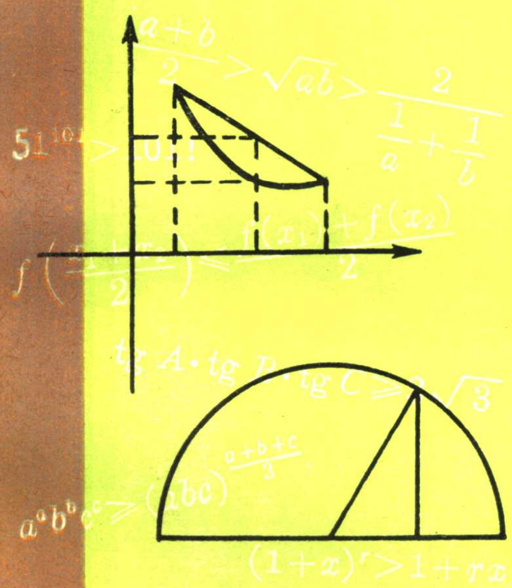
不等式的证明

中学生文库

ZHENG WENKU



上海教育出版社

不 等 式 的 证 明

吴承鄗　李绍宗

责任编辑　冯　贤
封面设计　范一辛

中学生文库　　不等式的证明
吴承鄞　李绍宗

上海教育出版社出版发行
(上海永福路123号)
各地新华书店经销　江苏海安印刷二厂印刷
开本 787×1092 1/32　印张 5.375　插页 2　字数 100,000
1987年3月第1版　1987年3月第1次印刷
印数 1—15,600本

统一书号：7150·3865　　定价：0.75元

前　言

在现实生活中有时会讨论这样的问题：用长度分别是a、b、c的铁丝各十二根，可以焊接成棱长分别是a、b、c的正方体各一个，也可以焊接成三个相同的长方体，使它们的长、宽、高分别等于a、b、c. 若a、b、c互不相等，试问是三个正方体的体积之和大，还是三个长方体的体积之和大？是三个正方体的表面积之和大，还是三个长方体的表面积之和大？

这个问题，通过体、面积计算，归结为在给定的条件下分别证明不等式

$$a^3+b^3+c^3>3abc;$$

$$6(a^2+b^2+c^2)>6(ab+bc+ac)$$

成立的问题.

又如，无理数e被定义为数列$\left\{a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$的极限，即$e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. 为了证明这个数列极限的存在，就需要用证明不等式的方法来证明数列递增而有界，从而断定

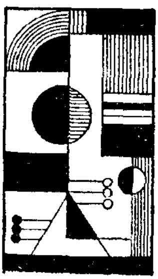
极限存在.

和不等式证明有密切联系的还有平均数. 其中象算术平均数、几何平均数等在日常生活、工作中都会接触到,例如,学校中最常用的"平均分数"就是各种分数的算术平均数. 在统计学中也经常用到幂平均、加权平均和加权幂平均数等. 例如考试质量分析就常用二次幂平均数 $\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$. 这些平均数之间存在的不等关系需要证明.

本书将对不等式证明的理论依据和思想方法作一些探索,介绍一些常用的证题思路和技巧,并且还提供一些深入研究不等式证明的有关知识. 本书对希望进一步钻研不等式证明的读者有所裨益.

试读结束,需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

目　录



一、证明不等式的意义和依据

我们知道，用不等号“$>$”或者“$<$”(包括“$\geqslant$”或“$\leqslant$”)连接两个代数式(或其它解析式)所成的式子叫做不等式.通常根据不等式对其字母成立的范围，分为以下几种:

绝对不等式:如不等式 $x^2+1>0$、$x+5>x+3$、$(a-b)^2\geqslant0$ 等，不论取什么数值代替不等式中的字母，它都能成立，叫绝对不等式.

条件不等式:如不等式 $a+1<0$、$3x\geqslant6$ 等，只能用某些范围内的数值代替不等式中的字母，它才能成立，叫条件不等式.

矛盾不等式:如不等式 $x^2+1<x^2$、$5<3$，不论用什么数值代替不等式中的字母，它都不能成立，叫矛盾不等式.

对于条件不等式的研究，通常是求不等式的解. 对于绝对不等式的研究，通常是证明这个不等式成立，也就是要证明给出的不等式对于式中字母的一切允许值一定成立，或是论证所给出的不等式在某些给定的条件下成立. 这就是所谓“证明不等式”.

证明不等式和解不等式是有区别的．在解不等式的过程中，每次对不等式进行变形都要注意变形前后的同解问题，它的着眼点是求出能使不等式成立的变量的取值范围．而证明不等式，只要设法从已知条件出发推证出所需的结果，不必考虑不等式变形前后的同解关系．但所证得的结论需对变量所取的一切允许值(或题设取值范围)都要成立，它的着眼点在于确认不等式的正确性．因此证明不等式和解不等式对于性质的用法和变形的方法不尽相同．例如，已知 $x>3$、$y>2$，在证明不等式时，可将同向不等式相加，得出 $x+y>5$，这个不等式显然是成立的．但从解不等式的意义上考虑，$x+y>5$ 却和不等式组 $\begin{cases}x>3,\\ y>2\end{cases}$ 不同解．例如，当 $x=6$、$y=1$ 时，$x+y>5$ 成立，而不等式组 $\begin{cases}x>3,\\ y>2\end{cases}$ 不能成立．又如，已知 $x-1>0$，求证 $x>0$ 是可以证得的：由 $x-1>0$，得 $x>1$，再由 $1>0$ 可得 $x>0$．然而不等式 $x-1>0$ 的解却是 $x>1$，显然不是 $x>0$．

当然，证明不等式和解不等式也有互相联系的地方，例如解不等式时所进行的各种变形都适用于证明不等式；解不等式、证明不等式都是以不等式的性质为依据的．有时证明不等式还要利用解不等式的方法，例如，解得不等式的解集是一切实数，从而可证得该不等式是正确的绝对不等式；相反地，解不等式，有时也会利用一些重要的绝对不等式为依据．

下面来讲讲证明不等式的依据有哪些.

1 实数的有序性和不等式的基本性质

实数集是个有序集合，实数的大小比较规定：

（i）对于任意两个实数 α、β，下列三个关系中有一个，而且只有一个成立：

$$\alpha>\beta、\ \alpha=\beta、\ \alpha<\beta.$$

（ii）对于任意三个实数 α、β、γ，若 $\alpha<\beta$，且 $\beta<\gamma$，则 $\alpha<\gamma$.

又根据实数算术运算的定义，可以得出：

（i）对于实数 α、β，若 $\alpha>0$ 且 $\beta>0$，则 $\alpha+\beta>0$；

（ii）对于实数 α、β，若 $\alpha>0$ 且 $\beta>0$，则 $\alpha\cdot\beta>0$.

在不等量关系的研究中，还用到若干由上述实数的有序性推得的性质，习惯上称它们为不等式的基本性质，现归纳为下面三类：

（i）不等关系的基本特性：

$$a-b\begin{cases}>0\\=0\\<0\end{cases}\Leftrightarrow a\begin{cases}>b\\=b\\<b\end{cases}$$

（ii）对一个不等式进行变形的性质有：

1° $a>b\Rightarrow b<a$

2° $a>b\Rightarrow a+c>b+c$

3° $a>b$、$c>0\Rightarrow ac>bc$

$a>b$、$c<0\Rightarrow ac<bc$

4° $a>b$, 且 a、b 同号 $\Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

5° $a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n$、$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ (n 为正整数)

(iii) 对两个(可推广到有限多个)不等式进行运算的关系有:

1° $a>b$、$c>d \Rightarrow a+c>b+d$

2° $a>b$、$c<d \Rightarrow a-c>b-d$

3° $a>b>0$、$c>d>0 \Rightarrow ac>bd$

4° $a>b>0$、$0<c<d \Rightarrow \frac{a}{c}>\frac{b}{d}$.

这些性质都可由实数的有序性和算术运算的性质或利用已证明的性质证得. 这里以(ii) 4° 为例证明之.

证明 $\because$ a、b 同号, $\therefore a \cdot b>0$.

$$\because \quad ab>0, \quad \therefore \quad \frac{1}{ab}>0.$$

对 $a>b$ 应用性质(ii)3°, 两边同乘以 $\frac{1}{ab}$, 得

$$\frac{a}{ab}>\frac{b}{ab}, \quad 即 \quad \frac{1}{b}>\frac{1}{a},$$

$$\therefore \quad \frac{1}{a}<\frac{1}{b}.$$

2 实数绝对值的性质和含有绝对值的不等式

实数绝对值的定义:

$$|x|=\begin{cases} x, & 当 x>0 时; \\ 0, & 当 x=0 时; \\ -x, & 当 x<0 时. \end{cases} \quad (显然有 |x| \geqslant 0)$$

它的几何意义是：在数轴上表示点 x 和原点之间的距离.

由此可得

$$|x|>a(a>0)\Leftrightarrow x>a \quad 或 \quad x<-a,$$

$$|x|<a(a>0)\Leftrightarrow -a<x<a.$$

一般地，$|x-a|$ 表示数轴上点 x 和点 a 之间的距离，有

$$|x-a|<\varepsilon(\varepsilon>0)\Leftrightarrow a-\varepsilon<x<a+\varepsilon,$$

$$|x-a|>\varepsilon(\varepsilon>0)\Leftrightarrow x>a+\varepsilon \quad 或 \quad x<a-\varepsilon.$$

上述这些等价关系为含有绝对值的不等式和不含绝对值的不等式互相转化提供了依据．以后在证明有关绝对值的不等式中常会用到这些关系式.

[例 1] 在直角坐标系中单位圆上有两点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2).

求证：$|x_1x_2+y_1y_2|\leqslant 1$.

证明 由于 (x_1, y_1)、(x_2, y_2) 是单位圆上的两点(图 1)，

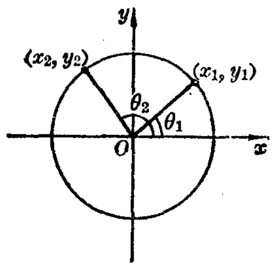


图 1

设 $\begin{cases} x_1=\cos\theta_1, \\ y_1=\sin\theta_1; \end{cases}$

$\begin{cases} x_2=\cos\theta_2, \\ y_2=\sin\theta_2. \end{cases}$

$$\therefore \quad x_1x_2+y_1y_2=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2$$

$$=\cos(\theta_1-\theta_2).$$

$$\because \quad -1\leqslant\cos(\theta_1-\theta_2)\leqslant 1,$$

$$\therefore \quad -1\leqslant x_1x_2+y_1y_2\leqslant 1,$$

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

即

$$|x_1x_2+y_1y_2|\leqslant 1.$$

关于实数绝对值的运算还有一些重要性质:

1° $|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

它的后半个式子可推广为

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|.$$

2° $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$,

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}\quad(b\neq 0).$$

3° $|a^n|=|a|^n$ (n 为正整数).

特别地,还有一个重要的关系式

$$|a^2|=|a|^2=a^2.$$

它们在证明含有绝对值的不等式时有较多的应用.

[例 2] 求证:

$$|x-a|+|x-b|+|x-c|+|x+a+b+c|\geqslant 4|x|.$$

证明 $|x-a|+|x-b|+|x-c|+|x+a+b+c|$

$$\geqslant|(x-a)+(x-b)+(x-c)+(x+a+b+c)|=|4x|$$

$$=4|x|.$$

3 实数平方非负的性质和最简的基本不等式

根据实数运算的定义,有

$$(-x)\cdot(-y)=x\cdot y,$$

$$0\cdot x=0.$$

由此可以推得实数平方非负的性质,即

$x^2 \geqslant 0$ （x 是一个任意的实数，等号当 $x=0$ 时成立）.

证明 i) 若 $x>0$，

$$\text{则} \quad x^2=x\cdot x>0;$$

ii) 若 $x<0$，

$$\text{则} \quad x^2=x\cdot x=(-x)\cdot(-x)>0;$$

iii) 若 $x=0$，

$$\text{则} \quad x^2=0^2=0\cdot 0=0.$$

从而，对任意实数 x，总有 $x^2 \geqslant 0$.

注意，复数就不具备这个性质. 复数集合不是有序集合，复数之间不能建立大小比较关系，并且复数(为纯虚数时)的平方可以是负数. 一般来说，不等式证明总是在实数范围内进行的，当然也可包括有关复数的模(仍为实数)的不等式证明问题.

由实数的平方非负的性质，进一步可推得下列不等式：

1° $a^2+b^2 \geqslant 2ab$.（等号仅当 $a=b$ 时成立）

2° $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$. （$a>0$、$b>0$，等号仅当 $a=b$ 时成立）

3° $a+\dfrac{1}{a} \geqslant 2$.（$a>0$，当 $a=1$ 时等号成立）

或 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b} \geqslant 2$.（$a$、$b$ 同号，当 $a=b$ 时等号成立）

证明 1° 由 $(a-b)^2 \geqslant 0$ 展开即得.

2° 由 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$，得

$$a-2\sqrt{ab}+b \geqslant 0,$$

$$\therefore \quad a+b \geqslant 2\sqrt{ab}, \quad 即 \ \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

3° 在 2° 中用 a、$\frac{1}{a}$ 代替 a、b 即得.

这里的不等式 $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$，说明两个正数的算术平均数大于或等于它们的几何平均数，通常把它称作“基本不等式”。这个不等式的几何意义如下（图2）：

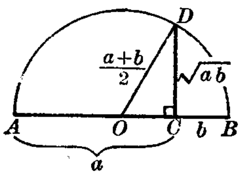


图 2

在半圆 O 内，AB 为直径，C 是 AB 上的任意一点，过 C 作 $CD \perp AB$ 交半圆于 D.

设 $AC=a$, $BC=b$, 则

$$AB=a+b,$$

$$OD=\frac{a+b}{2}.$$

由圆的性质知：

$$CD^2=AC \cdot BC,$$

$$\therefore \quad CD=\sqrt{ab}.$$

在直角三角形 OCD 中，显然有 $OD>CD$，即

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}.$$

当 C 点和 O 点重合，即 $a=b$ 时，$CD=OD$，即

$$\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}.$$

所以一般地有

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

练 习 题 一

1. 试证：若 n 为奇数，$a>b$、a、$b \in R$，则 $a^n>b^n$、$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

2. 下列证法是否有错误？错在哪里？

已知：a、b 是正数，求证：$\sqrt{a} \geqslant \sqrt{b}$.

证明：$\because \quad \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$,

$$\therefore \quad a+b \geqslant 2\sqrt{ab}, \text{ 即 } \quad a-2\sqrt{ab}+b \geqslant 0,$$

$$\therefore \quad (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0.$$

由此可得

$$\sqrt{a}-\sqrt{b} \geqslant 0,$$

$$\therefore \quad \sqrt{a} \geqslant \sqrt{b}.$$

3. 已知：$0<|x|<1$、$n \in N$.

求证：$1-|x| \leqslant \sqrt[n]{1+x} \leqslant 1+|x|$.

4. 已知：$2a^2+\frac{1}{8}c^2<\frac{\varepsilon}{2}$、$2b^2+\frac{1}{8}d^2<\frac{\varepsilon}{2}$.

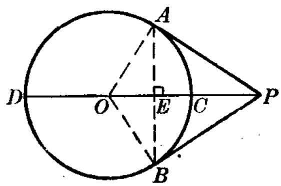
求证：$|ac+bd|<\varepsilon$.

5. 已知：$a \geqslant -2$、$b=\sqrt{a+2}$、$c=\sqrt{b+2}$、$d=\sqrt{c+2}$.

求证：$|d-2|<\frac{1}{8}|a-2|$.

6. 如图，PA、PB 与圆 O 相切，PD 过圆心 O. 已知 $PC=a$, $PD=b(a\neq b)$. 试用几何方法证明不等式

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$



(第 6 题图)

二、证明不等式的基本思想方法

我们知道，不等式题目本身的情形是多种多样的，对同一题目的证明也可采用多种方法．所以不可能建立统一适用的证明方法，而只能抓住一些特征去寻求证题方法．但从原则一点说，有两点必须遵循的：一、既是证明不等式，就必须紧紧抓住“不等”的有关概念和性质；二、证明不等式与证明一般命题一样，就其思考途径来说，可采取直接证法或间接证法，如果问题与自然数有关，还可以采用数学归纳法．

1 较简单不等式的证明

前面介绍了证明不等式的依据，这是证明不等式的基础．结合初等数学各种恒等变形的知识和技巧，并加以灵活运用，就构成了证明较简单不等式的各种方法．下面给予适当分类，分别加以说明．

(1) 有一些不等式的证明题，只要从题设不等式(一个或几个)出发，经过若干次不等式的变形或运算即可推得所要证的不等关系成立．这时要仔细分析题设与结论所给的

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com