华章数学译丛

20

Mathematical Analysis
(Second Edition)

数学分析（原书第2版）

（美）Tom M. Apostol 著

邢富冲 邢辰 李松洁 贾婉丽 译

机械工业出版社
China Machine Press

20

Mathematical Analysis

(Second Edition)

数学分析（原书第2版）

（美） Tom M. Apostol 著

邢富冲　邢辰　李松洁　贾婉丽　译

机械工业出版社
China Machine Press

本书是美国著名的数学分析教材，涵盖了初等微积分以及实变函数论和复变函数论等内容，涉及现代分析的最新进展．书中包含大量覆盖各个方面、各级难度的习题，通过习题的训练，可以培养学生的运算技能和对数学问题的思维能力．

本书条理清晰，内容精练，言简意赅，可作为高等院校数学与应用数学、信息与计算科学等专业学生的教材，同时也可作为数学工作者和科技人员的参考书．

本书版权登记号：图字：01-2004-3692

图书在版编目（CIP）数据

数学分析（原书第2版）/（美）阿波斯托尔（Apostol, T. M.）著；邢富冲等译．—北京：机械工业出版社，2006.3

（华章数学译丛）

书名原文：Mathematical Analysis, Second Edition

ISBN 7-111-18014-3

Ⅰ．数…　Ⅱ．①阿…　②邢…　Ⅲ．数学分析　Ⅳ．O17

中国版本图书馆CIP数据核字（2005）第145348号

机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街22号　邮政编码　100037）

责任编辑：方　敏　迟振春

北京诚信伟业印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行

2006年3月第1版第1次印刷

787mm×1020mm 1/16 · 25.75印张

印数：0 001-4 000册

定价：55.00元

凡购本书，如有倒页、脱页、缺页，由本社发行部调换

本社购书热线：(010)68326294

译 者 序

1997～1998年我在美国作高级访问学者的时候，曾与几位朋友一起到加州理工学院出席过南加州北京大学校友会活动，那时我就知道加州理工学院是一个非常出色的学校，我们十分喜欢的数学软件 Mathematica 的创始人 Stephen Wolfram 就毕业于加州理工学院. 后来，我的北大校友高速在 UCLA(加利福尼亚大学洛杉矶分校)取得博士学位后到加州理工学院作博士后研究，我们经常保持联系，无形中我对加州理工学院产生了更加亲切的感觉. 所以，今年初，当机械工业出版社推荐英文原版书让我翻译时，我非常高兴地选择了加州理工学院的 Tom M. Apostol 教授所著的这本《数学分析》.

本书是与我国读者比较熟悉的 Walter Rudin 的《Principles of Mathematical Analysis》[㊀] 和《Real and Complex Analysis》[㊁] 齐名的现代数学名著. 自20世纪70年代问世以来，一直受到西方学术界、教育界的广泛推崇，被许多知名大学指定为教材.

本书对于我国高校数学分析及函数论课程的设置及教材改革颇具参考价值.

如果说几十年前我国大学数学类专业开设数学分析、解析几何、高等代数、复变函数、实变函数、点集拓扑、泛函分析等等基础课、专业基础课及专门化的课程觉得四年的时间很紧张(因而曾有过五年甚至六年学制的尝试)的话，那么，在计算机基础及应用、程序设计语言、数学软件、数据结构、软件工程等计算机类课程也都成为了数学与应用数学专业以及信息与计算科学专业学生的课程的今天，四年的时间就更显得紧张.

一方面时间紧、课程多，另一方面时间的利用存在着浪费的现象，不同课程中的内容有一定的重复. 比如，集合论基础的某些内容在数学分析、解析几何、高等代数、复变函数、实变函数、点集拓扑、泛函分析及其他一些课程中都要介绍；复变函数论课程的一些概念、理论、方法甚至习题的内容与数学分析课程有相当多的重叠. 内容的重复不仅造成时间的浪费，而且有时不同的课程、不同的教材对同样的概念采用不同的记号，还会给学生造成更多无谓的麻烦. 这个矛盾不仅在中国存在，在发达国家，例如美国，当然也存在. 美国在计算机方面走在世界的前列，他们也必然更早地感受到了对课程和教材进行改革的必要性.

美国大学在课程设置及教材方面的一些做法可以供我们参考和借鉴. 我们还没有机会对美国等国家大学数学类或数学与计算机类专业的课程设置及教材状况进行全面的考察，但是从各种渠道，我们对美国大学的情况也多少有一些了解.

在美国，数学分析分为初等微积分和高等微积分. 初等微积分相当于我们的一元及多元微积分，高等微积分除了我们的数学分析中的一些内容之外，还包括复变函数论和实变函数论等内容. 美国的大学本科生要学数学分析，研究生阶段仍然要学数学分析(高等微积分).

我国大学本科生的课程比美国的深，既学数学分析(相当于美国的初等微积分)，又学复变函数论和实变函数论(基本包含美国的高等微积分). 我国数学及相关专业的本科生进入研究生阶段之后，一般不再有数学分析课程，也不再把已在本科学过的留数定理和勒贝格积分等内容

㊀、㊁ 这两本书的英文版、中文版都已由机械工业出版社引进出版. ——编辑注

纳入哪门课程来学.

本书既包括我国大学的数学分析课程的内容，又包括勒贝格积分及柯西定理和留数计算，所以包括我们的数学分析以及实变函数论与复变函数论的主要内容.

本书在美国既作为本科生教材又作为研究生教材，但是在我国只能作为本科生教材，只是我们的数学分析中一般不介绍斯蒂尔切斯积分，而且不介绍该书所包含的一些较新的成果.

如果使用本书作为教材，可以对我们现行课程设置中的数学分析、实变函数论、复变函数论进行综合改革，这样会促进教材内容有一定的现代化，避免一些重复，从而使总学时得到适当的削减. 本书条理清晰，内容精练，言简意赅，在正文及练习中包含较新的成果，但不像前苏联的教材那样细腻. 我国传统的教材受前苏联的影响较大，因而在使用本书时，也许一方面会有一些新鲜感，另一方面也许不会像我们已习惯的教材那样驾轻就熟，因而需要进行试验，需要加强教学研究.

关于本书术语的翻译，我们主要参考了科学出版社在 2002 年出版的《新英汉数学词汇》一书. 例如“triangle inequality”，以前的书中“三角不等式”和“三角形不等式”的译法都有. 我个人觉得后者比前者更形象、更直观，因而更好. 可是《新英汉数学词汇》用的是前者，所以我们在本书中也译为前者.

还有几个地方我们也参照《新英汉数学词汇》采用了与习惯说法稍有不同的译法.

本书由邢富冲、邢辰、李松洁、贾婉丽共同翻译完成，由于时间仓促，而且水平有限，不当之处在所难免，希望广大读者批评指正.

邢富冲

2005 年 10 月于北京

前　言

从目录可以看出，本教科书是在"高等微积分"的水平上阐述数学分析中的论题. 编写本书的目的在于展现这门学科，要求它的叙述忠实于原貌、精确严密、包含最新进展，同时又不过于学究气. 本书提供了从初等微积分向实变函数论及复变函数论中的高等课程的一种过渡，而且介绍了某些涉及现代分析的抽象理论.

本书第 2 版与第 1 版在很多方面有所不同，主要表现在以下方面：在考虑一般的度量空间以及 n 维欧氏空间时介绍点集拓扑；增加了关于勒贝格积分的两章；删去了曲线积分、向量分析和曲面积分的材料；重排了某些章的顺序；完全重写了很多节；还增加了若干新的练习.

勒贝格积分由 Riesz-Nagy 方法引入，此方法直接着眼于函数及其积分，而不依赖于测度论. 为了适应大学本科水平的教学，在介绍勒贝格积分时，进行了简化、延伸和调整.

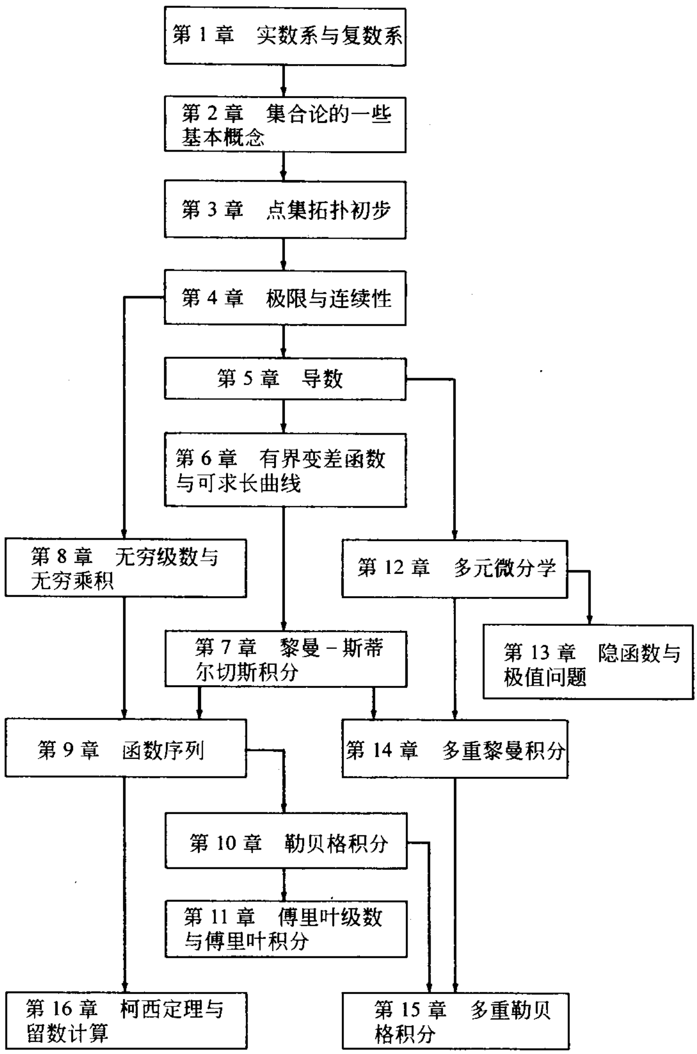
本书第 1 版曾被用于从本科一年级到研究生一年级各种水平的数学课程，既用作教科书，又用作补充参考书. 第 2 版保留了这种灵活性. 例如，第 1 章至第 5 章及第 12 章和第 13 章可用于单变量或多变量函数的微分学课程. 第 6 章至第 11 章及第 14 章和第 15 章可用于积分论的课程. 也可以按其他方式进行多种组合；教师可以参考下一页的图示选择适当的章节满足自己的需要. 图中显示了各章之间的逻辑依赖关系.

我要向不厌其烦地就第 1 版写信给我的许多人表示感谢，他们的评论和建议有助于我对第 2 版的修改. 特别要感谢 Charalambos Aliprantis 博士，他细心地阅读了第 2 版的全部手稿并提出了许多有益的建议，还提供了某些新的练习. 最后，向加州理工学院的学生们表示由衷的感谢，是他们对数学的热情激发了我编著此书的原动力.

T. M. A.

1973 年 9 月于帕萨迪纳

各章逻辑关系图


第 1 章　实数系与复数系
第 2 章　集合论的一些基本概念
第 3 章　点集拓扑初步
第 4 章　极限与连续性
第 5 章　导数
第 6 章　有界变差函数与可求长曲线
第 8 章　无穷级数与无穷乘积
第 12 章　多元微分学
第 13 章　隐函数与极值问题
第 7 章　黎曼－斯蒂尔切斯积分
第 9 章　函数序列
第 14 章　多重黎曼积分
第 10 章　勒贝格积分
第 11 章　傅里叶级数与傅里叶积分
第 16 章　柯西定理与留数计算
第 15 章　多重勒贝格积分

目　录

第1章　实数系与复数系

1.1　引言

数学分析研究的是以某种方式与实数有关的概念，所以我们从对实数系的讨论开始我们的研究.

可以用几种不同的方法介绍实数，一种方法是从正整数 1，2，3，…开始，以此作为不加定义的概念并用于构建一个更大的数系：正有理数(正整数之商)，与它们相反的数和零. 然后用有理数构建无理数——像$\sqrt{2}$和 π 这样的不是有理数的实数. 有理数和无理数一起组成实数系.

虽然这些内容是数学基础的重要部分，但是在这里我们不准备对它们加以详谈. 事实上，在数学分析的大部分内容中，我们更关心的是实数的性质，而不是构建它们所用的方法. 因此，我们将把实数本身作为满足某些公理的不加定义的对象，并从公理出发导出实数的进一步的性质. 考虑到读者可能对于以下几页讨论的实数性质中的大部分内容都很熟悉，所以我们的介绍将相当扼要. 其目的是复习一下实数的重要特性，并告诉读者：如果需要追根溯源，则所有这些性质都可以由那些公理导出. 更详细的论述可以在本章末所列的参考文献中找到.

为方便起见，我们使用一些基本的集合的记号和术语. 设 S 表示一个集合(一堆元素). $x\in S$表示元素 x 在集合 S 内，$x\notin S$ 表示 x 不在 S 内.

集合 S 称为 T 的一个子集，并记为 $S\subseteq T$，如果 S 中的每一个元素都在 T 内. 如果一个集合包含至少一个元素，则称之为非空.

我们假定存在一个由称为实数的对象组成的非空集合 **R**，实数满足下文所列的 10 条公理. 这 10 条公理按它们的性质可以分为三组，我们分别把它们称之为域公理、序公理和完全公理(又称为上确界公理或连续性公理).

1.2　域公理

对于实数集 **R**，我们假定存在两种运算，分别称为加法和乘法，使得对于每一对实数 x 和 y，
其和 $x+y$ 与乘积 xy 是由 x 和 y 唯一确定且满足下述公理的实数. (下述公理中的 x，y，z 都 1
表示任意实数，除非另有说明.)

公理 1　$x+y=y+x$，$xy=yx$.　　(交换律)

公理 2　$x+(y+z)=(x+y)+z$，$x(yz)=(xy)z$.　　(结合律)

公理 3　$x(y+z)=xy+xz$.　　(分配律)

公理 4　给定任意两个实数 x 和 y，存在一个实数 z 使得 $x+z=y$. 这个 z 可以用 $y-x$ 表示；数 $x-x$ 用 0 表示. (可以证明 0 不依赖于 x.)我们把 $0-x$ 写为$-x$，$-x$ 称为与 x 相反的数.

公理 5　至少存在一个实数 $x\neq 0$. 如果 x 与 y 是两个实数，同时 $x\neq 0$，则存在一个实数 z 使得 $xz=y$. 这个 z 用 y/x 来表示；数 x/x 用 1 表示，而且可以证明 1 不依赖于 x. 如果 $x\neq 0$，则把 $1/x$ 记为 x^{-1}并称之为 x 的倒数.

从这些公理可以导出全部通常的算术法则；例如，$-(-x)=x$，$(x^{-1})^{-1}=x$，$-(x-y)=y-x$，$x-y=x+(-y)$，等等.（对于较详细的解释，见参考文献 1.1.）

1.3 序公理

我们还假定存在一种关系$<$，用这种关系可以在实数当中建立顺序，且它满足下述公理：

公理 6 关系式 $x=y$，$x<y$，$x>y$ 中恰有一个成立.

注 $x>y$ 与 $y<x$ 表示同样的意思.

公理 7 如果 $x<y$，则对于任何 z 都有 $x+z<y+z$.

公理 8 如果 $x>0$ 且 $y>0$，则 $xy>0$.

公理 9 如果 $x>y$ 且 $y>z$，则 $x>z$.

注 设 x 是一个实数，当 $x>0$ 时称 x 为正数，当 $x<0$ 时称 x 为负数. 用 $\mathbf{R}^+$ 表示由全体正数组成的集，用 $\mathbf{R}^-$ 表示由全体负数组成的集.

从这些公理可以导出通常的不等式运算法则. 例如，如果 $x<y$，则当 z 是正数时有 $xz<yz$，而当 z 是负数时有 $xz>yz$. 还有，如果 $x>y$，$z>w$，其中 y 和 w 都是正数，则有 $xz>yw$.（对这些法则的完整的讨论见参考文献 1.1.）

注 符号 $x\leqslant y$ 是

2 $$\text{“}x<y \quad \text{或} \quad x=y\text{”}$$

的缩写. 因此有 $2\leqslant 3$，因为 $2<3$；有 $2\leqslant 2$，因为 $2=2$. 符号$\geqslant$可类似地使用. 实数 x 称为是非负的，如果 $x\geqslant 0$. 两个同向不等式，例如 $x<y$，$y<z$，通常简写为 $x<y<z$.

下述定理是前述公理的简单推论，在数学分析的证明中经常用到这个定理.

定理 1.1 给定实数 a 与 b 使得对于每一个 $\varepsilon>0$ 都有

$$a\leqslant b+\varepsilon, \tag{1}$$

则 $a\leqslant b$.

证明 如果 $b<a$，则当 $\varepsilon=(a-b)/2$ 时不等式(1)不成立，因为这时

$$b+\varepsilon=b+\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2}<\frac{a+a}{2}=a.$$

于是由公理 6 必有 $a\leqslant b$. ■

公理 10(即完全公理)将于 1.11 节介绍.

1.4 实数的几何表示

实数经常被几何地表示为一条直线(称为实线或实轴)上的点. 选取一个点表示 0，另一个点表示 1，如图 1-1 所示. 这种选择将确定比例尺. 在一个适当的对于欧几里得几何建立的公理体系下，实线上的每一个点对应于且仅对应于一个实数，反过来，每一个实数由且仅由实线上的一个点表示. 通常就说点 x，而不必说“表示实数 x 的点”.

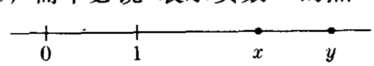


图 1-1

次序关系有一个简单的几何解释．如果 $x<y$，则点 x 位于点 y 的左边，如图 1-1 所示．正数位于 0 的右边，负数位于 0 的左边．如果 $a<b$，则点 x 满足不等式 $a<x<b$ 当且仅当 x 位于 a 与 b 之间．

1.5 区间

由位于 a 与 b 之间的全部点组成的集合称为一个区间．有时区分包含端点的区间和不包含端点的区间是很重要的．

记号 记号 $\{x$：x 满足 $P\}$ 表示由满足性质 P 的全部实数 x 构成的集合． 3

定义 1.2 假定 $a<b$．开区间 (a, b) 定义为集合

$$(a,b)=\{x:a<x<b\}.$$

闭区间 $[a, b]$ 是集合 $\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$．半开区间 $(a, b]$ 和 $[a, b)$ 分别用不等式 $a<x\leqslant b$ 和 $a\leqslant x<b$ 类似地定义．无穷区间定义如下：

$$(a,+\infty)=\{x:x>a\},\qquad [a,+\infty)=\{x:x\geqslant a\},$$
$$(-\infty,a)=\{x:x<a\},\qquad (-\infty,a]=\{x:x\leqslant a\}.$$

实线 $\mathbf{R}$ 有时看作是开区间 $(-\infty, +\infty)$．单独一点可以认为是一个“退化的”闭区间．

注 此处使用符号 $+\infty$ 和 $-\infty$ 纯粹是为了表示的方便，它们并不是实数．以后我们会把实数系进行扩充使之包含这两个符号，但是即使是在扩充了之后，读者也应该明白所有的实数都是“有限”的．

1.6 整数

本节讲述整数——$\mathbf{R}$ 的一个特殊的子集．在定义整数之前宜首先介绍归纳集的概念．

定义 1.3 一个实数集称为归纳集，如果它有下述两条性质：

a)数 1 在此集内．

b)对于此集内的每一个 x，$x+1$ 也在此集内．

例如，$\mathbf{R}$ 是一个归纳集，集合 $\mathbf{R}^+$ 也是归纳集．现在我们将把正整数定义为属于每一个归纳集的那些实数．

定义 1.4 一个实数称为正整数，如果它属于每一个归纳集．正整数构成的集用 $\mathbf{Z}^+$ 表示．

集合 $\mathbf{Z}^+$ 本身就是一个归纳集．它包含数 1，数 $1+1$(用 2 表示)，数 $2+1$(用 3 表示)，等等．既然 $\mathbf{Z}^+$ 是每一个归纳集的子集，我们可以认为 $\mathbf{Z}^+$ 是最小的归纳集．$\mathbf{Z}^+$ 的这个性质有时称为归纳法原则．我们假定读者熟悉基于此原则的用归纳法的证明(见参考文献 1.1)．这种证明的例子在下一节给出．

与正整数相反的数称为负整数．正整数与负整数以及 0(零)一起构成一个集合 $\mathbf{Z}$，我们简单地称之为整数集．

1.7 整数的唯一因数分解定理

如果 n 和 d 都是整数而且对于某个整数 c 有 $n=cd$，我们就说 d 是 n 的一个因数，或说 n 是 d 的一个倍数，记为 $d\mid n$(读作 d 整除 n)．一个整数 n 当 $n>1$ 时称为素数，如果 n 的正因 4

数只有 1 和 n 本身. 如果 $n>1$ 而 n 不是素数，则 n 称为合数. 整数 1 既不是素数，也不是合数.

本节将导出整数因式分解的一些初步结果，并最终导出唯一因数分解定理，也叫算术基本定理.

该基本定理陈述为：(1)每个整数 $n>1$ 都能表示为素因数的乘积，(2)这个因数分解除了因数的次序可能不同之外只能用一种方法完成. 第(1)部分的证明是容易的.

定理 1.5 *每个整数 $n>1$ 或者是一个素数，或者是一些素数的积.*

证明 我们对 n 使用归纳法. $n=2$ 时定理显然成立. 现在假定对于每一个整数 $k(1<k<n)$ 命题成立. 如果 n 不是素数，则它有一个正因数 d，其中 $1<d<n$. 于是 $n=cd$，其中 $1<c<n$. 既然 c 与 d 都小于 n，它们就都是素数或是素数之积；从而 n 是素数之积. ■

在证明第(2)部分即因式分解的唯一性之前，我们再介绍几个概念.

如果 $d\mid a$ 且 $d\mid b$，我们就说 d 是 a 和 b 的一个公因数. 下一个定理表明，每一对整数 a 和 b 都有一个公因数，它是 a 和 b 的线性组合.

定理 1.6 *每一对整数 a 与 b 都有一个公因数 d，形为*

$$d = ax + by,$$

其中 x 和 y 都是整数. 而且，a 和 b 的每一个公因数都能整除这个 d.

证明 首先假定 $a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$，并对 $n=a+b$ 使用归纳法. 如果 $n=0$，则 $a=b=0$，可取 $d=0$，$x=y=0$. 然后，假设定理已经对于 0，1，2，…，$n-1$ 进行了证明，按对称性，我们可以假定 $a\geqslant b$. 如果 $b=0$，取 $d=a$，$x=1$，$y=0$ 即可. 如果 $b\geqslant 1$，我们可以对于 $a-b$ 和 b 使用归纳法假设，因为它们的和是 $a=n-b\leqslant n-1$. 因此，$a-b$ 和 b 有公因数 d，其形式为$d=(a-b)x+by$. 这个 d 也能整除$(a-b)+b=a$，所以 d 是 a 和 b 的公因数，且有 $d=ax+(y-x)b$，这是 a 和 b 的一个线性组合. 为了完成证明，我们还需要证明 a 和 b 的每一个公因数都能整除 d. 既然公因数能整除 a 和 b，它就也能整除线性组合 $ax+(y-x)b=d$. 这就在 $a\geqslant 0$ 且 $b\geqslant 0$ 的情况下完成了证明. 如果 a 和 b 中的一个或两个是负数，则只需对 $|a|$ 和 $|b|$ 应用刚刚证完的结果. ■

> **注** 如果 d 是 a 和 b 的公因数，形式为 $d=ax+by$，则 $-d$ 也是同样形式的公因数：$-d=a(-x)+b(-y)$. 这两个公因数中非负的一个称为 a 和 b 的最大公因数，并记为 $\gcd(a, b)$，或简记为(a, b). 如果$(a, b)=1$，则 a 和 b 称为互素.

5 **定理 1.7**(欧几里得引理) *若 $a\mid bc$ 且$(a, b)=1$，则 $a\mid c$.*

证明 因为$(a, b)=1$，所以可以写 $1=ax+by$，于是 $c=acx+bcy$. 但是 $a\mid acx$ 且 $a\mid bcy$，所以 $a\mid c$. ■

定理 1.8 *如果素数 p 整除 ab，则 $p\mid a$ 或 $p\mid b$. 更一般地，若素数 p 整除 $a_1\cdots a_k$，则 p 至少整除这些因数当中的一个.*

证明 假设 $p\mid ab$ 而 p 不能整除 a. 如果能证明$(p, a)=1$，则由欧几里得引理就能得出 $p\mid b$. 设 $d=(p, a)$，则 $d\mid p$，所以 $d=1$ 或 $d=p$，不可能是 $d=p$，因为 $d\mid a$ 而 p 不能整除 a. 这样就有$d=1$. 为了证明更一般的情况，可以对因数的个数 k 使用归纳法. 细节留给读者. ■

定理 1.9(唯一因数分解定理) *每一个整数 $n>1$ 都可以用唯一的方法表示为素因数之积，不同之处至多只能是因数的次序.*

证明 对 n 用归纳法. 当 $n=2$ 时定理成立. 现在假定定理对于所有比 1 大而比 n 小的整数成立. 若 n 是素数则无需证明. 所以假设 n 是合数而且 n 有两种素因数分解方法，比如

$$n = p_1 p_2 \cdots p_s = q_1 q_2 \cdots q_t. \tag{2}$$

我们希望证明 $s=t$，而且每个 p 等于某个 q. 既然 p_1 整除乘积 $q_1 q_2 \cdots q_t$，它就至少整除一个因数. 必要的话可以重排各个因数 q 的次序使得 $p_1 \mid q_1$. 于是 $p_1=q_1$，因为 p_1 和 q_1 二者都是素数. 在(2)式得两边消去 p_1 可得

$$\frac{n}{p_1} = p_2 \cdots p_s = q_2 \cdots q_t.$$

既然 n 是合数，所以 $1<n/p_1<n$；所以按照归纳法假设，n/p_1 的这两个因式分解式是相同的，不同之处至多只能是各因数的次序. 从而在(2)式中也是如此. ■

1.8 有理数

整数的商 a/b(其中 $b \neq 0$)称为*有理数*. 例如，$1/2$，$-7/5$ 和 6 都是有理数. 有理数集合(记为 $\mathbf{Q}$)包含 $\mathbf{Z}$ 作为子集. 读者应该注意，$\mathbf{Q}$ 满足全部域公理和序公理.

我们假定读者熟悉有理数的某些初等性质. 例如，若 a 和 b 都是有理数，则它们的平均数 $(a+b)/2$ 也是有理数且位于 a 与 b 之间. 因而在任何两个有理数之间有无穷多个有理数，这意味着，如果给定了某一个有理数，我们不能说“下一个最大的”有理数这样的话. 6

1.9 无理数

非有理数的实数称为*无理数*. 例如 $\sqrt{2}$，e，π 和 e^{π} 这些数都是无理数.

要证明某个特定的数是无理数通常不是太容易. 例如，对于 e^{π} 是无理数就没有一个简单的证明. 然而，像 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$ 这样的数是无理数不是太难证明的，而且，事实上，我们很容易证明下述定理：

定理 1.10 *若 n 是一个正整数却不是一个完全平方数，则 $\sqrt{n}$ 是无理数.*

证明 首先假设 n 不包含大于 1 的平方因数. 然后假定 $\sqrt{n}$ 是有理数，我们将推出矛盾. 设 $\sqrt{n}=a/b$，其中 a 和 b 是没有公因数的整数. 于是可得 $nb^2=a^2$，而且，既然这个等式的左边是 n 的倍数，右边的 a^2 就也是 n 的倍数. 然而，如果 a^2 是 n 的倍数，a 本身必定是 n 的倍数，因为 n 没有大于 1 的平方因数. (检查 a 的素因数分解式很容易看到这一点.)这意味着 $a=cn$，其中 c 是某个整数. 于是等式 $nb^2=a^2$ 变成 $nb^2=c^2n^2$，或者 $b^2=nc^2$. 同样的讨论可以证明 b 必定也是 n 的一个倍数. 这样 a 和 b 都是 n 的倍数，这同它们没有公因数的假设矛盾. 这就完成了在 n 没有大于 1 的平方因数情况下的证明.

如果 n 有平方因数，我们可以写 $n=m^2k$，其中 $k>1$ 而且 k 没有大于 1 的平方因数，于是 $\sqrt{n}=m\sqrt{k}$；如果 $\sqrt{n}$ 是有理数，则 $\sqrt{k}$ 也将是有理数，这同刚才证明的结论矛盾. ■

证明数 e 是无理数需要另一种类型的论证. (假定从初等微积分中已熟悉指数函数 e^x 及其