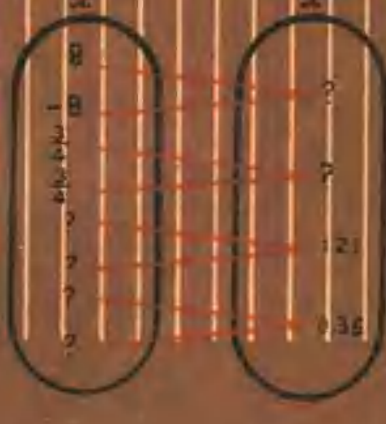
中学课内外知识丛书

初中代数 第3册

CHUZHONG DAISHU

北京教育学院编



天津教育出版社

中学课内外知识丛书

初中代数

第三册

北京教育学院
门树敏　刘嘉环　杨大淳　编

天津教育出版社

编者的话

本书是按照人民教育出版社出版的初级中学课本代数第三册的体系和中学数学教学大纲的要求编写的。目的是为了辅导初中学生更好地掌握课本中的基础知识、基本技能和一般的解题思路与方法，使学生提高运用数学知识的能力。

本书包括有方根、二次根式、一元二次方程和指数四章。每章分四部分。一是本章概述，主要是阐述本章内容间的内在联系，以及与其它章的联系；二是疑难解析，主要是对重要的和难以理解的概念进行辨析，以及方法的总结；三是课外阅读，其中有与这册代数内容有关的历史知识，还有比课本程度略深且与课本知识有紧密联系的知识，以及趣味问题；四是例题分析与习题，供读者检查自己的学习效果。

本书可供初中二年级学生、复习初中代数的学生和自学青年使用，也可供初中数学教师参考。

编者

目　　录

第九章　数 的 开 方

一、本章概述

本章的内容主要是数的开方和实数．

对于数的开方，主要涉及到了数的开平方和开立方．为此，介绍了开平方和开立方、数的平方根、立方根和 n 次方根的概念，以及它们的性质．对于开平方和开立方的方法，则着重介绍了数的平方和开平方、数的立方和开立方互为逆运算的关系，并用以求数的平方根和立方根，以及利用平方根表和立方根表求平方根和立方根的方法．

此外，通过本章的知识把数的概念由有理数扩充到了实数．而数的开方就为实数的引入打下基础．对于无理数和实数的概念，只给出了它们的定义，至于实数的运算则只是说明把它归结为小数的运算而已．另外，还给出了实数的分类．

平方根的笔算求法，主要是在手头没有平方根表和计算器的情况下，常使用的一种方法，所以课本中把它安排在附录中．

本章的重点是求一个数的平方根和立方根；明确乘方和开方互为逆运算，以及方根的概念．

算术平方根的概念是本章的难点，这需要在确切理解算术平方根的定义的基础上来解决．

二、疑难解析

（一）平方根

课本中给出的定义是：

“如果一个数的平方等于a，这个数就叫做a的平方根（也叫做**二次方根**）．”

由上述定义可以看出，平方根的定义是在平方概念的基础上规定的．

根据有理数乘方的符号法则可知，正数的平方是正数；负数的平方也是正数；零的平方仍是零．也就是说，不论这个数是怎样的有理数，它的平方永远是一个不小于零的数，绝不是一个负数．

由上面的叙述可以知道，在开平方的定义即“求一个数a的平方根的运算叫做**开平方**”中的数a，一定不是负数；在记号$\sqrt{a}$中，其条件是$a\geqslant 0$．

如果不为零的两个数互为相反数，那么它们的平方是同一个正数a．于是，**一个正数a有两个平方根，这两个平方根互为相反数**，用$\sqrt{a}$和$-\sqrt{a}$表示．

不论是怎样的有理数，它的平方都是非负数，也就是说，a一定不会是负数．所以**负数没有平方根**．

因为零的平方是零，所以**零的平方根是零**．

象“加法与减法”、“乘法与除法”一样，平方与开平方也是两种互逆的运算．根据定义，我们可以通过乘方求一个数的方根．

例如，求$\frac{25}{36}$的平方根．

因为$\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{36}$，　$\left(-\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{36}$，

所以$\frac{25}{36}$的平方根等于$\pm\frac{5}{6}$。

从这个例子可以看出：第一，正数的平方根有两个，它们互为相反数；第二，利用平方的运算，可以求一个非负数的平方根。

因为开方运算是乘方运算的逆运算，所以我们又可以通过乘方检验开方的结果是不是正确。

例如，$\frac{3}{5}$和$-\frac{3}{5}$是不是0.36的平方根？

因为$\left(\pm\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}=0.36$，所以$\frac{3}{5}$和$-\frac{3}{5}$都是0.36的平方根。

例1　计算0.03^2，这是什么运算？在$(\ ?\ )^2=0.0016$中，求括号内的数属于什么运算？

解　在$x^2=a$中，

如果已知x，求a，这是平方运算；

如果已知a，求x，这是开平方运算。

在这里，前者是平方运算，$0.03^2=0.0009$；后者是开平方运算，因为0.0016是正数，正数的平方根有两个，它们互为相反数，所以括号内的数应为±0.04。

从这个例子可以看出，正数的平方运算的结果是唯一的，而正数开平方运算的结果不是唯一的，而是有两个，并且它们互为相反数。

例2　求下列各数的平方根：

(1) $(-7)^2$; (2) $10\frac{1}{36}$.

解 (1)因为$(+7)^2=49$，$(-7)^2=49$，所以49的平方根是± 7，即$(-7)^2$的平方根是± 7.

(2)因为$10\frac{1}{36}=\frac{361}{36}=\left(\pm\frac{19}{6}\right)^2$，所以$\frac{361}{36}$的平方根是$\pm\frac{19}{6}$，即$10\frac{1}{36}$的平方根是$\pm\frac{19}{6}$.

例3 要想知道2.3是不是5.29的平方根，应该怎样判断?

解 因为$2.3^2=5.29$，所以可以断定2.3是5.29的一个正的平方根.

例4 求下列各式中的x:

(1)$25x^2-49=0$;

(2)$(2x-3)^2=25$.

解 (1) $\because$ $25x^2-49=0$,

$$\therefore \quad x^2=\frac{49}{25}.$$

$$\because \quad \left(\pm\frac{7}{5}\right)^2=\frac{49}{25},$$

$$\therefore \quad x=\pm\frac{7}{5}.$$

(2) $\because$ $(2x-3)^2=25$,

由平方根的定义，可知 $2x-3=\pm 5$.

当$2x-3=5$时，$x=4$;

当$2x-3=-5$时，$x=-1$.

所以这个式子中的x有两个值4或-1.

练 习 9·1

1. 判断题（正确的在括号内画“√”错误的画“×”）

(1)零的二次方根仍是零； （ ）

(2) 1 的平方根仍是 1 ； （ ）

(3) -16的平方根是-4； （ ）

(4) 6 的平方根是$\sqrt{6}$； （ ）

(5)因为-2的平方是 4 ，所以 4 的平方根是-2；

（ ）

(6) $-a$没有平方根； （ ）

(7)如果$a^2=b^2$，那么a一定等于b； （ ）

(8)正数a的平方根一定是正数。 （ ）

2.填空：

(1)平方根等于±25的数是_____；

(2)平方等于25的数是_____；

(3)平方根只等于它自身的数是_____。

3.求下列各数的平方根：

(1) $3\frac{22}{49}$； (2) 0.0004； (3) $(-3)^2$； (4) 0^2。

4.求下列各式中的x：

(1) $49x^2-100=0$； (2) $(3x-1)^2=16$。

(二) 算术平方根

课本中给出的定义是：

“正数a的正的平方根叫做a的**算术平方根**，记作$\sqrt{a}$ ($a>0$)。零的平方根也叫做零的算术平方根。”

由算术平方根的定义可知，算术平方根具有以下两个性质：

第一，被开方数必须是正数或零；

第二，方根的值必须是正数或零。

例如，$\sqrt{23}$、$\sqrt{(-1)^2}$等都是算术平方根；但是$\sqrt{-1}$不是算术平方根，因为被开方数是负数，$\sqrt{-4}$无意义，$-\sqrt{2}$也不是算术平方根，因为这个方根的值是负的。

如果$x^2=5$，由平方根的定义可知，$x=\pm\sqrt{5}$，其中$+\sqrt{5}$就是5的算术平方根，而$-\sqrt{5}$就不是算术平方根。这里$+\sqrt{5}$的“+”号可以省略不写，这样形如$\sqrt{a}\ (a\geqslant 0)$的数就表示一个非负数的算术平方根。

平方根和算术平方根之间既有联系，又有区别。

对于一个数的平方根和算术平方根来说，这个已知的数必须是非负数，这是它们的相同之处，而它们的区别在于平方根表示的是一个正数经过开平方运算后，所得的一正、一负的两个相反数，而算术平方根是指其中的那个正数。也就是说，算术平方根是平方根的一个组成部分。对于零来说，零的平方根也是零的算术平方根。

例 回答下面的问题：

（1）$\frac{16}{81}$的平方根是什么数？$\frac{16}{81}$的算术平方根是什么数？

（2）$\sqrt{0.0009}$表示什么数？

（3）符号“$\sqrt{a}$”表示一个非负数a开平方的运算，这句话正确与否？

解 （1）$\frac{16}{81}$的平方根是$\pm\frac{4}{9}$，$\frac{16}{81}$的算术平方根是$\frac{4}{9}$；

（2）$\sqrt{0.0009}$表示正数0.0009的算术平方根，因为

$0.03^2=0.0009$，所以 $\sqrt{0.0009}=0.03$；

（3）不正确．符号“$\sqrt{a}$”表示一个非负数，它表示一个非负数a经过开平方运算后的结果，这里指的是正的平方根或零，即算术平方根，$\sqrt{a}$不表示运算．

练　习　9·2

1．求下列各数的平方根和算术平方根：

（1）$1\frac{11}{25}$；（2）1.44；（3）$\frac{49}{361}$；（4）1；

（5）$(-3)^2$；（6）22500．

2．什么数的算术平方根等于下列的数：

（1）$\frac{4}{3}$；（2）$1\frac{1}{2}$；（3）400；（4）1.2．

3．写出满足下列条件的方根：

（1）一个正数，它的平方等于15；

（2）一个负数，它的平方等于21；

（3）一个数，它的平方等于11．

4．判断题（正确的在括号内画“√”，错误的画“×”）：

（1）1的平方根是1；　（　）

（2）$9\frac{1}{36}$的算术平方根是$3\frac{1}{6}$；　（　）

（3）16的平方根是-4；　（　）

（4）$(-24)^2$的算术平方根是-24．　（　）

（三）立方根

课本中给出的定义是：

如果一个数的立方等于a，这个数就叫做a的立方根（也

叫做三次方根）．用符号“$\sqrt[3]{a}$”表示，其中a是被开方数，3是根指数，这里的3不能省略．

由有理数乘方的符号法则可以知道，正数的立方是正数；负数的立方是负数；零的立方是零．这里的a就可以是任意的有理数．这样，在开立方的定义(即“求一个数a的立方根的运算，叫做**开立方**．）中的a，就可以是正数、负数和零．也就是说在$\sqrt[3]{a}$中，a可以取任意有理数．

由上面的叙述可知，

正数有一个正的立方根；负数有一个负的立方根；零的立方根是零．

立方与开立方也是互逆的运算．根据定义，我们可以通过立方求一个数的立方根．

例如，求27的立方根．

因为$3^3=27$，所以$\sqrt[3]{27}=3$．

又如，求-27的立方根．

因为$(-3)^3=-27$，所以$\sqrt[3]{-27}=-3$．

由$\sqrt[3]{27}=3$和$\sqrt[3]{-27}=-3$，得$\sqrt[3]{-27}=-\sqrt[3]{27}$．

一般地，如果$a>0$，那么$\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$．

这样，求一个负数的立方根，可以通过求这个负数的绝对值的立方根，再取它的相反数即可．

例1　求下列各式的值：

（1）$\sqrt[3]{\frac{216}{125}}$；　　（2）$\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}$．

解　（1）$\sqrt[3]{\frac{216}{125}}=\frac{6}{5}$；

（2） $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}=-\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=-\frac{3}{2}$.

对于把数a开平方或把数a开立方来讲，它们之间既有区别又有联系．首先它们的被开方数a的取值范围是不同的，前者只能取非负数，而后者可以取任意的正数、负数和零．

正数开平方或开立方的方根的个数也不相同，正数的平方根有两个，它们互为相反数；而正数的立方根只有一个，这个数只能是正数．

负数没有平方根；而负数有一个立方根，这个数是负数．

零的平方根和立方根都是零．

平方根和立方根都可以通过乘方运算求得．

除了用平方根或立方根的定义求一个数的平方根或立方根以外，课本中还介绍了利用平方根表或立方根表求一个数的平方根或立方根．

在使用平方根表和立方根表查一个数的平方根或立方根时，如果不能直接从表中查得结果，而要应用小数点的移动法则时，要注意它们的区别和联系．如果是开平方，那么把被开方数的小数点应该向右或向左两位、两位地移动；如果是开立方，那么被开立方的数的小数点，应该向右或向左三位、三位地移动．但是查得的平方根或立方根的小数点都是向相反的方向一位、一位地移动．

例 2 （1） 已知$\sqrt[3]{3.78}=1.558$，求$\sqrt[3]{3780000}$的值；

（2） 已知$\sqrt[3]{-1.948}=-1.247$，求$\sqrt[3]{0.001948}$的值．

解 （1） $\sqrt[3]{3780000}$的被开方数是3780000，把它的小数点向左移动六位后，得到3.78，因为$\sqrt[3]{3.78}=1.558$，把立

方根的小数点向右移动两位，得155.8，所以$\sqrt[3]{3780000}=155.8$．

（2）$\because\quad \sqrt[3]{-1.948}=-\sqrt[3]{1.948}=-1.247$，

$\therefore\quad \sqrt[3]{1.948}=1.247$。

因为$\sqrt[3]{0.001948}$的被开方数是0.001948，把它的小数点向右移动三位后得到1.948，而$\sqrt[3]{1.948}=1.247$，把1.247的小数点向左移动一位得0.1247．

$\therefore\qquad \sqrt[3]{0.001948}=0.1247$．

例 3 利用立方根的定义，求下列各式中x的值：

（1）$x^3-125000=0$；（2）$(x-1)^3=0.008$．

解（1）$\because\quad x^3=125000$，

$\therefore\qquad x=\sqrt[3]{125000}=50$；

（2）$\because\qquad (x-1)^3=0.008$，

$\therefore\qquad x-1=\sqrt[3]{0.008}$。

于是$\qquad x-1=0.2$，

$\therefore\qquad x=1.2$．

练 习 9·3

1．判断题（正确的在括号内画"$\surd$"，错误的画"$\times$"）：

（1）$\frac{8}{25}$的立方根是$-\frac{2}{5}$和$\frac{2}{5}$；（ ）

（2）负数开立方没有意义；（ ）

（3）-0.08的立方根是-0.2；（ ）

（4）$-a^3$的立方根是$-a$；（ ）

（5）$-a$的立方根不存在；（ ）

（6）$\frac{1}{729}$的立方根是9．（ ）

2．下面的一些方根里，哪些有意义，哪些没有意义，有意义的要求出方根的值，没有意义的要说明原因．

（1）$\frac{1}{27}$的立方根；（2）$\left(-\frac{1}{4}\right)^2$的平方根；

（3）-1的立方根；（4）-4的平方根；

（5）$(-2)^3$的立方根；（6）$-a^2$的立方根；

（7）$-a$的平方根．

3．填空：

（1）如果$\sqrt{7590}=87.12$，那么$\pm\sqrt{0.00759}=$____；

（2）如果$\sqrt[3]{32.84}=3.202$，那么$\sqrt[3]{32840}=$____；

（3）如果$\sqrt[3]{-63.2}=-3.983$，那么$\sqrt[3]{0.0000632}=$____；

（4）如果$\sqrt[3]{84.6}=4.39$，那么$\sqrt[3]{-84600000}=$____．

4．利用立方根的意义，求下列各式中x的值：

（1）$(x-3)^3=-512$；

（2）$8x^3+729=0$；

（3）$3(x-5)^3=-375$．

（四）n次方根

课本在以平方根和立方根为具体模型，进行了较详细的研究以后，又把方根的概念进一步推广到n次方根．它的定义是"如果一个数的n次方（n是大于1的整数）等于a，那么这个数就叫做a的n次方根．"这里，当n等于2时，就是平方根的定义；当n等于3时，就是立方根的定义．当根指数n取