高等学校教学用書

流体力学

下册

A. H. 巴特勒雪夫著
戴昌暉等譯

高等教育出版社

本書系根据苏联海軍部海軍出版社(Военно-морское издательство Военно-морского министерства Союза ССР) 1953 年出版的巴特勒雪夫 (А. Н. Патрашев) 著“流体力学”(Гидромеханика) 一書譯出，可作为高等工业院校流体力学課程的教学参考書，也可供有关部門的工作人員参考。

原書共計十三章，中譯本分上下二册出版。本書为下册，內容为粘性流体动力学，包括第七到十三章。書中叙述了粘性流体动力学的一般方程式、層流、紊流、力学相似、附面層、緩变流动、匀速流动及物体阻力等理論和計算方法，并着重于技术部門的实际应用；其中每一实际問題的解答均与实验結果相比較，并指出其应用的范圍。

本書由西北工业大学 503 教研組譯出。参加下册譯校工作的有王培生、戴昌暉、陈士橹、王适存、赵令誠、陈叔章諸同志，由赵令誠同志担任最后的校訂工作。

流 体 力 学

下 册

A. H. 巴特勒雪夫著

戴 昌 暉 等 譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺 7 号

（北京市書刊出版业营业許可証出字第 054 号）

京华印書局印装 新华書店發行

統一書号 13010·624 开本 850×1168 1/32 印張 16 6/16

字数 430,000 印数 0001—5,000 定价(6) ￥1.80

1959 年 8 月第 1 版 1959 年 8 月北京第 1 次印刷

目　录

第七章　粘性流体动力学的一般方程式

§1. 粘性流体·在粘性流体中的应力

在运动时，对于剪切力显示阻抗作用的流体，称为粘性流体。在这种流体中，运动时所产生的內摩擦力，对于粘性流体运动形成的过程有重大的影响。粘性流体以其力学性質来說，根本不同于以上所討論的非粘性流体。

在自然界中存在的流体，都是粘性流体，卽具有上述粘性流体的力学性質。正因为如此，所以粘性流体又常称为眞实流体。

着手研究粘性流体的运动时，首先研究其中产生的內力。在外力的作用下，流体發生变形，于是在流体中产生阻止变形的內力。在單位

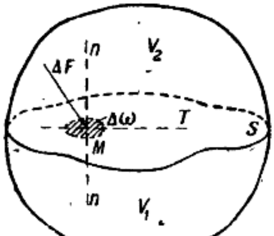

圖 184.

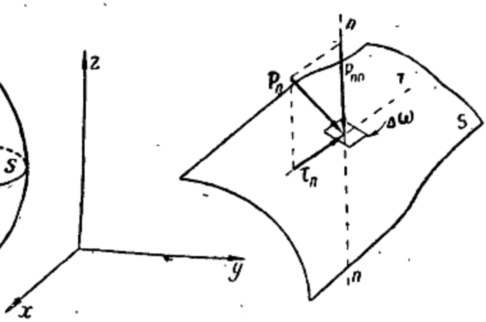

圖 185.

面积上計取的这些力称为应力。为了考虑上述的內力，只要在流体中作任一表面 S(圖 184)，将流体的某部分划分开来。这时，应該認为所选取的流体部分 V_1 不仅受到作用于其上的外力的影响，而且受到从被划开的流体部分 V_2 方面作用于它的力的影响。

在所作的 S 面上，取基元面积 $\Delta\omega$；并以 ΔF 代表由体积 V_2 方面作用到此面积上体积 V_1 的諸点的所有內力的总和，则

$$\boldsymbol{p}_n=\lim_{\Delta\omega\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta\omega} \tag{1}$$

将表示在 M 点的应力。应力 $\boldsymbol{p}_n$ 是矢量，$\boldsymbol{p}_n$ 的角标 n 表明面积的法綫方向。

在粘性流体中，由于有內摩擦力，所以上述力 ΔF，也就是說应力 $\boldsymbol{p}_n$ 对于面积 $\Delta\omega$ 可能有任意指向，而决不象在非粘性流体中那样。仅沿着內法綫的方向。由于这个緣故，在粘性流体中內应力分为两种类型：正应力 p_{nn}，它是应力 $\boldsymbol{p}_n$ 在 S 面上相应点处引出的法綫 nn 上的投影(圖 184 和 185)；以及切应力 τ_n，它是同一应力 $\boldsymbol{p}_n$ 在 S 面上同一点处作出的切平面 T 上的分应力。显然，所述的切应力 τ_n 表示在流体中的內摩擦力，就由于它的存在，使粘性流体异于理想流体。

引用直角坐标系，我們来看垂直于 x 軸的平面(圖 186)。在这面上的应力，按照前面所說的，应标志为 $\boldsymbol{p}_x$(x 为面的法綫)。类似地，$\boldsymbol{p}_y$ 和 $\boldsymbol{p}_z$ 是垂直于 y 和 z 軸的面上的应力。

应力 $\boldsymbol{p}_x$, $\boldsymbol{p}_y$, $\boldsymbol{p}_z$ 中的每一个都可以投影到坐标軸上，矢量 $\boldsymbol{p}_x$ 的投影以 p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} 来表示，这里字母 p 的第一个角标表明应力所在面的法綫方向；第二个角标表明应力投影在哪一个軸上。显然，p_{xx} 是法綫为 x 的面上的正应力，而 p_{xy} 和 p_{xz} 是同一面上的切应力的投影。为了要区别切应力，常以字母 τ 来表示，且令 $p_{xy}=\tau_{xy}$, $p_{xz}=\tau_{xz}$。这样，在垂直于 x 軸的面上，作用着应力 $\boldsymbol{p}_x$，它在坐标軸上的投影，等于 p_{xx}, τ_{xy}, τ_{xz}。类似地，在具有法綫 y 的面上，作用着应力 $\boldsymbol{p}_y$；而在具有法綫

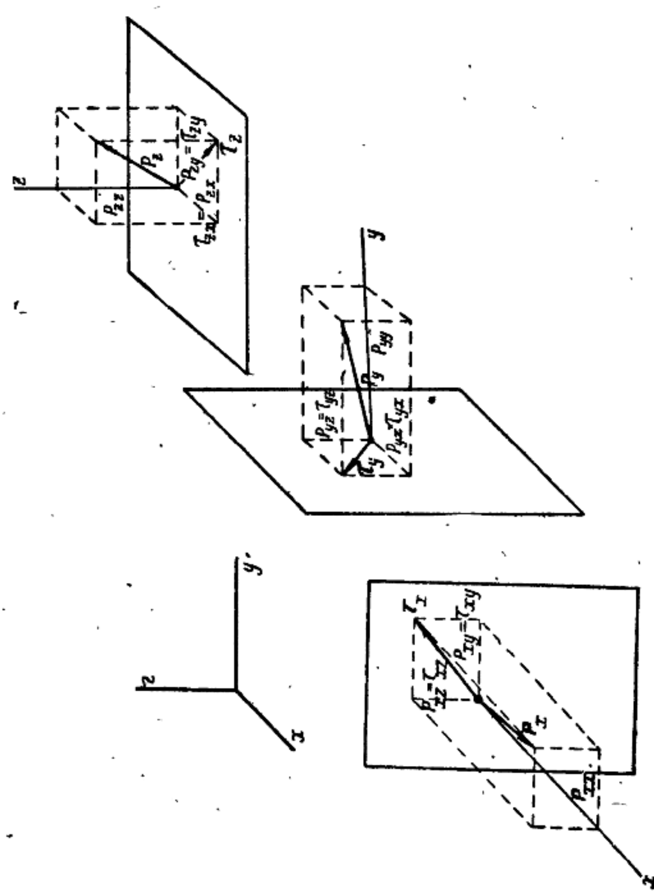
z
y
x
p_z
τ_z
p_{zz}
$p_{zy}=\tau_{zy}$
$\tau_{zx}=p_{zx}$
p_y
τ_y
p_{yy}
$p_{yz}=\tau_{yz}$
$p_{yx}=\tau_{yx}$
p_x
τ_x
p_{xx}
$p_{xy}=\tau_{xy}$
$p_{xz}=\tau_{xz}$

圖 186.

z 的面上，作用着应力 $\mathbf{p}_z$，它們在坐标軸上的投影，分别等于 τ_{yx}, p_{yy}, τ_{yz} 和 τ_{zx}; τ_{zy}, p_{zz}。

以上所考虑的在具有法綫 n 的面上的应力 $\mathbf{p}_n$ 的投影以 p_{nx}, p_{ny}, p_{nz} 来表示。

为了建立在某一点处作用于不同指向的諸面上的应力之間的关系，在运动着的流体中，划出具有四面体形状的基元体积，它的边平行于坐标軸(圖 187)。以 $\mathbf{p}_y+\varepsilon_y$ 表示作用在面 CMB 上的平均应力，以 $\mathbf{p}_x+\varepsilon_x$ 表示在面 CMA 上的平均应力，以 $\mathbf{p}_z+\varepsilon_z$ 表示在 AMB 面上的平均应力，并以 $\mathbf{p}_n+\varepsilon_n$ 表示在斜面 ABC 上的平均应力。这里 $\mathbf{p}_y$, $\mathbf{p}_x$, $\mathbf{p}_z$ 和 $\mathbf{p}_n$ 是在 M 点处作用于上述那些面上的应力，而 ε_y, ε_x, ε_z 和 ε_n 是这些应力的微小增量。在所划出的体积上，再加上質量力(其中包括慣性力)并应用达朗伯原理，作出所考虑的体积的运动方程式。因为我們要建立在某点处应力之間的关系，所以在得到的方程式中，所考虑的流体的体积将减小到以零为極限，而保持 ABC 的法綫方向不变。显然，当去掉作为高阶微量的質量力后，結果在各坐标軸的投影上，我們将得到下列的关系式(我們略去所有的中間运算，因为它們比較簡單)：

$$\left.\begin{aligned} p_{nx} &= p_{xx}\alpha + \tau_{yx}\beta + \tau_{zx}\gamma \\ p_{ny} &= \tau_{xy}\alpha + p_{yy}\beta + \tau_{zy}\gamma \\ p_{nz} &= \tau_{xz}\alpha + \tau_{yz}\beta + p_{zz}\gamma \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

式中 p_{nx}, p_{ny} 和 p_{nz} 为应力 $\mathbf{p}_n$ 在軸 Ox, Oy, Oz 上的投影，而 α, β, γ 为面 dS_n(平行于面 ABC)的法綫的方向余弦。

三个等式(2)可以用和它們相当的一个矢量等式来代替，卽

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_x\alpha + \mathbf{p}_y\beta + \mathbf{p}_z\gamma,$$

式中 $\mathbf{p}_n$, $\mathbf{p}_x$, $\mathbf{p}_y$, $\mathbf{p}_z$ 是在分别垂直于法綫 n, 以及軸 x, y, z 諸面上的应力矢量。

公式(2)使我們能通过作用在垂直于坐标軸的各面上的应力，来表示作用于任意指向的面上的应力。

其次，我們来建立在某一点处切应力之間的关系。为此要应用力矩方程式，如果在 A 点处划出各边为 dx, dy, dz，而平行于坐标軸的基元六面体，并使 A 点位于其中心(圖 188)，則力矩方程式可簡便地写

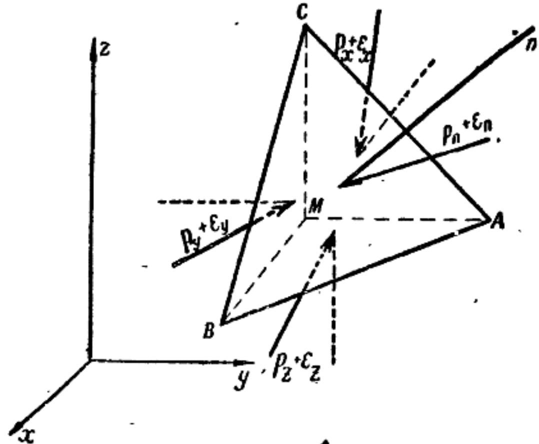

圖 187.

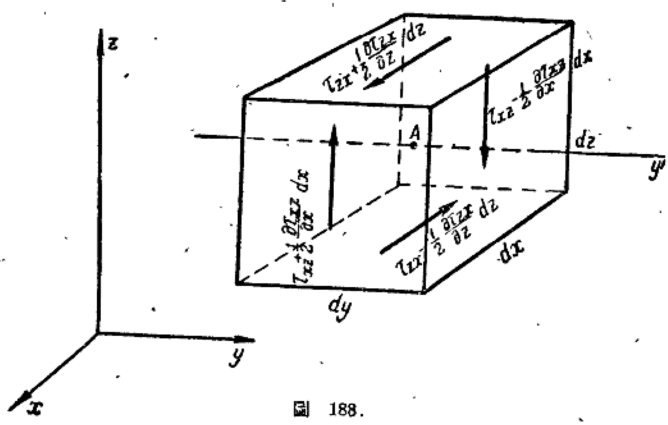

圖 188.

出。按照欧拉方法，在运动着的流体中划出的六面体，可以看做是流体流过其中的固定空間体积，也就是說，可以看做是在空間中不动的体积。

先对于經过 A 点并与 Oy 軸平行的軸作出力矩方程式，这时，如果限于三阶微量，則所有的質量力(其中包括达朗伯的慣性力)以及作用在垂直于 Oy 軸的周面上的表面力可以去掉①，而作用在其余周面上的表面力中只有切应力(相应于圖中所示的切向力)給出力矩，这样将有

$$\left(\tau_{zx}+\frac{1}{2}\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz\right)dx\,dy\frac{dz}{2}+\left(\tau_{zx}-\frac{1}{2}\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz\right)dx\,dy\frac{dz}{2}-$$
$$-\left(\tau_{xz}+\frac{1}{2}\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}dx\right)dy\,dz\frac{dx}{2}-\left(\tau_{xz}-\frac{1}{2}\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}dx\right)dy\,dz\frac{dx}{2}=0,$$

由此
$$\tau_{zx}=\tau_{xz}.$$

由类似的方法，作出对于其他二軸的力矩方程式，并为了完整起見，与前面的方程式合在一起后，得到

$$\left.\begin{aligned}\tau_{yz}&=\tau_{zy}\\ \tau_{zx}&=\tau_{xz}\\ \tau_{xy}&=\tau_{yx}\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

所求得的方程式(3)指出，作用在二互相垂直面并垂直于該二面交綫的切应力大小相等。这样，在給定点处的粘性流体的应力状态，按照方程式(2)和(3)，由六个分应力所决定：

$$p_{xx},\ p_{yy},\ p_{zz},\ \tau_{xy},\ \tau_{zx},\ \tau_{yz}.$$

如果需要知道任何瞬时在任意点处的应力，則这些分应力中的每一个都应当作流动坐标和时間的函数給出。由此可知，研究粘性流体运动比研究理想流体有势运动要复杂得多，在理想流体有势运动中，应力仅由一个坐标与时間的函数就可确定。

① 因为我們要建立在某点处应力之間的关系，則所考虑的体积应趋于零，所以去掉質量力。

§2. 以应力表示的連續介質的运动方程式

在連續介質中，划出各边为 dx, dy, dz，且平行于坐标軸而中心在点 $A(x, y, z)$ 的平行六面体形状的基元体积(圖 189)。我們来計算所有作用于其上的力，并認为确定这些力的函数都是坐标和时間的連續函数。

首先来找出作用于所划出的平行六面体边界上的表面力。假設在 A 点处，和边界 1—2—3—4 及 1′—2′—3′—4′ 平行的作用面上的正应力等于 p_{xx}，則将函数 p_{xx} 展开成泰勒級数并限于取展开式的第一項，将得到正应力等于 $p_{xx}+\frac{1}{2}\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}dx$ 和 $p_{xx}-\frac{1}{2}\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}dx$。这时在所述面上的法向力，在准确到三阶微量的情况下，在面 1—2—3—4 上将为 $\left(p_{xx}+\frac{1}{2}\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}dx\right)dy\,dz$，而在面 1′—2′—3′—4′ 上将为 $\left(p_{xx}-\frac{1}{2}\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}dx\right)dy\,dz$，我們認定，当正应力相应于拉伸情况时，認为它是正的。按照这样条件的正应力的方向繪示于圖 189 上。

其次，假設在 B 点处，作用面和边界 1—2—3—4 及 1′—2′—3′—4′ 平行且方向沿着 Oz 軸的切应力等于 τ_{xz}，并将它展开成泰勒級数，則在所述的边界上得到下列相应的切应力：

在 a 点处

$$\tau_{xz}+\frac{1}{2}\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}dx$$

和在 a' 点处

$$\tau_{xz}-\frac{1}{2}\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}dx.$$

在所述的边界上，相应于这些切应力的力(計算准确到三阶微量)将为：

在边界 1—2—3—4 上

$$\left(\tau_{xz}+\frac{1}{2}\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}dx\right)dy\,dz,$$

和在边界 1′—2′—3′—4′ 上

$$\left(\tau_{xz}-\frac{1}{2}\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}dx\right)dy\,dz.$$

用同样的方法求出在所划出的平行六面体边界上的所有其他的应力，其中部分应力如圖 189 所示，幷同样地求出相应于这些应力的力。

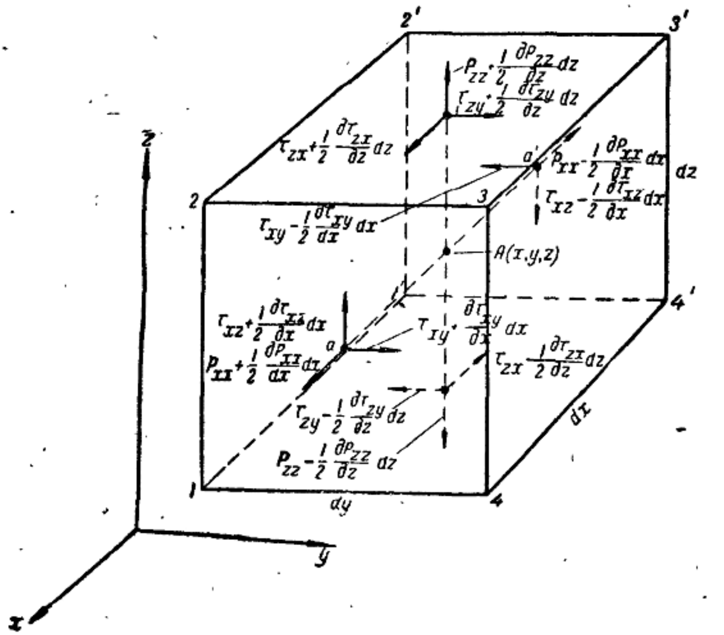

圖 189.

現在轉来計算質量力，假設对單位質量而言的外質量力在坐标軸上的投影为 X, Y, Z 注意到在建立运动方程式时，应用达朗伯原理在所划出的流体体积上，并加上慣性力。它們在同一軸系上的投影，对單位質量而言，将为

$$j_x=-\frac{dv_x}{dt},\quad j_y=-\frac{dv_y}{dt},\quad j_z=-\frac{dv_z}{dt}.$$

将上述諸力投影在 Ox 軸上，得

$$\left[\left(p_{xx}+\frac{1}{2}\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}dx\right)dy\,dz-\left(p_{xx}-\frac{1}{2}\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}dx\right)dy\,dz\right]+$$
$$+\left[\left(\tau_{zx}+\frac{1}{2}\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}dz\right)dx\,dy-\left(\tau_{zx}-\frac{1}{2}\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}dz\right)dx\,dy\right]+$$
$$+\left[\left(\tau_{yx}+\frac{1}{2}\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy\right)dx\,dz-\left(\tau_{yx}-\frac{1}{2}\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy\right)dx\,dz\right]+$$
$$+\rho X\,dx\,dy\,dz-\rho\frac{dv_x}{dt}dx\,dy\,dz=0.$$

在 Oy 和 Oz 軸投影上建立类似的方程式，并将这些方程式的所有各項除以 $dx\,dy\,dz$，将有

$$\left.\begin{aligned}\rho\frac{dv_x}{dt}&=\rho X+\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\\ \rho\frac{dv_y}{dt}&=\rho Y+\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\\ \rho\frac{dv_z}{dt}&=\rho Z+\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

这些方程式，称为以应力表示的連續介質的运动方程式粘性流体运动同样也遵循着这些方程式，因为在粘性流体中正应力总是压力，所以在这种情形下，p_{xx}, p_{yy} 和 p_{zz} 总是負的。

我們来分析所得到的方程式，首先在所得方程組上再写出我們熟知的两个方程式。如果認为粘性流体在其运动中，連續地充滿着它所占有的空間，则按照連續性方程式(第三章，§ 5)，将有

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=0.$$

其次,假定粘性流体是正压性的,则它的状态方程式将为

$$\rho=f(p).$$

这样,我們有了五个方程式的方程組。如果,象通常所認为的那样,外質量力是已給出的,则在这方程組中未知而应求的函数将为:v_x, v_y, v_z, p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, τ_{yx}, τ_{xz}, τ_{yz} 和 ρ, 共有十个函数。因此,在这样的形式下,所得的方程組是不閉合的,为了要使它閉合从而在原則上可能找出所求的函数,显然必需有一些补充关系来表明粘性流体运动的性質及其力的联系。

这里要着重指出,这些补充的关系不能由理論的方法得到;它們只有从試驗和观察眞实流体的运动而得到。关于流体中內摩擦的牛頓定律就是这种所要求的补充关系;我們現在就轉过来講述这些定律。

§3. 粘性流体中的牛頓內摩擦定律·在粘性流体中的切应力值

在确定粘性流体中的切应力值时,流体力学根据在 1686 年發表的牛頓定律。

首先我們来給出牛頓所給出的对于直綫运动的上述定律。牛頓定出了下列四条規則来表征內摩擦力,亦即流体層互相移动时所表現出的力,他确定了:

1) 內摩擦力正比于流体層移动的相对速度;
2) 它正比于这些層的接触面(S)的大小;
3) 內摩擦力隨流体的物理性質而改变;

4) 它与压力(正应力)无关。

可以看出,这些定律和固体的摩擦定律極不相同,对于固体,摩擦力正比于压力而与运动的相对速度的关系則很小。

为了給出上述四条規則的解析表达式,首先要說明,应該如何理解流体層移动的相对速度。由于在粘性流体的流动中,我們認为,速度和应力,都是坐标的連續函数,那末沿流动截面的速度分布也是連續的(圖 190)。因此流体層互相移动的相对速度应理解为速度值对層面法向的导数,也就是速度沿法綫的增量 Δv 和相应法綫段的長度 Δn 的比值在 $\Delta n \to 0$ 时的極限。这一速度导数等于角度 β 的余切,角度 β 是由速度分布曲綫的切綫和速度方向所形成的(圖 190),即

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \operatorname{ctg}\beta.$$

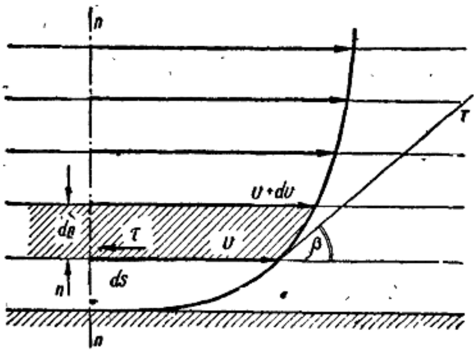

圖 190.

这里速度 v 是坐标 n 的函数,它可能也是其他坐标的函数,因此我們要取 v 对 n 的偏导数。

至于牛頓的第二个規則,它本来已很清楚,无需补充說明。

我們用系数 μ 来表明內摩擦力随流体物理性質而改变的关系,系数 μ 称为粘性系数或动力粘性系数。

这样，把所有上述牛頓的規則联系起来，对于直綫运动我們就得到內摩擦力的值为

$$F_{\text{тр}}=\mu S\frac{\partial v}{\partial n}. \tag{5}$$

而摩擦应力将等于

$$\tau=\frac{F_{\text{тр}}}{S}=\mu\frac{\partial v}{\partial n}. \tag{6}$$

我們把 τ 理解为切应力在 τ 軸上的投影，τ 軸与速度的指向相同。

因此，牛頓的內摩擦定律可以簡述如下：粘性流体中的切应力正比于速度沿法向的导数，該法綫垂直于速度矢量和切应力的所在面。

公式(6)可以給出其他不同的形式，而使上述牛頓关于內摩擦的基本概念能推广到任何流体微团曲綫运动的情形中去。

为此，再来討論流体微团在时間 Δt 內的直綫运动，該流体微团当瞬时 t 时，在圖紙(圖 191)平面上，具有矩形 $1—2—3—4$ 的形状。假設微团在流綫 aa 上的点具有速度 $v+\Delta v$，而在距流綫 aa 为 Δn 的流綫 bb 上的点具有速度 v。那末在 Δt 时間后，位于流綫 aa 上的流体微团的点，移动了 $(v+\Delta v)\Delta t$ 的距离，而位于流綫 bb 上的点，移动了等于 $v\Delta t$ 的較小的距离。由于这个緣故，流体微团的形状改变了。在圖紙

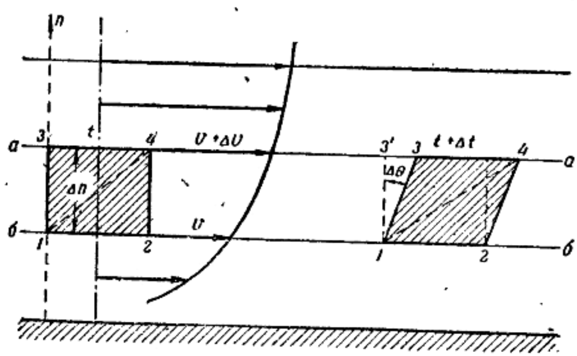

圖 191.