研究、设计、制造、试验和使用的科学方法，是一种对所有系统都具有普遍意义的方法”（1978年钱学森等）。

综上所述，系统工程是一门综合性的科学技术，它以大型的复杂系统为研究对象。有目的地发挥各组成部分的功能，以期达到总体最优的效果。

§ 1.2 系统工程的基本方法

系统工程的基本方法包含系统思想部分和技术方法部分。

1.2.1 系统思想

系统思想是人们运用系统概念和观点去分析和处理各种与系统有关的问题的一种思想方法。一般说来，系统思想可以归纳成如下几个方面。

1. 总体思想

在开发一个系统时，把直接要开发的对象称作“内部系统”，而把围绕该对象系统的各种环境条件和其它因素称作“外部系统”。两者的结合称为总体系统。通常，把外部系统对内部系统的影响称作“输入”，把内部系统对外部系统的影响称作“输出”。系统工程的特征之一，就是从总体系统出发来开发内部系统。

2. 总体最优思想

系统工程的基本任务是开发最优的系统。这里所指的“最优”，是系统总体最优而不是局部最优。为此，首先必须目标定向，确定具体目标，并建立相应的评价体系。然后，采用各种优化技术，寻求满足这一目标的最优方案。

3. 组合思想

系统由各种具有一定功能的要素所组成。因此，必须合理选择有关要素，使之能满足预定的系统目标，又可减少不必要的要素。一般说来，要尽可能使各要素标准化、通用化，以节约系统的开发时间和费用。

4. 分解和协调思想

大系统具有结构复杂的特点。因此，可以将其分解成结构较为简单而又相互关联的若干子系统。正确处理各子系统之间的相互关系，并协同完成大系统的任务，这就是协调。分解和协调主要是用来处理系统要素间的关联变化。

5. 反馈思想

反馈是“控制论”中的重要概念之一，它把偏离目标的信息反馈给系统的控制装置，以决定下一阶段的系统行为使其能正确无误地达到目标。目前，反馈思想已成为系统工程的一种基本思想。

1.2.2 系统工程的方法步骤

工程实施过程和基本内容，可以用霍尔（A·D·Hall）建议的“系统工程形态图”表示如图 1-1。

三维图中的时间维表示系统工程活动按时间顺序的工作阶段，即：

- （1）规划阶段。按系统的要求和目的，提出活动的战略。
- （2）拟订方案阶段。提出具体的方案。
- （3）研制阶段。对方案进行分析、研究和优化。

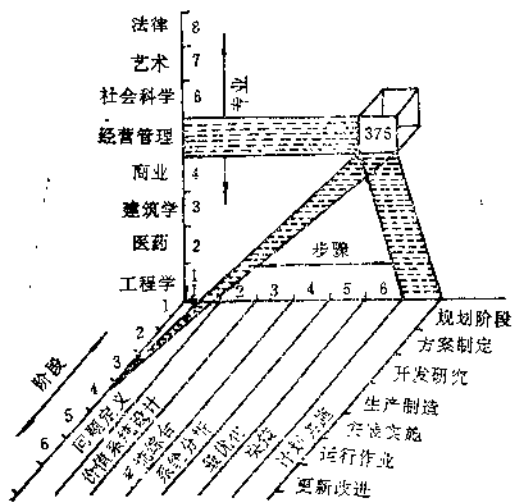


图 1-1 系统工程形态图

(4) 生产阶段。制造系统的零部件。

(5) 安装阶段。对系统进行组装。

(6) 运行阶段。将系统交付使用。

(7) 更新阶段。对系统加以改进、完善、或者代之以新系统。

三维结构中的逻辑维表示每个工作阶段的思维过程，可分成 7 个步骤：

(1) 明确问题。收集资料，搞清问题实质。

(2) 系统指标设计。选择评价系统功能的价值准则和指标，用以衡量系统。

(3) 系统方案组合。形成一组可供选择的方案。

(4) 系统分析。分析各种可能入选的方案。

(5) 系统选择。选择出较优方案。

(6) 决策。在综合评价的基础上选出最优方案。

(7) 实施计划。将系统具体实施。

三维结构的知识维是完成上述各阶段、各步骤所需要的知识，它包括社会科学、工程技术、法律、医学……等。在工程技术中除了使用各专业工程自身的理论技术外，还包括：

(1) 运筹学。它在既定条件下对系统进行全面安排，以期达到最优的目的。

(2) 概率论与数理统计。它研究大量偶然事件的基本规律及收集、分析和整理其有关数据。

(3) 计算机科学。指电子计算机、计算方法及其应用技术。

(4) 控制论。它是研究系统中信息的传输、反馈、控制和系统优化的理论。

(5) 信息论。它是研究信息的提取、传递变换、存储和流动的学科。

(6) 系统论。它是研究系统的基本概念、基本性质以及系统进化的一般规律。

§ 1.3 采矿系统工程

采矿系统工程就是用系统工程的理论和方法去解决采矿系统各个阶段中的设计、生产和管理的优化问题。

众所周知，采矿工业是原材料工业，它的产品结构难于随市场的变化而调整；矿山建设过程中投资大、周期长、涉及的部门也多；矿山生产条件复杂，受许多不定因素的影响。因此，矿山是一个庞大的复杂系统，有必要运用系统工程的观点，使用运筹学和计算机技术，深入研究采矿过程的各个环节及它们之间的相互关系，为最优决策提供必要的依据。

早在1950年加拿大的一个地下铅锌矿就首次使用IBM360/44计算机。1961年,在美国召开了第一届计算机和运筹学在矿业中的应用会议(APCOM),促使采矿系统工程成为一门独立的学科。在50年代,我国也有人提出这方面的问题,但一直到70年代,才大规模开展这项工作。近年来,国内外在这一领域中进行了大量的工作,并取得丰硕的成果。概括起来,当前采矿系统工程的工作内容有:

1.3.1 矿山地质工作的优化

1. 边界品位理论

通常,它考虑了投资的时间价值,逐年地圈定矿体。

2. 地质资源评估

它常常采用插值法或拟合法推断矿体的轮廓,计算矿石储量及质量的分布。

3. 地质统计学

它综合运用概率论和数理统计学,科学地推断矿床中主要组分的分布。

4. 矿床模型

将各种地质信息数据化,便于用计算机处理。

5. 矿石质量中和

常常采用线性规划等方法进行配矿,充分利用矿山资源。

1.3.2 矿山设计工作的优化

1. 矿山总体规划

它经常采用线性规划、混合整数规划及投入产出法,综合安排各矿区的建设顺序及生产规模。

2. 矿山生产能力

它综合考虑投资及生产成本,使矿山的规模最合理。

3. 露天开采境界

它深入研究矿床中每一小块的开采效益,合理地确定露天开采境界。

4. 矿山采掘进度计划

通常,它运用数学规划、计算机模拟及CAD技术,寻求最佳的采掘工作顺序。

5. 矿山开采设备

通常,它要充分考虑生产中的各种随机因素,合理地确定设备的类型和数量。

6. 矿山开拓运输系统

它要根据专家的经验,综合考虑矿石、岩石、材料以及人员、风流的输送,合理地确定矿山开拓系统。

7. 采矿方法

它是在方案优化、结构优化及参数优化的基础上,确定合理的采矿方法。

8. 矿井通风

它运用网络技术及其它优化技术,使通风系统的设计、运行和控制更加合理。

9. 矿山安全

它运用概率统计、预测技术及专家系统等科学手段,对矿山安全工作进行科学管理。

10. 矿山投资风险分析

它往往采用计算机模拟及概率统计等技术,预测和分析矿山投资的效果。

11. 计算机辅助设计

它将计算机的高速运算能力和设计者的经验智慧综合在一起,科学地进行各项工程设计。

12. 矿山总图布置

它往往运用数学规划和网络技术,合理布置各种工业场地和设施。

1.3.3 矿山管理工作的优化

1. 矿山管理信息系统

它应用数据结构、数据库等信息技术,采集、加工及反馈矿山生产中的各种信息。

2. 矿山生产计划

它常常运用线性规划等方法,合理安排矿山年、季、月、周、日的生产计划。

3. 矿山施工组织

它往往采用统筹方法,合理地组织人力、物力及财力。

4. 矿山生产过程控制

它利用传感技术、信息论、控制论等技术,使矿山生产处于最佳状态。

5. 矿山生产工艺过程

它往往采用计算机模拟、数学规划、CAD 技术手段,使矿山各生产环节充分发挥效率。

6. 矿山维修管理

它常常运用可靠性理论、动态规划和随机过程等方法,科学地组织设备的维修和更新。

7. 全面质量管理

它运用数理统计技术,严格控制矿山生产各环节的质量。

8. 矿山预测技术

它通过因果分析和时间序列分析等数学方法,预测矿山各种技术经济指标。

9. 矿山库存控制

它常常采用库存论及数据库技术,合理控制矿山零部件及材料的库存。

10. 矿山企业经济活动分析

它经常采用数理统计及各种经济理论,研究矿山的经济效果。

总之,采矿系统工程的范围很广,涉及到的学科也很多,本书限于篇幅,仅介绍目前比较成熟的几个课题。

[小 结]

· 系统工程是一门综合性的科学技术,它以大型的复杂系统为研究对象,有目的地发挥各组成部分的功能,以期达到总体最优的效果。

· 系统工程的工作过程包括问题定义、系统分析、系统设计、系统实施等步骤。

· 采矿系统工程是用系统工程的理论和方法去解决采矿系统的设计、生产和管理的优化问题。

第2章 矿山预测技术

预测是对事物的未来,进行科学的预计和推测,探索事物未来的发展趋势,使人们产生有目的之行为。例如,矿山要估计下一年度(季度)的材料消耗,以便及时订货;安全部门要对各种事故进行预测,以便及时采取措施。本章将就定性预测、因果关系预测,投入产出分析和时间序列法等进行阐述。

§ 2.1 概 述

预测作为一门科学始于40年代,从50年代以后得到广泛应用和发展。

2.1.1 预测的基本原理

在实际进行预测时,人们往往借助于以下几条原则:

1. 惯性原则

可以说,没有一种事物的发展会与其过去的行为没有联系。过去的行为不仅影响到现在,还会影响到未来。这表明,任何事物的发展都带有一定的延续性。这个特点被称为“惯性”。惯性越大,表示过去对未来的影响越大,说明收集过去所得到的信息对研究未来越有帮助;惯性越小,则表示过去对未来的影响越小。

2. 类推原则

许多事物相互之间在发展变化上常有类似的地方。利用事物与其它事物在表现形式上有相似之处的特点,有可能对事物进行预测。利用类推原则进行预测,首要的条件是两事物之间的发展变化具有类似性。否则,就不进行类推。

3. 相关原则

任何事物的发展变化都不是孤立的。都与其它事物的发展变化相互联系、相互影响。这种相关性有多种表现形式,其中最重要的是因果关系。它的特点是原因在前,结果在后,并且原因和结果之间常常具有类似函数关系的密切联系。这就为利用因果关系建立模型进行预测提供了方便。

4. 概率推断原则

由于各种因素的干扰,常常使事物的未来表现呈随机变化的形式。所谓概率原则,就是当推断预测结果能以较大概率出现时,就认为这个结果是可用的。

2.1.2 常用的预测方法

预测方法可分为定性预测和定量预测两大类。前者是依据人的经验和主观判断,直接获得结果,后者是根据过去的资料建立数学模型,然后进行数量化预测。

在定量预测中,可粗略划分为因果关系预测和时间序列预测两大类。前者包括回归分析法,投入产出分析和经济计量模型预测;后者有确定型时间序列预测和随机型时间

序列预测两类。在确定型中又包含有移动平均法和指数平滑法，在随机型中则包含有自回归法、移动平均法和自回归移动平均法。

就预测的时间期限分，预测分长期预测、中期预测和短期预测。但期限划分的标准很不统一，通常五年以上的属于长期预测，三年左右为中期预测，一年以下者属于短期预测。

§ 2.2 定性预测

定性预测是依靠人的主观经验和综合分析能力，对未来事物的发展远景作出判断。这类方法简单易行，应用较久，是迄今仍占有重要地位的传统方法。

德尔菲法 (Delphi Technique) 是这类方法的一个代表。据说，德尔菲是古希腊传说中的神谕之地，城中有座阿波罗神殿，可以预卜未来，故借用其名。这种方法最早由美国兰德公司应用于技术预测，现已发展成为应用十分广泛的预测方法。

概述地说，德尔菲法就是函询调查法，即将所要预测的问题和必要的背景材料，用通信的形式向专家们提出，得到答复后，把各种意见经过综合、归纳和整理后再反馈给专家，进一步征询意见，再次进行综合，整理再反馈，如此反复多次，直到预测的问题得到较为满意的结果。这种方法有两个特点：

1. 在调查过程中，专家互不见面，直接与评委会联系，因此可以消除相互间心理上的影响，做到自由充分地发表意见。

2. 采用一套科学的调查形式和综合整理的定量方法，统计分析每次调查的资料，力求包含所有专家的正确意见。

为了统计专家们的意见，可采用下述两种方法：

1. 主观概率法

本法由专家对某一方案作出概率估计，然后计算其数学期望值。

例如，10位专家对某项工程的成功概率估计是：3人认为是0.7，4人认为是0.6，2人认为是0.8，1人认为是0.2，则预测成功的平均概率是：

$$P = \frac{\sum_{i=1}^n P_i}{n} = \frac{3 \times 0.7 + 4 \times 0.6 + 2 \times 0.8 + 1 \times 0.2}{10} = 0.63$$

式中：n——专家人数，

P_i ——第*i*名专家估计的概率。

主观概率不同于统计概率，它不是根据实际统计资料算出来的，而是根据人们的经验主观判断的。

2. 记分法

本法由专家对各种方案给出评分，然后用下式计算：

$$W_j = \frac{L_j \sum_{i=1}^m X_{ij}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m X_{ij}}$$

式中: W_j ——第 j 方案的最终得分;

X_{ij} ——第 i 位专家给第 j 方案的评分;

m ——专家人数;

n ——方案数目;

L_j ——积极性系数, 即

$$L_j = \frac{m_j}{m}$$

m_j ——对方案 j 作出预测的专家数。

上式中, 积极性系数 L_j 的作用是减弱少数人评分的影响, 使结果充分反映多数人的意见。

§ 2.3 因果关系预测

因果关系预测的基本思想, 是寻找事物变化的原因及其结果, 然后根据历史数据确定这种因果关系, 当出现新的原因时, 便可预测出新的结果。例如, 矿山的盈利与矿石品位有关, 一旦建立了盈利与品位的相关关系, 便可根据新时期的品位预测矿山的盈利。

为了确定这种结果, 一般采用回归分析法。

2.3.1 一元线性回归预测

1. 回归方程

设 x 为自变量, y 为因变量, 根据历史资料, 有一组数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots (x_n, y_n)$, 在 $x-y$ 坐标系中绘出它们的对应点, 如图 2-1 所示, 这种图就称为散点图。

如果这些数据基本分布在一条直线附近, 我们就说 y 与 x 近似为线性关系, 即:

$$\hat{y} = a + bx \quad (2-1)$$

上式称为直线回归方程。其中 a 为常数项, 即回归直线在 y 轴上的截距, b 为斜率, 称为

回归系数, $\hat{y}$ 代表变量 y 的预测值。利用这一方程, 一旦知道 x , 即可预测出 y 。

2. 参数 a 、 b 的确定

根据历史数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots (x_n, y_n)$, 其中任意一点 (x_i, y_i) 的预测值为:

$$\hat{y}_i = a + bx_i$$

预测值 $\hat{y}_i$ 与实际值 y_i 之间的差值为 $(y_i - \hat{y}_i)$ 。若用这种差值的平方和代表总误差 Q :

$$Q = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2 \quad (2-2)$$

根据最小二乘法原理, 参数 a 、 b 的值应使总误差 Q 最小, 即:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial b} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i) = 0 \\ -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)x_i = 0 \end{cases}$$

解上述联立方程, 得

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x} \sum_{i=1}^n x_i} \quad (2-3)$$

$$a = \bar{y} - b \bar{x} \quad (2-4)$$

式中:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

3. 相关性检验

上述推导中, 假设 y 与 x 具有线性关系, 但是这种假设是否成立, 还要进行相关性检验。检验时, 根据相关系数 r :

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}} \quad (2-5)$$

由相关系数 r , 总误差 Q 可表示为:

$$Q = (1 - r^2) \sum (y_i - \bar{y})^2 \quad (2-6)$$

从公式 2-6, 可得出下列结论:

(1) 由于总误差 Q 是单个误差的平方和, 即 $Q \geq 0$, 所以 $(1 - r^2)$ 也要大于等于零, 即 $|r| \leq 1$ 。

(2) $|r|$ 愈接近 1, 说明 y 与 x 愈是线性相关。

(3) $|r|$ 愈接近 0, 则 Q 愈大, 说明 y 与 x 愈不是线性相关。

因此, 只有当 r 足够大时, 才可用回归直线来表示两变量间的线性关系。表 2-1 给出不同的 n 值 (数据点数) 及两种置信度 α 时相关系数 r 应达到的最小值。

在实际应用一元线性回归预测时, 首先要进行相关检验, 然后计算出参数 a 和 b , 最后再根据回归方程 (2-1) 预测, 其顺序恰好与上述叙述过程相反。

[例 2.1] 已知历史数据如下表所示

x_i	1.5	1.8	2.4	3	3.5	3.9	4.4	4.7	5
y_i	4.8	5.7	7	8.3	10.9	12.4	13.1	13.6	15.3

表2-1 相关系数检验表

$n-2$ \ α	0.05	0.01	$n-1$ \ α	0.05	0.01
1	0.997	1.000	21	0.413	0.529
2	0.950	0.990	22	0.404	0.515
3	0.878	0.959	23	0.396	0.505
4	0.811	0.917	24	0.388	0.496
5	0.754	0.874	25	0.381	0.487
6	0.707	0.834	26	0.374	0.478
7	0.666	0.798	27	0.367	0.470
8	0.632	0.765	28	0.361	0.463
9	0.602	0.735	29	0.355	0.456
10	0.576	0.808	30	0.349	0.449
11	0.553	0.684	35	0.325	0.418
12	0.532	0.661	40	0.304	0.393
13	0.514	0.641	45	0.288	0.372
14	0.497	0.623	50	0.273	0.354
15	0.482	0.606	60	0.250	0.325
16	0.468	0.590	70	0.232	0.302
17	0.456	0.575	80	0.217	0.283
18	0.444	0.561	90	0.205	0.267
19	0.433	0.549	100	0.195	0.254
20	0.423	0.537	200	0.138	0.181

可计算出:

$$\bar{x} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 x_i = 3.3556$$

$$\bar{y} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 y_i = 10.1222$$

首先, 进行相性检验, 得

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}} = 0.9927$$

$$\text{其中, } A = \begin{bmatrix} n & \sum x_{i1} & \sum x_{i2} & \cdots & \sum x_{im} \\ \sum x_{i1} & \sum x_{i1}^2 & \sum x_{i1}x_{i2} & \cdots & \sum x_{i1}x_{im} \\ \sum x_{i2} & \sum x_{i2}x_{i1} & \sum x_{i2}^2 & \cdots & \sum x_{i2}x_{im} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum x_{im} & \sum x_{im}x_{i1} & \sum x_{im}x_{i2} & \cdots & \sum x_{im}^2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_{i1}y_i \\ \sum x_{i2}y_i \\ \cdots \\ \sum x_{im}y_i \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a \\ b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

这样, 参数 $B = A^{-1}C$ (2-9)

对于二元回归方程:

$$\hat{y} = a + b_1x_1 + b_2x_2$$

可解出参数:

$$b_1 = \frac{\sum x_{i2}^2 \sum x_{i1}y_i - \sum x_{i1}x_{i2} \sum x_{i2}y_i}{\sum x_{i1}^2 \sum x_{i2}^2 - (\sum x_{i1}x_{i2})^2}$$

$$b_2 = \frac{\sum x_{i1}^2 \sum x_{i2}y_i - \sum x_{i1}x_{i2} \sum x_{i1}y_i}{\sum x_{i1}^2 \sum x_{i2}^2 - (\sum x_{i1}x_{i2})^2}$$

$$a = \bar{y} - b_1\bar{x}_1 - b_2\bar{x}_2$$

同样, 多元线性回归预测中也要作相关分析。由于计算复杂, 已超出本章内容。

2.3.3 非线性回归预测

在实际问题中, 有时因变量 y 和自变量 x 之间的关系是非线性的, 这时要采用非线性回归方法进行拟合。由于非线性回归比较复杂, 常通过变量变换, 设法把非线性问题化作线性问题来处理。

常见的非线性回归方法有:

1. 对数关系

当 y 与 x 的关系呈对数关系时:

$$\hat{y} = a + b \ln x$$

可令 $x' = \ln x$, 则上式变为:

$$\hat{y} = a + bx'$$

从而可以用一元线性回归方法处理。

2. 指数关系

当 y 与 x 的关系呈指数关系时:

$$\hat{y} = ae^{bx}$$

对等式左右两边取对数, 有

$$\ln \hat{y} = \ln a + bx$$