解析几何

刘海蔚　邓御寇　编著

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

$$c<b$$

科学技术文献出版社重庆分社

解 析 几 何

刘海蔚　邓御寇　编著

科学技术文献出版社重庆分社

解 析 几 何

刘海蔚　邓御寇　编著
责任编辑　栾季生

科学技术文献出版社重庆分社　出版发行
重庆市市中区胜利路132号
全国各地新华书店　经销
中国科学技术情报研究所重庆分所印刷厂　印刷

开本：787×1092毫米1/32印张：10.125字数：22万
1990年9月第1版　1990年9月第1次印刷
科技新书目：223—357　印数：1—5500

ISBN7-5023-1159-9/G·264　定价：3.30元

前 言

本书是参照各类高等师范院校数学专业“解析几何”教学大纲编写的教材，适于各种类型的高等师范院校(包括函授)使用，也可供中学教师和自学者学习或参考。

本书与现行各解析几何教材比较主要有以下特色：

1. 处理新颖：一些新的处理方式使内容简洁清晰、明了易懂，或使基本思想突出，相关问题集中，或注意与其他课程的衔接，或照顾到不同需要。

2. 注意启发：为有利于培养学生分析、解决问题的能力，在叙述中尽量避免硬抬定义、定理，而是在问题的讨论过程中自然地引入概念和得出结论。

3. 配题恰当：除精选例题外，将其余选出的题目分为三类：一类是课堂练习题，可以帮助学生掌握有关概念和基本方法；一类是课外作业题，数量适当，难易适度；一类是少量的带综合性的复习题，可供期末复习参考。

练习题中个别较难的题可看成是例题的补充，书末附有较详细的提示。习题一般按节分。无论是练习还是习题，学生在使用书末所附提示时都应注意两点：一方面应先独立思考，再参看书末的答案或提示，以培养自己的独立工作能力，也免于思想受其束缚；另方面书末的提示虽然仅供参考，但从中也可学到一些解题的技巧。

本书将坐标的引入推迟到第二章，是为了强调向量的运

算及其性质和应用，並不依赖于坐标系的选取。这样既免于造成学生的误解，又表明了向量方法也是用代数工具研究几何问题的一个基本方法。从而可加深学生对解析几何基本思想的理解，也有利于培养学生直接用向量工具解决一些几何问题的能力，这对于中学教师也有重要意义。

为培养学生的空间想象力和识图、画图能力，本书加强了关于平面、二次曲面、曲面交线和空间区域等的画法部分。

书中标有*的章节和习题供选学和选作。

考虑到一般师范院校的需要，本书将第五章（二次曲面的一般理论）内容作为选学；但在使用时仍可根据各校自身的需要决定选学第四、五章中的某一章。

为节省篇幅，凡其他课程中专门讲授的知识（如中学解析几何中关于平面曲线的参数方程和极坐标方程的某些基本知识，高等代数中关于行列式、矩阵、线性方程组的知识）均未列入附录。仿射几何简介是从向量运算的观点出发，以便于理解。点变换观点只作了很简单的介绍，因为它将在高等几何中专门讲授。

书中常使用的一些记号说明如下：§5.3表示§5中的5.3（其余类推）；□表示证明或解答完毕；$\Longleftrightarrow$表示充要条件。

本书在试用过程中得到本校几何教研室以及重庆市各兄弟师范院校老师们的大力支持和帮助，并提出了很宝贵的意见，特致以衷心的谢意。

限于编者的水平和时间仓促，本书难免有不当和错误之处，恳切希望读者批评指正。

刘海蔚　邓御寇

1989年10月于西南师范大学数学系

绪　论

在中学里，研究平面几何采用了两种方法：一种是所谓“纯几何”的方法，又称为综合的方法。它是从一些基本概念(如点、直线)和基本性质(公理)出发，经过逻辑推理而得出所要研究的几何学。这种几何学可以称为推理几何学；另一种是解析的方法，就是通过坐标系的建立将几何学的对象和问题转化为代数的对象和问题（例如将点转换成点的坐标，直线转换成一次方程，点落在直线上则转换为点的坐标满足直线方程等等)。这样一来，就将几何的研究归于代数的计算，这种几何学就称为解析几何学。因此，解析几何用代数运算代替了推理几何的几何推理。这两种几何各有其特点和长处：推理几何逻辑性强，几何意义明显。解析几何由于用“计算”代替了“推理”，思路简明，容易入手。

根据以上的分析可以看出，解析几何的基本思想是用代数的方法研究几何，因而其实质在于将几何结构代数化，从而将几何的研究归为代数的计算。体现这种思想的最简单的例子就是三角学。如果只研究三角形的几何，推理几何得出了三角形的各种全等条件(如S.S.S或S.A.S)，而三角学通过三角函数的引进，把全等条件提升为能进行计算的边角函数关系(其中最基本的就是正弦定理和余弦定理)，所以三角学可以看成是研究三角形的“微小”解析几何，它确实也是解析几何的前身。三角形的全等条件是一种“定性”的研究，三

角形的边角关系则是一种“定量”的研究，因而解析几何还可将几何研究从“定性”推进到“定量”。

几何研究代数化的最常用方法是坐标方法。此外，本书还将介绍一种向量方法，它常常能更简捷地解决一些几何问题。

为了将平面或空间的几何结构代数化，就得将几何的对象与代数的对象建立起联系。如所周知，最基本的几何对象是点，平面和空间都可看成是由点组成的集合。但点只是表示位置，它没有大小，因而点本身不能构成一种量。坐标方法是利用一点与几个基准点(原点、坐标轴上的单位点)间的位置差异而将点与一组有序实数建立起联系。向量方法则只考虑两点间的位置差异，它不仅有大小(两点间的距离)，而且有方向(从一点到另一点的方向)，因而是一种量。我们把这种既有大小又有方向的量称为向量，于是两个点就与向量建立起了联系。

向量作为一种代数对象，怎样定义其代数运算呢？正如大家从数的运算中所看到的，代数运算是一种最简易的运算，它们有着简单而明确的运算规律，如交换律、结合律、分配律等。根据这些规律，就可将一些概念推理变成符号演算。关于数的代数运算主要有两种：加法和乘法。它们是从实际中通过总结数之间的关系而得出的。对于实际中的各种向量，如位移、力、速度、角速度、力矩、电场强度等，通过总结各种向量的共同关系，就可抽象出向量的各种代数运算，它们的运算规律与数的加法和乘法的运算规律有许多相似之处，因而也把它们称为向量的加法和乘法。例如力、速度、位移的合成法则都是相同的，就可抽象成向量的加法。关于向量的乘法，我们将定义三种：数乘向量，两向量的内

积，两向量的外积。

本书在第一章中将介绍向量的几种代数运算及向量在几何研究中的初步应用，以后各章则将向量方法与坐标方法结合起来，研究一些在其他学科和工程技术中常用的简单曲线和曲面。

目　录

第一章　向量代数

解决几何中的问题不仅可以用坐标方法，还可以用向量方法，而且有时用向量方法更简捷。向量除了在几何以及其他数学学科中有重要应用外，也是解决力学、物理和技术科学问题的有力工具。本章将介绍有关向量的各种基本概念，向量的代数运算及其运算律，向量在几何中的初步应用。

§1　向量及其线性运算

1.1　向量

既有大小又有方向的量称为**向量**，或**矢量**。

最直观的向量是有向线段（图1-1），其大小就是线段的长，其方向就是从起点到终点的方向。为了便于研究，可将各种向量都用空间中的有向线段来直观表示，所以下面我们在研究向量的代数时，全部用空间中的有向线段来表达。

因为向量只能有大小和方向这两个特征，所以用有向线段表示向量时，只要保持它的长和方向，它的起点可移至任意位置。也就是说，向量平行移动后得到与它相等的向量。因此，这种向量又称为**自由向量**。

今后，点都用大写英文字母表示，起点是A终点是B的向量记为 $\overrightarrow{AB}$ 。由于向量和起点的取法无关，所以向量也常用

一个小写字母表示，如$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{u}$，$\vec{v}$，…．书籍中为了排印方便，常用黑体字母表示，如**a**，**b**，**u**，**v**，…．

向量**a**的大小又称为它的**长**或**模**，记为|**a**|．因此，向量的模是一个非负实数。两向量只有在模相等方向也相同时才相等。

模为零的向量称为**零向量**，记为**o**．零向量的方向不定，因而可以认为它与任意向量同向，特别地，零向量与零向量也看成同向，因此零向量都相等．

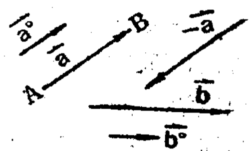


图1-1

模为1的向量称为**单位向量**．显然，在每个方向上都有单位向量。与非零向量**a**同向的单位向量记为**a**°(图1-1)．

如果一个向量与**a**模相等而方向相反，这个向量就叫做**a的反向量**，记作$-$**a**(图1-1)．例如$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$。显然$-$**a**的反向量就是**a**，即$-(-$**a**$)=$**a**．因此**a**与$-$**a**互为反向量．

由于方向不能比较大小，因此在向量中没有“大于”、“小于”概念．例如若|**a**|$=3$，|**b**|$=4$，只能说|**a**|$<$|**b**|，不能说**a**$<$**b**．

两向量同向或反向时称为**平行**，並仍使用通常的平行记号“$/\!/$”．可以认为零向量与任意向量平行。因此，若**a**$\not\parallel$**b**，则**a**，**b**中不能有零向量．

例1.1　已知**a**$/\!/$**b**，**a**$/\!/$**c**，是否一定有**b**$/\!/$**c**?

解　不一定。例如**a**$=$**0**时，**a**与任意向量平行，从而**b**$\not\parallel$**c**时仍满足已知条件．□

由此例可知，只有**a**$\neq$0时才能由**a**$/\!/$**b**和**a**$/\!/$**c**推出**b**$/\!/$**c**．

练习 1

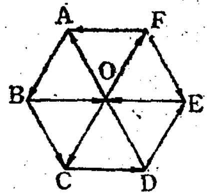


图1-2

1． 图1-2中ABCDEF 是正六边形，O是它的中心，说明图中哪些向量是相等的，哪些互为反向量。

2． 将四边形 ABCD 是平行四边形的充要条件用向量表示出来。

3． 若 a、b 是非零向量，$a^\circ=b^\circ$ 对吗？

1.2 向量的加法

向量加法是从实际问题中向量的合成抽象出来的。

以A为起点B为终点的位移与以B为起点C为终点的位移合成起来就得到以A为起点C为终点的位移(图1-3，图1-4)。由于位移 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$ 及它们的合成 $\overrightarrow{AC}$ 构成一个三角形（包括退化的情形，即A、B、C共线的情形），这种合成法则称为**三角形法则**。作用于一个质点的两个力f与g的合力则是以这两个力为邻边的平行四边形的对角线向量（图1-5），力的

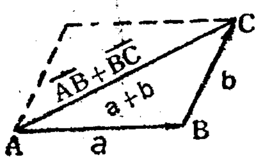


图1-3

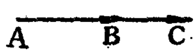


图1-4

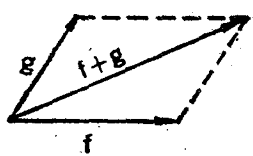


图1-5

这种合成法则称为**平行四边形法则**。从图 1-3 和图 1-5 可看出，三角形法则与平行四边形法则得到的结果是相同的，不过在合成平行向量时不便于应用平行四边形法则，因此下面按三角形法则来叙述向量加法的定义。

定义1.1 若将向量a、b依次首尾相连（即把a的终点作

为b的起点），则以a的起点为起点，b的终点为终点的向量称为a与b的**和**，记为$\mathbf{a}+\mathbf{b}$。

根据向量加法的定义，分别从图1-6和图1-7[1)]即知向量加法满足

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a} \quad \text{（交换律）} \qquad (1.1)$$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}) \quad \text{（结合律）} \qquad (1.2)$$

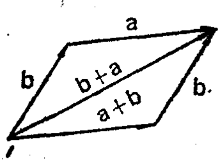
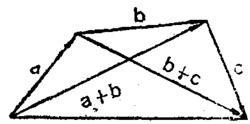


图1-6



$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$

图1-7

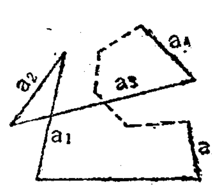
由于零向量起点与终点重合，因此由三角形法则容易看出零向量以及一个向量的反向量有下面两条重要的性质：

$$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a} \qquad (1.3)$$

$$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0} \qquad (1.4)$$

由此可知，向量加法的基本运算律与实数加法相同，因而可以象实数加法那样去演算。例如，多个向量相加时无论其演算顺序如何，其结果总相同，因而不必用括号标明演算顺序。

既然多个向量相加时可以不管其运算的顺序，通过三角形法则的重复运用，就可得出求多个向量的和向量的作图法：把这些向量逐个首尾相连，则以第一个



$\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\cdots+\mathbf{a}_n=\mathbf{a}$

图1-8

1）图1-6和图1-7中只画了a、b、c不平行的情形，对于平行这种特殊情况，读者不妨自行验证。