工人岗位技能培训系列教材

机加检验工技能

张振泉 主编

航空工业出版社

机加检验工技能

工人岗位技能培训系列教材

机加检验工技能

张振泉　主编

航　空　工　业　出　版　社

1 9 9 2

(京)新登字 161 号

内 容 简 介

本书阐述的机加检验工技能，是根据航空工业《工人技术等级标准》(机加检验工) 应知应会的要求，以技能培训为主干线，贯穿必要的理论知识，并借鉴国际劳工组织开发的模块式（MES）教材的形式编写的，即以代表本岗位技能要求的典型零件为模块，再根据模块选配学习单元。适合立足本职，定向学习，岗位成材的要求，是开展工人岗位技能培训的适用教材。

本书是机加检验工的岗位技能培训教材，技能内容图文结合，便于自学和施教。本书也可作为机加检验技术人员的参考书和技校、大专院校学生的技能培训参考教材。

工人岗位技能培训系列教材
机加检验工技能
张振泉 主编

航空工业出版社出版发行
(北京市安定门外小关东里 14 号)
—邮政编码：100029—
全国各地新华书店经售
北京地质印刷厂印刷

1992 年 8 月第 1 版　　1992 年 8 月第 1 次印刷
开本：787×1092 毫米 1/16　印张：11.25　插页：1 页
印数：1—8000　　字数：276 千字
ISBN 7-80046-419-9/G·056
定价：6.20 元

前　言

为落实国务院关于"搞好职工培训，不断提高职工队伍素质"的指示精神，适应工人岗位培训的需要，在总结航空工业多年来工人培训的实践，借鉴国际劳工组织开发的职业技能模块（MES）教学法的基础上，我们组织编写了包括车工、钳工、铣工、钣金工、磨工、冲压工、表面处理工、焊工等十几个专业工种和工人岗位通用知识在内的新型教材。计划从 1991 年至 1992 年陆续出版。

这套教材的内容及其深广度，以《工人技术等级标准》为依据，以操作技能为主，将本工种各技术等级、不同岗位的要求，用若干个典型零件来体现，这种典型零件即为模块，而完成模块技能要求所需的单一的基础技能训练内容称为学习单元。因此，这套教材既是工人技能培训教材，同时也是技能考核标准的具体化。当某个工人需要培训或考核时，根据技术等级和需要加工的零件（或工艺）类型，可以很快找到所应掌握的学习单元和考核要求。本教材的内容大多是由一些老工人、技师和多年在生产第一线工作的技术人员提供的操作技能技巧实例，加上通俗易懂的文字和大量的图示图解，无论采取集中培训形式还是工人自学，都较其他类型教材容易掌握。

本书由东安发动机制造公司培训中心组织编写，全书由张振泉同志主编，参加编写的还有李福如、迟日恒、丁振川、张秀珍、张文、邱东屏、李树彬、王德辉、宋建伟等同志。常州蓝翔机械总厂赖雅人、南京航空附件厂徐元福、南昌飞机制造公司缪征、苏州长风机械总厂王培元等同志集体审定。在教材编审过程中，部教育司、有关工厂、航空工业出版社等单位给予了大力支持和帮助，在此表示感谢！

在教材编写过程中，我们坚决地按照岗位培训"干什么，学什么；缺什么，补什么"的原则，努力处理好专业理论与操作技能、典型与一般以及各技术等级之间的关系，希望能成为一套适合岗位培训并受广大工人欢迎的新型教材。但由于时间仓促，水平有限，缺点错误在所难免，请广大工人同志和各位读者提出宝贵意见，使该套教材日臻完善。

工人岗位技能培训系列教材编委会

1991 年 6 月

目　录

第1学习单元

检 测 基 础

一、测量方法分类

测量方法是测量时所采用的测量原理、测量器具和测量条件的总称。但是，在实际工作中，测量方法通常仅仅指获得测量结果的方式。按照不同的特点，测量方法有各种不同的分类。

（一）直接测量与间接测量

直接测量——无需对被测的量与其他实测的量进行函数关系的辅助计算而直接得到被测量值的测量。例如用游标卡尺测量零件的直径或长度；用测长仪 直接 测量 圆柱 体的直径。

间接测量——直接测量与被测的量有已知关系的其他量，再通过它们之间的函数关系得到被测量值的测量。例如图1—1所示弓形的圆弧半径R是被测的量。但直接测量半径R有困难。因此直接测量弓形高度H和弦长S，再由下式计算出半径R。

$$R=\frac{S^2}{8H}+\frac{H}{2}$$

（二）绝对测量与相对测量

绝对测量——由量具或量仪的读数装置可以直接得到被测量的整个量值的测量。例如用游标卡尺、千分尺直接测量零件的直径。

相对测量——由量具或量仪的读数装置只能得到被测量对标准量的偏差值的测量。例如用千分表与量块测量轴径D（图 1—2）时，千分表测量的是轴径相对于标准量（量块）的偏差值 ΔL。此时量块的尺寸L是轴径的基本尺寸。因此

$$D=L+\Delta L$$

在检验工作中，常常只需检查被测的量对基本尺寸的偏差即可判断工 件 是 否符 合要求。此时采用相对测量不仅可以简化测量装置，而且可以提高测量精度与效率。

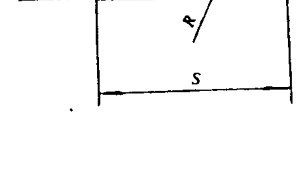


图 1—1　间接测量

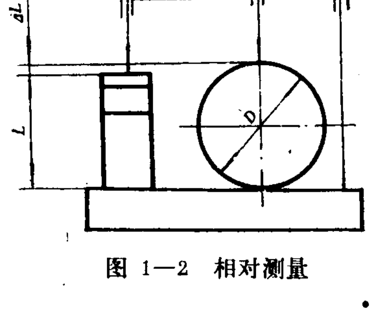


图 1—2　相对测量

（三）单项测量与综合测量

一个工件上需要检测的参数往往不止一个。对这些参数互不相关地、分别地进行测量，称为单项测量。例如分别测量螺纹的中径、螺距和半角等。

一次同时测量零件的几个相关参数的综合效应，限制它们在规定的极限范围内，以保证互换性要求的测量称为综合测量。例如用极限量规检验工件，同时控制了尺寸误差与形位误差；用螺纹塞规检验，不仅控制了螺纹的中径，同时也控制了螺纹半角和螺距。

（四）接触测量与非接触测量

接触测量——在测量过程中，量具或量仪的测量面与被测工件表面直接接触，并存在由此引起的测量力的测量。例如用游标量具、测微量具等进行测量，测量头与工件表面互相接触并存在测量力。

非接触测量——量具或量仪的测量面与被测工件表面不直接接触，没有测量力存在的测量。例如用投影仪检查工件的轮廓；用气动塞规测量孔径。

接触测量时，表面上的油污、尘埃、切屑等的影响以及测量力引起的工件和量具或量仪的弹性变形都会带来测量误差，并加速量具测量面的磨损。非接触测量可以避免上述问题，但量具和量仪的结构比较复杂。

（五）自动测量与非自动测量

自动测量——整个测量过程按测量者事先制定的程序自动或半自动完成的测量。例如自动检验机测量轴承滚珠的几何参数。由于电子技术的发展和电子计算机在工业生产中的广泛应用，自动测量已成为检测工作获得高精确度和高效率的途径。

非自动测量——测量过程中，由测量者直接操作的测量，也称手工测量。

（六）静态测量与动态测量

静态测量——测量时，被测表面与测量头是相对静止的测量。例如用游标卡尺、千分尺测量尺寸。

动态测量——测量时，被测表面与测量头有相对运动的测量。例如用激光丝杠动态检查仪测量丝杠；用激光比长仪测量精密线纹尺。

动态测量能反映被测参数的变化过程、测量效率高。一般用于要求体现运动精度的参数测量。

（七）主动测量与被动测量

主动测量——在工件加工过程中，一边加工一边进行的测量。

被动测量——工件加工完后进行的测量。

主动测量可以指示被测参数在加工过程中的变动情况，因此可以直接用来指导和控制加工，预防产生废次品。被动测量仅在事后发现和剔出废次品，起严格把关的作用。

二、测量误差

（一）测量误差的基本概念

测量误差与测量的精确度。

测量误差是指测量结果与被测量的真值之间的差。

即 $$\delta = l - L \qquad (1—1)$$

式中　δ——测量误差；

L——被测量的真值；

l——测量结果。

由于 l 可大于或小于 L，因此 δ 可能是正值或负值，即

$$L=l\pm|\delta|$$

上式说明：测量误差绝对值的大小决定了测量的精确度。误差的绝对值愈大，精确度愈低，反之愈高。因此要提高测量的精确度，只有从各方面寻找有效措施来减少测量误差。

若对大小不同的同类量进行测量，要比较其精确度，就需要采用测量误差的另一种表示方法——相对误差，即测量的绝对误差与被测量的真值之比：

$$f=\delta/L\approx\delta/l$$

式中 f——相对误差。

由式中可知，相对误差是不名数，通常用百分数（%）表示。

（二）测量误差的来源

测量误差主要来源于下列四个方面：

1．测量装置误差

测量装置指量具或量仪及其附件和提供标准量值的基准件。测量器具因为本身设计上的原因，如用近似机构代替理论机构，用均匀刻度代替理论上要求的非均匀刻度等，会给测量结果带来误差。这种误差称为原理误差。测量器具零件的制造误差和装配调整达不到理想状态，也会引起测量误差。这种由于量具、量仪及其附件不够完善引起的测量误差称为仪器误差。提供标准量值的基准件，如标准量块、标准刻度尺、标准齿轮等本身的制造误差与磨损等引起的测量误差称为基准件误差。量具、量仪在使用时未调整到正确状态，如不垂直，不水平，零位偏移等引起的测量误差称为调整误差。量具、量仪在使用中发生变形会引起变形误差。上述各种误差总称为测量装置误差。

2．方法误差

由于测量方法本身不够完善而引起的测量误差称为方法误差。例如用测量大轴圆周长 S 来间接测量轴径 d 时，因为公式 $d=S/\pi$ 中的常数 π 取近似值计算所造成的误差就属于方法误差。

3．环境误差

由于温度、湿度、气压、振动、照明、尘埃、电磁场、人的体温、光源照射等环境因素的影响而产生的测量误差称为环境误差。环境因素中温度的影响一般较大，因此规定，测量的标准温度为20℃；高精度测量应在恒温条件下进行；温度、湿度需视测量精度的不同，保持在不同的允许范围内；被测件与量具都达到标准温度后，才能进行测量。由于测量时的室温与标准温度不同而引起的测量误差 Δ 可用下式计算：

$$\Delta=Ld_1(t_1-20)-Ld_0(t_0-20)$$

式中 L——被测长度；

d_0，d_1——基准件与被测件的线膨胀系数；

t_0，t_1——基准件与被测件的温度（℃）。

4．人员误差

测量人员的分辨力、视力、责任心、质量意识、技术熟练程度、操作精细程度、思想

集中程度、操作上的固有习惯、疲劳程度和心情等都会给测量结果带来或大或小的误差。

（三）误差的分类

根据误差出现的规律，可以将误差分成三种基本类型：系统误差、随机误差和粗大误差。

1．系统误差

在偏离测量规定条件时或由于测量方法所引入的因素，按照某确定规律所引起的误差。所谓规律，是指这种误差可以归结为某一个因素或某几个因素的函数。这种函数一般可用解析公式、曲线或数表来表示。例如度盘偏心引起的角度测量误差（按正弦规律变化）；长度测量中，由于温度变化而引起的测量误差（按线性变化）等。当测量条件一定，系统误差就获得一个客观上的定值，采用多次测量的平均也不能减弱它的影响。

2．随机误差

在实际测量条件下，多次测量同一量值时，误差的绝对值和符号以不可预定方式变化着的误差。所谓随机，是指它在单次测量中，误差出现是无规律可循的。但要进行多次重复测量时，误差服从统计规律，因此常用概率论和统计原理对它进行处理。随机误差主要是由一些随机因素，如环境变化，仪器中油膜的变化以及对线、读数不一致等所引起。

3．粗大误差

所谓粗大误差是指超出在规定条件下预期的误差，即由于测量不正确等原因引起的大大超出规定条件下预期误差限的那种误差。例如工作上的疏忽、经验不足、过度疲劳以及外界条件的变化等引起的误差。并应剔除粗大误差。

系统误差和随机误差也不是绝对的，它们在一定的条件下是可以互相转化的。例如线纹尺的刻度误差，对线纹尺制造厂来说是随机误差，但如果以某一根线纹尺为基准去成批地测量别的工件时，则该线纹尺的刻度误差成为被测零件的系统误差。

（四）精度

精度是和误差相对的概念，误差是不准确、不精确的意思，即指测量结果离开真值的程度。由于误差分系统误差和随机误差，因此笼统的精度概念已不能反应上述误差的差异，从而引出如下概念。

1．精密度　表示测量结果中的随机误差大小的程度。它说明在一个测量过程中，在同一条件下进行重复测量时，所得结果彼此之间符合到什么程度。

2．正确度　表示测量结果中的系统误差大小的程度。理论上可用修正值来消除。

3．精确度（准确度）　是测量结果中系统误差与随机误差的综合，表示测量结果与真值的一致程度。

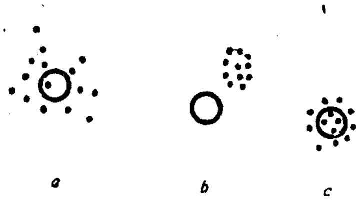


图 1—3　精度示意

一般来说，精密度高而正确度不一定高，但精确度高的，则精密度和正确度都高。

以射击为例，如图 1—3 所示，图中 a 表示系统误差小而随机误差大，即正确度高而精密度低。图中 b 表示系统误差大而随机误差小，正确度低而精密度高。图中 c 表示系统误差和随机误差都小，即精确度高。

（五）随机误差

1．随机误差的分布及其特征

如进行以下实验：对一个工件的某一部位用同一方法进行150次重复测量，测得150个不同的读数（这一系列的测得值，常称为测量列），然后将测得的尺寸进行分组，从7.131 mm到7.141 mm每隔0.001 mm为一组，共分十一组，其每组的尺寸范围如表1—1中第1列所示。每组出现的次数n_i列于该表第3列。若零件总的测量次数用N表示，则可算出各组的相对出现次数n_i/N，列于该表第4列。将这些数据画成图表，横坐标表示测得值x_i，纵坐标表示相对出现的次数n_i/N，则得图1—4 *a* 所示的图形，称频率直方图。连接每个小方图的上部中点，得一折线，称实际分布曲线。从大量实际分布曲线中，可看出多数随机误差的统计规律，一般有下列几个性质：

表 1—1　测量数据分组表

测量值范围	测量中值	出现次数n_i	相对出现次数n_i/N
7.1305—7.1315	x_1 = 7.131	n_1 = 1	0.007
7.1315—7.1325	x_2 = 7.132	n_2 = 3	0.020
7.1325—7.1335	x_3 = 7.133	n_3 = 8	0.054
7.1335—7.1345	x_4 = 7.134	n_4 = 18	0.120
7.1345—7.1355	x_5 = 7.135	n_5 = 28	0.187
7.1355—7.1365	x_6 = 7.136	n_6 = 34	0.227
7.1365—7.1375	x_7 = 7.137	n_7 = 29	0.193
7.1375—7.1385	x_8 = 7.138	n_8 = 17	0.113
7.1385—7.1395	x_9 = 7.139	n_9 = 9	0.060
7.1395—7.1405	x_{10} = 7.140	n_{10} = 2	0.013
7.1405—7.1415	x_{11} = 7.141	n_{11} = 1	0.007

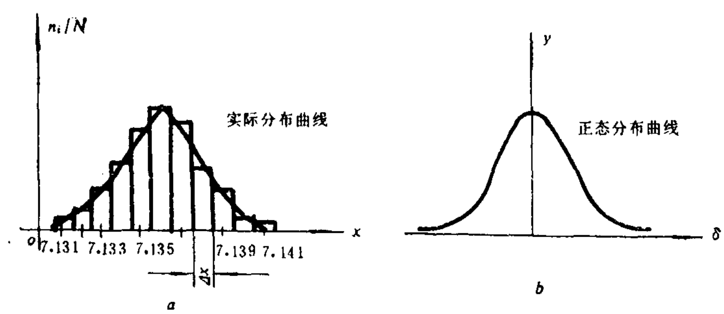


图 1—4　正态分布曲线

（1）绝对值相等的正误差和负误差出现的次数大致相等，即对称性；

（2）绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的次数多，即单峰性；

（3）在一定条件下，误差的绝对值不会超过一定的限度，即有界性；

（4）对同一量在同一条件下进行重复测量，其随机误差的算术平均值，随测量次数的增加而趋近于零，即抵偿性。

如果将上述试验的测量次数N无限增大（$N\to\infty$），而间隔Δx取得很小（$\Delta x\to 0$）则得图1—4 *b* 所示光滑曲线，即随机误差的正态分布曲线。

根据概率论可知，正态分布曲线可用下列数学公式表示，即

$$= y\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} \tag{1—2}$$

式中　y ——概率分布密度；

σ ——标准偏差；

e ——自然对数的底，等于2.71828；

δ ——随机误差。

2．评定随机误差的尺度——标准偏差

由式1—2可知，该式与随机误差 δ 和标准偏差 σ 有关，随机误差即指在没有系统误差的条件下，测得值与真值之差，即

$$\delta = l - L \tag{1—3}$$

由式 1—2 可知，当 $\delta=0$ 时，正态分布的概率密度最大，即$y_{max}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$。若 $\sigma_1<\sigma_2<\sigma_3$，则 $y_{1max}>y_{2max}>y_{3max}$。即 σ 愈小，正态分布曲线愈陡，说明随机误差分布愈集中，测量方法的精密度愈高；反之，σ 愈大，说明随机误差分布愈分散，测量方法的精密度愈低。在图1—5所示的图中，表示三个不同标准偏差的正态分布曲线，即 $\sigma_1<\sigma_2<\sigma_3$。

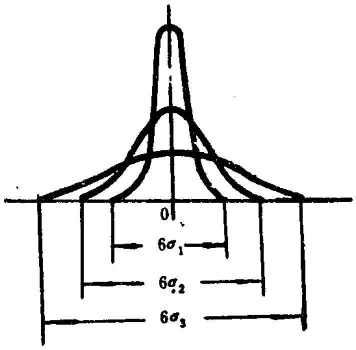
由上述可知，不存在系统误差时，测量方法精密度的高低可用标准偏差 σ 的大小来表示

$$\sigma=\sqrt{\frac{\delta_1^2+\delta_2^2+\cdots+\delta_n^2}{n}}=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_i^2}{n}} \tag{1—4}$$

式中　σ ——测量列中单次测量的标准偏差；

δ_i ——测量列中相应各次测得值与真值之差。

上式说明等精度（测量条件不变）测量列中，单次测量的标准偏差 σ，等于该系列测得值的随机误差平方和，除以被测量次数 n 所得商的平方根。



$\sigma_1<\sigma_2<\sigma_3$

图　1—5 正态分布曲线

按照概率论原理，正态分布曲线所包含的面积等于其相应区间确定的概率，即

$$P=\int_{-\infty}^{+\infty}y\mathrm{d}\delta=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\delta$$

若误差落在区间（$-\infty$、$+\infty$）之中，则其概率 $P=1$；如果我们研究误差落在区间（$-\delta$、$+\delta$）之中的概率，则上式可改写为

$$P=\int_{-\delta}^{+\delta}y\mathrm{d}\delta=\int_{-\delta}^{+\delta}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\delta$$

将上式进行变量置换，设 $t=\frac{\delta}{\sigma}$，则

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}\delta}{\sigma}$$

即
$$P=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-t}^{+t}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

这样我们就可以求出积分值P。为了应用方便，其积分值一般列成表格的形式，称为概率函数积分值表。由于函数是对称的，因此表中列出的值是由 $0\sim t$ 的积分值 $\Phi(t)$，而整个面积的积分值 $P=2\Phi(t)$。当 t 值一定时，$\Phi(t)$值可由概率函数积分表中查出。

现已查出$t=1$，2，3，4 等几个特殊值的积分值，并求出不超出 δ 区间的概率以及超出 δ 区间的概率，如表 1—2 所示。表中第 1 列为 t 值，第 2 列为随机误差 δ，第 3 列为根据 t 值在概率函数积分值表中查出的积分值 $\Phi(t)$，第 4 列为不超出 δ 的概率值$P=2\Phi(t)$，

表 1—2 δ 区间的概率

1	2	3	4	5
t	δ	$\Phi(t)$	不超出 δ 的概率 P	超出δ的概率 $P'=1-P$
1	σ	0.3413	0.6826	0.3174
2	2σ	0.4772	0.9544	0.0456
3	3σ	0.49865	0.9973	0.0027
4	4σ	0.499968	0.99936	0.00064

第 5 列为超出 δ 的概率值 $P'=1-2\Phi(t)$。从表中所列数据，可以得到下列结果：若我们进行 100 次等精度测量，当 $\delta=\sigma$ 时，可能有 32 次测得值超出$|\delta|$的范围，当 $\delta=2\sigma$ 时，4.5 次测得值超出$|\delta|$的范围；当 $\delta=3\sigma$ 时，可能有 0.27 次测得值超出$|\delta|$的范围；当 $\delta=4\sigma$ 时，可能有 0.064 次测得值超出$|\delta|$的范围。由于超出 $\delta=\pm3\sigma$ 的概率已很小，故在实践中常认为 $\delta=\pm3\sigma$ 的概率 $P\approx1$。从而将 $\delta=\pm3\sigma$ 称为随机误差的极限误差（或最大可能误差）。即
$$\delta_{\lim}=\pm3\sigma \tag{1—5}$$

所以极限误差是单次测量标准偏差的 3 倍，即随机误差绝对值不会超过的限度，如图 1—6 所示。世界上有的国家采用$\pm2\sigma$ 作为极限误差，此时，测得值在$\pm2\sigma$ 范围内的概率为95.44%。

3．算术平均值

对某一量进行一系列等精度测量时，由于随机误差的存在，其测量值均不相同，此时应以算术平均值作为最后的测量结果，即
$$\bar{L}=(l_1+l_2+\cdots+l_n)\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}l_i \tag{1—6}$$

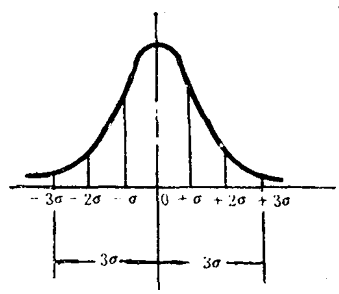


图 1—6 极限误差

式中 $\bar{L}$——算术平均值；
l_i——第 i 个测量值；
n——测量次数。

由正态分布的第四个基本性质可知，当测量次数 n 增大时，算术平均值愈趋近于真值。因此用算术平均值作为最后测量结果比用其他任一测量值作为测量结果更可靠。

4．由残余误差求标准偏差

由式 1—3 可知

$$\delta_i = l_i - L$$

当等式右端加一个 $\bar{L}$，并减一个 $\bar{L}$ 时，得：

$$\delta_i = (l_i - \bar{L}) + (\bar{L} - L) = v_i + \delta L \qquad (1—7)$$

式中 v_i——残余误差；

δL——算术平均值与真值之差；

其他代号同前。

为式 1—7 的系列值求和，得

$$\delta L = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i \quad \left(因 \sum_{i=1}^{n} v_i = 0\right) \qquad (1—8)$$

对式 1—7 系列值求平方和，得

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 + n\delta L^2 \quad \left(因\ 2\delta L \times \sum_{i=1}^{n} v_i = 0\right)$$

将式 1—8 平方后代入上式，经整理后得

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n} v_i^2} \qquad (1—9)$$

（六）系统误差

系统误差的数值往往比较大，因而在测量数据中如何发现与消除系统误差，是提高测量精确度的一个重要问题。发现系统误差的方法有多种，直观的方法是"残余误差观察法"，即根据系列测得值的残余误差，列表或作图进行观察，若残余误差大体正负相间，无显著变化规律，如表1—3中所列数据，则可认为不存在系统误差；若残余误差数值有规律地递增或递减，则存在线性系统误差；若残余误差有规律地逐渐由负变正或由正变负，则存在周期性系统误差。当然这种方法不能发现定值系统误差。

若发现系统误差存在，必须采取技术措施加以消除，或减小到最低限度，然后作为随机误差来处理。消除或减小的方法是多种多样的。譬如测量螺纹零件的螺距时，分别测出左、右牙面螺距，然后进行平均，则可抵消螺纹零件测量时安装不正确引起的系统误差。

（七）粗大误差

粗大误差会对测量结果产生明显的歪曲，因而应将它从测量数据中加以剔除。为了剔除粗大误差，应建立判断粗大误差的原则。判断粗大误差的基本原则，应以随机误差的实际分布范围为依据。凡是超出该范围的误差，就有理由视为粗大误差。但随机误差实际分布范围与误差分布规律、标准偏差估计方法、重复测量次数等有关，因而出现了判断粗大误差的各种准则，如拉依达准则、肖维勒准则、格拉布斯准则，T检验准则以及狄克逊准则等。

拉依达准则又称 3σ 准则，主要适用于服从正态分布的误差，重复测量次数又比较多的情况。其具体作法是用系列测量的一组数据，按 1—9 式算出标准偏差 σ，然后用 3σ 作

为准则来检查所有的残余误差 v_i，若某一个 $v_i>3\sigma$，则该残余误差判为粗大误差，应剔除。然后重新计算标准偏差 σ，再将新算出的残余误差进行判断直到剔除完为止。

其他判断准则，请参阅有关误差理论书籍，这里不再赘述。

（八）函数误差

例如在大型轴的加工中，用“弦长弓高法”间接测量轴的直径是一个二元函数的例子，根据几何学知

$$D=\frac{l^2}{4h}+h$$

式中　D——被测轴的直径；

l——直接测得的弦长；

h——直接测得的弓高。

间接测量就是根据测得的弦长 l 和弓高 h 按它们与轴直径 D 的函数关系算出被测轴的直径。从误差的角度来说，就是研究当弦长 l 和弓高 h 有误差时，如何估算函数 D 的误差。

二元函数的一般表达式为

$$y=f(x_1,\ x_2)$$

设直接测量的尺寸 x_1，x_2 有测量误差 δx_1、δx_2 时，函数有测量误差 δy，则

$$y+\delta y=f(x_1+\delta x_1,\ x_2+\delta x_2)$$

多元函数的增量可近似地用函数的全微分表示，则

$$\delta y=\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\delta x_2 \tag{1—10}$$

即两个自变量的函数测量误差，等于该函数对各自变量在给定点上的偏导数（误差传递系数）与其相应直接测得值误差的乘积之和。式 1—10 表示各自变量直接测量的系统误差与函数系统误差的关系。

由于随机误差的数量指标是标准偏差（或极限误差），因此它不能由式 1—10 算得。

由于自变量在给定点上的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x_1}$、$\frac{\partial f}{\partial x_2}$ 是确定值，若以 K_1、K_2 代之，则式 1—10 变为：

$$\delta y=K_1\delta x_1+K_2\delta x_2$$

当进行系列测量时，得一组方程式：

$$\left.\begin{array}{l}\delta y_1=K_1\delta x_{11}+K_2\delta x_{21}\\ \delta y_2=K_1\delta x_{12}+K_2\delta x_{22}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \delta y_n=K_1\delta x_{1n}+K_2\delta x_{2n}\end{array}\right\} \tag{1—11}$$

将式 1—11 两边平方相加，并同除以 n，得

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta y_i^2=K_1^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta x_{1i}^2+K_2^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta x_{2i}^2+2K_1K_2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta x_{1i}\delta x_{2i}$$

由概率论知：$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta x_{1i}\delta x_{2i}$ 叫做相关矩，而独立随机变量的相关矩是等于零的，故

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta y_i^2=K_1^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta x_{1i}^2+K_2^2\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta x_{2i}^2$$

则
$$\sigma_y=\sqrt{K_1^2\sigma_{x1}^2+K_2^2\sigma_{x2}^2}$$

或
$$\sigma_y=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\sigma x_1^2\ +\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\sigma x_2^2}\tag{1—12}$$

即两个独立变量的函数标准偏差，等于该函数对各变量在给定点上的偏导数（误差传递系数）与其相应直接测得值标准偏差乘积之平方和的平方根。式 1—12 表示各独立自变量与函数间随机误差的关系。

若将式 1—12 的等号两边同乘以 3，则得极限误差表达式：

$$\delta_{1\mathrm{im}y}=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\delta_{1\mathrm{im}x_1}+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\delta^2_{1\mathrm{im}x_2}}\tag{1—13}$$

同理，可以得到多个独立变量的函数误差表达式、标准偏差表达式和极限误差表达式

$$\delta_y=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\ \delta x_1+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\ \delta x_2+\cdots\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\delta x_n\tag{1—14}$$

$$\sigma_y=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\sigma^2x_1\ +\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\sigma^2x_2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2\sigma^2x_i}\tag{1—15}$$

$$\delta_{1\mathrm{im}y}=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\delta_{1\mathrm{im}x_1}+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\delta^2_{1\mathrm{im}x_2}+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2\delta_{1\mathrm{im}x_n}}\tag{1—16}$$

〔**例**〕 用弦长弓高法测量工件的直径。

1．若各尺寸已通过测定为：$L=100$ mm，$\delta L=5$ μm，$h=20$ mm，$\delta h=4$ μm。则可根据式 1—10 计算直径D的测量误差

$$\delta_D=\left(\frac{\partial f}{\partial L}\right)\ \delta L+\left(\frac{\partial f}{\partial h}\right)\delta h$$

因为
$$\frac{\partial f}{\partial L}=\frac{1}{4\,h}\ \times 2L=\frac{200}{80}=2.5$$

$$\frac{\partial f}{\partial h}=-\frac{L^2}{4h^2}\ +1=-\frac{100^2}{4\times 20^2}+1=-5.25$$

则
$$\delta_D=2.5\times 5+(-5.25)\times 4=12.5-21=-8.5(\mu\mathrm{m})$$

2．若尺寸L、h测定的极限误差为：$\delta_{1\mathrm{im}_L}=\pm 2$ μm，$\delta_{1\mathrm{im}_h}=\pm 1$ μm 则可根据式 1—13 计算直径D的测量极限误差

$$\delta_{1\mathrm{im}D}=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial L}\right)^2\delta^2_{1\mathrm{im}_L}+\left(\frac{\partial f}{\partial h}\right)^2\delta_{1\mathrm{im}_h}}$$

$$=\pm\sqrt{(2.5)^2\times 2^2+(-5.25)^2\times 1^2}\approx\pm 7.25(\mu\mathrm{m})$$

三、等精度测量数据的处理

在同一条件下（即等精度条件），对某一量进行n次重复测量，获得测量列l_1、$l_2\cdots l_n$。

在这些测量值中，可能同时包含有系统误差、随机误差和粗大误差，为了获得可靠的测量结果，对测量列应按上述误差分析原理进行处理，其处理步骤归纳如下：

1．判断系统误差

首先根据发现系统误差的各方种法判断测得值中是否含有系统误差，若已掌握系统误差的大小，则可用修正法将它消除。

2．求算术平均值

消除系统误差后，可求出测量列的算术平均值，即

$$\bar{L}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}l_i$$

3．计算残余误差

由式 1—3 可知：随机误差 $\delta_i=l_i-L$，真值 L 一般情况下为未知，因而不能按式 1—3 求得随机误差，这时可用算术平均值 $\bar{L}$ 代替被测量的真值 L，即

$$\nu_i=l_i-\bar{L} \tag{1—17}$$

式中 ν_i——称为第 i 个测得值 l_i 的残余误差。

4．计算标准偏差

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\nu_i^2}$$

5．判断粗大误差并将其剔除

6．求算术平均值的标准偏差 $\sigma_{\bar{L}}$

因 $$\bar{L}=\frac{1}{n}(l_1+l_2+\cdots l_n)=\frac{1}{n}l_1+\frac{1}{n}l_2+\cdots+\frac{1}{n}l_n$$

可以将它视为各测得值的函数，由式 1—15 得：

$$\sigma_{\bar{L}}=\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2\sigma_{L_1}^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2\delta_{L_2}^2+\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)^2\sigma_{L_n}^2}$$

由于是等精度测量，则

$$\sigma_{L_1}=\sigma_{L_2}=\cdots\sigma_{L_n}=\sigma$$

所以 $$\sigma_{\bar{L}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{1—18}$$

式中 σ——测量列中单次测量的标准偏差。

由上式可知，在 n 次等精度测量中，算术平均值的标准偏差 $\sigma_{\bar{L}}$ 要比单次测量的标准偏差小 $\sqrt{n}$ 倍，当 n 愈大时，所得的算术平均值愈接近真值，测量的精密度愈高。

算术平均值的标准偏差用残余误差表示为

$$\sigma_{\bar{L}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\nu_i^2} \tag{1—19}$$

7．测量结果的表示

单次测量时：$L=l\pm3\sigma=l\pm\delta_{\lim}$ (1—20)

多次测量时：$L=\bar{L}\pm3\sigma_{\bar{L}}=\bar{L}\pm\delta_{\lim_{\bar{L}}}$ (1—21)

式中 L——测量结果；

$\bar{L}$——测量列的算术平均值；

$\delta_{\lim}$——单次测量极限误差；

$\delta_{\lim_{\bar{L}}}$——多次测量极限误差。

〔**例**〕 对某一工件的同一部位进行多次重复测量，测得值 l_i 列于表 1—3，试求其测量结果。

表 1—3 多次重复测量的数据处理 (mm)

序号	l_i	$\nu_i = l_i - \bar{L}$	ν_i^2
1	30.049	+0.001	0.000001
2	30.047	−0.001	0.000001
3	30.048	0	0
4	30.046	−0.002	0.000004
5	30.050	+0.002	0.000004
6	30.051	+0.003	0.000009
7	30.043	−0.005	0.000025
8	30.052	+0.004	0.000016
9	30.045	−0.003	0.000009
10	30.049	+0.001	0.000001
	300.48		
	$\bar{L} = \frac{\Sigma l_i}{n} = 30.048$	$\sum_{i=1}^{n} \nu_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} \nu_i^2 = 0.00007$

解：

（1）判断系统误差

根据发现系统误差的有关方法判断，测量列中已无系统误差。

（2）求算术平均值

$$\bar{L} = \frac{\Sigma l_i}{n} = 30.048(\text{mm})$$

（3）求残余误差 ν_i

$$\nu_i = l_i - \bar{L}$$

根据“残余误差观察法”进一步判断，测量列中也不存在系统误差。

（4）求标准偏差

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma \nu_i^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0.00007}{9}} = 0.0028(\text{mm})$$

（5）判断粗大误差

用拉依达准则，$3\sigma = 3 \times 0.0028 = 0.0084$，故不存在粗大误差。

（6）求算术平均值的标准偏差

$$\sigma_{\bar{L}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.0028}{\sqrt{10}} = 0.00088(\text{mm})$$

（7）测量结果

$$L = \bar{L} \pm 3\sigma_{\bar{L}} = 30.048 \pm 0.0026(\text{mm})$$