上

胡传孝 主编 夏显庭 主审

高等学校专科教材

高等数学

石油大学出版社

前　言

《高等数学》(专科用)上、下册是参照国家教委制定的全日制“专科高等数学课程教学基本要求”和“普通高等理工院校成人教育专科《高等数学》课程教学基本要求”编写而成的。

本书在编写过程中,在概念与方法上力求与现代数学接轨。在内容安排上,贯彻了少而精的原则,力求条理清楚、重点突出,并将重要内容用黑体字书写。在文字叙述上,既注重了用词准确、语言精练,又注重通俗易懂,便于自学。特别是为了便于成人学习,书中用较多的典型例题进行解题思路与方法的分析、较多地应用了总结性教学的方法,具有一定的特色。

本书第一、二、三章由胡传孝编写,第四、五两章由刘式杰编写,第六、七两章由何振宇、张继忠编写,第八、九两章由田培基编写,第十、十一两章由边晓峰编写。

全书由胡传孝主编,负责全书的修改与统稿工作;夏显庭教授主审了全书。董奉诚、谭鼒、周文龙三位教授专家详细地审阅了全书内容,并提出了宝贵的意见和建议。在此,向三位先生表示诚挚的谢意。

由于我们水平有限,错误和不妥之处在所难免,诚望读者批评指正。

编　者

1995年12月

目　　录

预备知识

一、常用的几个符号

1. $\in$，$\overline{\in}$ 表示"属于"，"不属于"。

如：集合 $A = \{x|0 \leqslant x < 10\}$，则 $5 \in A, 10 \overline{\in} A$.

2. $\forall$ 表示"对于任意的"。如 $\forall x \in A$，表示在 A 集合中任取定一个元素 x。

3. $\exists$ 、$\exists\,|$ 表示"存在"、"存在唯一"。

4. $\triangleq$ 表示"定义"。一般用"$\triangleq$"右边的内容来定义左边的概念。

5. $U(x_0,\delta)$、$U(\hat{x}_0,\delta)$ 表示"x_0 的 δ 邻域"、"x_0 的去心的 δ 邻域"。如 $U(x_0,\delta) \triangleq \{x|x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$. $U(\hat{x}_0,\delta) = \{x|x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, x \neq x_0\}$.

6. $\max\{N_1,N_2,\cdots,N_k\}$ 表示取 $N_1,N_2,\cdots,N_k$ 中最大者。$\min\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n\}$ 表示取 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n$ 中最小者。

7. $\sum$ 是连加符号。如 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \triangleq x_1 + x_2 + \cdots + x_n$，显然有：

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i \pm y_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \pm \sum\limits_{i=1}^{n} y_i$

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n} a x_i = a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$（其中 a 为常数）

8. $\prod$ 是连乘符号。如 $\prod\limits_{i=1}^{n} x_i \triangleq x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$

9. $\Rightarrow$ 是"推导出"。

10. $\Leftrightarrow$ 是"互相推导出"或"互相等价"或"充要条件"。

11. $\cup$、$\cap$ 是表示集合的"并"、集合的"交"。如 $A = \{3,4,5,6\}$，$B = \{5,6,7,8\}$，则 $A \cup B = \{3,4,5,6,7,8\}$，$A \cap B = \{5,6\}$

二、充要条件

1. 设有两个数学命题 A 和 B

(1) 若由 A 可以推出 B，即 $A \Rightarrow B$，则称 A 是 B 的充分条件，或称 B 是 A 的必要条件。

(2) 若 $A \Rightarrow B$，且 $B \Rightarrow A$，则称 A 与 B 互为充分必要条件，记为 $A \Leftrightarrow B$。

若 A 与 B 两个数学概念或式子满足：$A \Leftrightarrow B$ 则称 A、B 两个概念或式子等价。如

$x > 0, y > 0 \Rightarrow xy > 0$，但 $xy > 0 \nRightarrow x > 0, y > 0$。

又如：$x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$，且 $y = 0$。

三、一个重要不等式

当 $x_i \geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$ 时，有$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \geqslant \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}$，此不等式可用数学归纳法证明，这里仅证明 $n=2$ 的情形。

证 $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \Rightarrow \sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}$ 有意义

又 $\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)^2 \geqslant 0 \Rightarrow x_1+x_2-2\sqrt{x_1 \cdot x_2} \geqslant 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(x_1+x_2) \geqslant \sqrt{x_1 x_2}$

第一章　函数、极限与连续

初等代数主要研究“数”，初等几何则主要研究“形”。初等数学这种数与形相分离的现象在高等数学中将得到统一。初等数学以研究常量为主，而高等数学研究的则是变量，把常量作为变量的特例来处理。它研究的对象是变量间的函数关系，研究的方法是极限。

§1.1　实数、变量与区间

一、实数

一切既约分数 m/n 构成了有理数集合，记为 Q。数轴 ox 上任何两个表示不同有理数的点的中点均为有理数点。故有理数点在数轴上处处稠密。

一切无限不循环小数构成了无理数集合，记为 W。在数轴上，任何一个有理点与无理点的中点均为无理点。故无理点在数轴上处处稠密。

全体有理数与无理数构成实数集，记为 R，即 $R = Q \cup W$. 设 α 为实数（记为 $\alpha \in R$），则不存在比 α 小的最大实数，也不存在比 α 大的最小实数。实数与数轴上的点形成一一对应*。因此，为了叙述方便，有时将数与数轴上表示该数的点不加区别。如可用 a、b 表示二实数，或表示数轴上两个点。

位于数轴上较右边的点代表的实数大于位于数轴上较左边的点代表的实数，故任何两个实数可比较大小。

数 a 的绝对值：$|a|$ 表示 a 点到原点的距离。$|a-b|$ 则表示任何两点 a 与 b 之间的距离。关于绝对值引入常用的三条性质。若 $\forall\, a,b \in R$，则有

1. $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$

2. $|x-a| < \delta \Leftrightarrow a-\delta < x < a+\delta, (\delta > 0)$. 特别，$|x| < m \Leftrightarrow -m < x < m, (m > 0)$.

3. $|a+b| \leqslant |a| + |b|$

二、变量

世界上，一切事物都处于不停的运动之中。而运动的事物又有相对静止和显著变化状态。为描述事物运动的这两种状态，数学上就出现了常量和变量。

在某一变化过程中始终取同一数值的量称为**常量**（或常数）。常用 a、b、c 等字母表示。而将取不同数值的量称为**变量**（或变数）。常用 x、y、z 等字母表示。

值得注意的是，有些量在这一过程中当作常量，在另一过程中又会当作变量。如有研究跳水等低空运动时，重力加速度 g 当作常量，而在研究导弹飞行等高空运动时，g 又被当作

变量。

三、区间

一个变量总要在一定的范围内变化。如物体从距地面不太高的地方(设高为 H 米)自由下落,该物体下落通过的路程 h 与时间的关系为 $h=\frac{1}{2}gt^2$,g 当作常量,h 和 t 为变量,显然

$$0\leqslant h\leqslant H,0\leqslant t\leqslant T,T=\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

为了描述变量变化的范围,特给出区间的概念。

闭区间:$[a,b]\triangleq\{x|a\leqslant x\leqslant b,a、b\in R\}$

开区间:$(a,b)\triangleq\{x|a<x<b,a、b\in R\}$

闭区间 $[a,b]$ 与开区间 (a,b) 的长均为 $b-a$.

特别,将与某点 x_0 对称的开区间称为 x_0 的**邻域**。如 $U(x_0,\delta)\triangleq(x_0-\delta,x_0+\delta)$,其中 $\delta>0$,称 $U(x_0,\delta)$ 为 x_0 的 δ 邻域。由于 δ 等于邻域 $U(x_0,\delta)$ 长的一半,故称 δ 为邻域 $U(x_0,\delta)$ 的半径。

如 3 的 1 邻域,记为 $U(3,1)=(3-1,3+1)=(2,4)$

$[a,b)\triangleq\{x|a\leqslant x<b,a、b\in R\}$,$(a,b]\triangleq\{x|a<x\leqslant b,a,b\in R\}$ 均称为**半开半闭区间**。

长度无限的区间叫**无限区间**。如 $(-\infty,a)\triangleq\{x|-\infty<x<a\}$,$[a,+\infty)\triangleq\{x|a\leqslant x<+\infty\}$

$(-\infty,+\infty)\triangleq\{x|-\infty<x<+\infty\}$ 等均为无限区间,由于正、负无穷大:$+\infty$,$-\infty$ 均不是数。因此,这类区间又叫**广义区间**。

例 求不等式:$|2-x|+|2+x|\leqslant 10$ 的解,并将解集用区间表示出来。

解

① 当 $x<-2$ 时,不等式变为

$$2-x-2-x\leqslant 10\Rightarrow -2x\leqslant 10$$

得 $x\geqslant-5$,因此 $x<-2$ 时,解集为 $-5\leqslant x<-2$,即

$$x\in[-5,-2)$$

② 当 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 时,不等式变为

$$2-x+2+x\leqslant 10\Rightarrow 4\leqslant 10$$

即不等式恒成立,故 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 时解集为

$$x\in[-2,2]$$

③ 当 $x>2$ 时,不等式变为

$$x-2+2+x\leqslant 10\Rightarrow x\leqslant 5$$

故 $x>2$ 时解集为 $x\in(2,5]$

由 ①~③ 得到所求不等式解集为:

$$[-5,-2)\cup[-2,2]\cup(2,5]=[-5,5]$$

习　题

1. 将下列各命题分别用不等式表示

(1) $x \in (-4,5)$　　(2) $x \overline{\in} [5,100)$

(3) $x \in (-\infty,5) \cup (5,+\infty)$　　(4) $x \in (-100,50) \cap (-110,20]$

2. 解下列各不等式,并用区间表示其解集

(1) $\left|\frac{2-3x}{2}\right| \leqslant 1$　　(2) $\left|\frac{2x+5}{4}\right| > 10$

(3) $\frac{1}{x-2} > \frac{2}{x+3}$　　(4) $|3x| < |2-x|$

§1.2　函数的概念及性质

一、关系

在自然与社会的各个领域内存在着各种各样的关系。如在实数中的“大于”、“小于”、“等于”关系。在经济中的“供求”关系,“成本与价格”关系等。一般,我们所说的关系是一个满足某种性质的含有多个未知元素的集合,简称为多元集合。

例如:$x,y \in R$,且存在关系“x 不小于 y”这个二元关系可用二元集合:$\{(x,y)|x \geqslant y, x、y \in R\}$ 来表示。其图象是图 1-1 中的阴影部分。

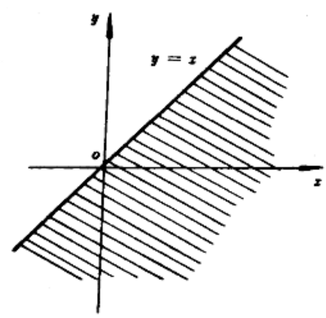


图 1-1

二、函数

函数是一种特殊的关系。

1. 定义

定义 1　设有两个实数集合 X 和 Y,若对 X 中的每个 x,按照某一对应法则 f,Y 中有确定的 y 与之对应,则称 f 是从 X 到 Y 的一个函数关系,简称为函数。记作

$$f:X \to Y \text{ 或 } y = f(x)$$

x 称作自变量,y 称作因变量。x 的变化范围 X 称为 f 的定义域。记为 $X = \mathrm{dom} f$,简记为 $D(f)$. y 的取值的集合称为 f 的值域。记为 $\mathrm{range} f$,简记为 $R(f)$. 显然 $R(f) \subseteq Y$.

由上述定义 1 知,当函数的定义域与对应法则确定后,该函数就唯一确定。故称定义域与对应法则为**函数的二要素**。至于函数的值域可由定义域与对应法则唯一确定。

例 1　下列各组函数是否为同一函数。

(1) $y = \sin x$ 与 $u = \sin v$;

(2) $y = \ln x(1+x)$ 与 $y = \ln x + \ln(1+x)$

解

(1) $y = \sin x$ 与 $u = \sin v$ 的定义域均为 R,对应法则都是对自变量取正弦:“sin”,故它们

是同一函数。由此可知，一个函数用什么字母来表示是无关紧要的。

(2) $y=\ln x(x+1)$ 的定义域应满足 $\begin{cases}x>0\\x+1>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0\\x+1<0\end{cases}\Rightarrow x>0$ 或 $x<-1$

故它的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$；$y=\ln x+\ln(x+1)$ 的定义域仅为 $(0,+\infty)$ 故它们不是同一函数。但这两个函数在区间：$(0,+\infty)$ 上是相等的。

说明：如果 $\forall x\in D(f)$，按照对应法则 f，Y 中只有唯一的数 y 与之对应，则称 f 为**单值函数**。否则叫做**多值函数**。往后，如无特殊说明，本书所研究的函数 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 等均为单值函数。

2. 函数的表示法

(1) 列表法

x	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	$\cdots$
y	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_n	y_{n+1}	$\cdots$

用表格表示因变量与自变量的对应关系。表中 $x_i,y_i(i=1,2,\cdots)$ 都是具体实数，当 $x=x_i$ 时，$y=y_i$。列表法是以实验为手段研究两个变量间函数关系时常用的方法。

(2) 图象法

用函数的图象来表示函数中因变量与自变量关系的方法。如生产进度曲线，描述的是产量与时间的函数关系。气象站自动测温仪所描绘的温度曲线，就记录了当地气温与时间的函数关系。

(3) 公式法或称解析法

例如式 $y=f(x)=x^2+3x+1$ 及式 $y=g(x)=\begin{cases}x^2+1,x\leqslant 0\\2x^2-1,x>0\end{cases}$ 等都是用解析法表示的函数。等式最右边的部分是各函数具体的解析表达式。

在自变量的不同取值范围内，$g(x)$ 有不同的具体表达式。类似 $g(x)$ 的函数叫**分段函数**。下面是两个常用的分段函数。

例 1 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1,x>0\\0,x=0\\-1,x<0\end{cases}$ 称为**符号函数**。

可以验证：$|x|=x\cdot\operatorname{sgn}x$ 或 $x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$.

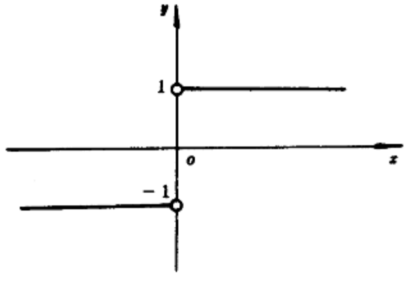


图 1-2 $y=\operatorname{sgn}x$ 的函数图象

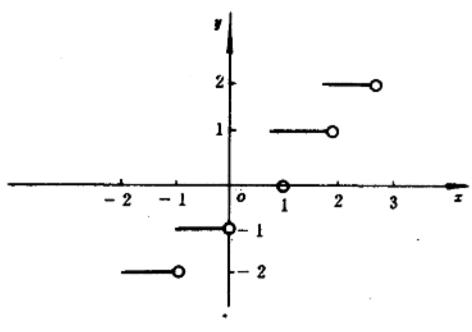


图 1-3 $y=r(x)$ 的函数图象

例 2 $y=\tau(x)$ 或记为 $y=[x]$ 称为**取整函数**。

它表示 y 等于 x 的最大整数部分，设 x 为任一实数，它表示不超过 x 的最大整数。如

$$[1.5]=1,\quad [-1.5]=-2,\quad [5/7]=0,\quad [-1]=-1$$

例 3 已知冰和水的比热分别为 2.1×10^3 焦 / 千克、4.2×10^3 焦 / 千克，冰的熔解热为 3.4×10^5 焦 / 千克，现将 10 千克 -10℃ 的冰升温变成 100℃ 的水，求吸收的总热量 Q(焦耳) 与温度 t(℃) 的函数关系。

解 -10℃ 的冰变成 0℃ 的冰的过程中冰吸热为

$$Q_1=10\times2.1\times10^3(t+10),\ -10\leqslant t<0$$

0℃ 的冰变成 0℃ 的水吸热为

$$Q_2=10\times3.4\times10^5$$

0℃ 的水变成 100℃ 水的过程中吸收热量为

$$Q_3=10\times4.2\times10^3t,\ 0<t\leqslant100$$

故

$$Q=\begin{cases}2.1\times10^4(t+10),-10\leqslant t<0\\2.1\times10^5+Q_2+Q_3,0<t\leqslant100\end{cases}=\begin{cases}21000(t+10),-10\leqslant t<0\\3610000+42000t,0<t\leqslant100\end{cases}$$

由例 2 知分段函数是客观存在的。

例 4 求下列函数的定义域

(1) $y=f(x)=\sqrt{x^2-1}+\arcsin\dfrac{x}{2}$

(2) 已知 $y=g(x)$ 的定义域 $D(g)=[a,b)$，求 $g(x+c)$ 的定义域，其中 c 为常数。

解

(1) 要使 $\sqrt{x^2-1}$ 有意义，只有 $x^2-1\geqslant0$，即 $|x|\geqslant1$，亦即 $x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$。要使 $\arcsin\dfrac{x}{2}$ 有意义，只有 $-1\leqslant\dfrac{x}{2}\leqslant1$，即 $x\in[-2,2]$

故

$$\begin{aligned}D(f)&=((-\infty,-1]\cup[1,\infty))\cap[-2,2]\\&=[-2,-1]\cup[1,2]\end{aligned}$$

(2) 因为要使 $g(x)$ 有意义，只有 $a\leqslant x+c<b\Rightarrow a-c\leqslant x<b-c$，即 $g(x+c)$ 的定义域为 $[a-c,b-c)$.

三、函数的几种性质

1. 函数的单调性

若 $\forall x_1,x_2\in(a,b)$，且 $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\leqslant f(x_2)(f(x_1)\geqslant f(x_2))$，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 上是单调上升(下降)的。记为在 (a,b) 上 $f(x)\uparrow(\downarrow)$。

说明：若取消 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 之间的等号，则称在 (a,b) 上 $f(x)$ 是**严格单调上升**(**下降**)的。

例 5 研究下列函数的单调性。

(1) $y=f(x)=a^x,(a>1)$

(2) $y=g(x)=x^2$

解

(1) $D(f)=R$,且 $\forall\ x_1,x_2\in R$,当 $x_1<x_2$ 时

$$f(x_1)-f(x_2)=a^{x_1}-a^{x_2}=a^{x_1}(1-a^{x_2-x_1})<0$$

故在 R 上,$f(x)$ 单调上升,记为在$(-\infty,+\infty)$ 上 $f(x)\uparrow$(如图 1-4)。

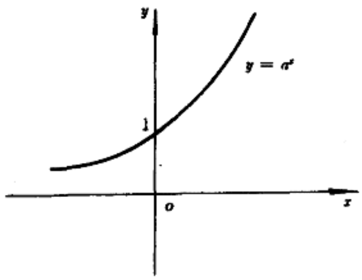


图 1-4

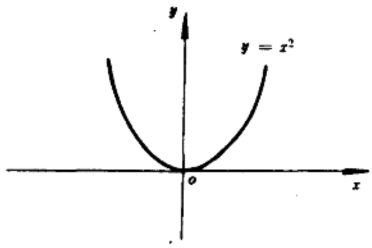


图 1-5

(2) $D(g)=R$,且 $\forall\ x_1,x_2\in R$,当 $|x_1|<|x_2|$ 时

$$g(x_1)-g(x_2)=x_1^2-x_2^2<0$$

故在$(-\infty,0)$ 上 $g(x)$ 呈单调减少,在$(0,+\infty)$ 上 $g(x)$ 呈单调增加。在$(-\infty,+\infty)$ 上,$g(x)=x^2$ 不是单调函数(如图 1-5)。由此可知,**不能离区间而谈函数的单调性。**

2. 函数的有界性

若$\exists$(存在)数 $M>0$,使得$\forall\ x\in(a,b)$,均有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$ 在区间(a,b) 上有界。否则,称 $f(x)$ 在(a,b) 上无界。如

(1) $y=f(x)=\sin x$, $D(f)=R$,$\forall\ x\in R$,$|\sin x|\leqslant 1\triangleq M$,故 $\sin x$ 在 R 上有界。

(2) $y=g(x)=\ln x$,$D(g)=(0,+\infty)$.

①$\forall\ a,b\in(0,+\infty)$且$a<b$,则$\ln x$在$(a,b)$上有界,因为$\forall\ x\in(a,b)$,$|\ln x|<\max\{|\ln a|,|\ln b|\}\triangleq M$,(其中 max 表示取 $|\ln a|$ 与 $|\ln b|$ 中最大者)。

② 但 $\ln x$ 在 $(0,a)$ 及$(a,+\infty)$ 上无界。

由熟知的 $y=\ln x$ 的图,结论 ① 与 ② 是显然的。函数的有界性是函数在某区间上的整体性质。**不能离开区间而谈函数的有界性。**

3. 函数的奇偶性

若函数$y=f(x)$的定义域$D(f)$关于原点对称,且$\forall\ x\in D(f)$,恒有$f(-x)=-f(x)$($f(-x)=f(x)$),则称 $f(x)$ 为奇(偶)函数。

如 $y=\sin x$,$y=\mathrm{tg}x$,$y=x^{2n+1}(n=0,1,2,\cdots)$,都是奇函数。

$y=\cos x$,$y=x^{2n}$(n 为整数)都是偶函数。

$y=x^2+x$ 是非奇非偶函数。

偶函数的图象关于 oy 轴对称,奇函数的图象关于原点对称,即其图象在原点左边的半支绕原点旋转 180° 正好与其另一半支重合。此结论读者可自行证明。

例 6 证明 $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 为奇函数

证

(1) 求定义域 $D(f)$:

$$\begin{cases}1+x>0\\1-x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>-1\\x<1\end{cases}\Rightarrow -1<x<1 \quad 或 \quad \begin{cases}1+x<0\\1-x<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<-1\\x>1\end{cases}矛盾$$

故 $D(f)=(-1,1)$，它关于原点对称。

(2) $f(-x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{-1}=-\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)=-f(x)$

所以 $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 为奇函数。

4. 函数的周期性

设 $y=f(x)$ 的定义域为 D，存在最小正数 T，使得 $\forall\, x\in D$，恒有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的**周期函数**。

如 $y=\sin x$ 和 $y=\cos 2x$ 分别是以 2π 和 π 为周期的周期函数。而 $y=\sin x^2$ 是非周期函数。

例 7 求 $f(x)=\sin^2 x$ 的周期

解 $D(f)=R$，且 $\sin^2 x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x$. 设 T 为 $\cos 2x$ 的周期，则 $\cos 2(x+T)=\cos(2x+2T)=\cos 2x$

但 $\cos 2x=\cos(2x+2\pi)\Rightarrow 2T=2\pi$ 即 $T=\pi$.

说明：常数函数可以认为是周期为任何正常数的周期函数，故 $f(x)$ 的周期亦为 π。

习　题

1. 叙述函数的定义。并指出下列各小题中 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否为相同函数，为什么？

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $g(x)=x+1$.

(2) $f(x)=\sqrt{x^2}$ 与 $g(x)=x\operatorname{sgn}x$.

(3) $y=\ln(x-1)^3$ 与 $s=3\ln(t-1)$.

2. 求下列各函数的定义域与 $x=x_0$ 处函数的值。

(1) $f(x)=\sqrt{x^3-1}+\dfrac{1}{x^2-4}$，求 $f(x_0)$，$f(3)$.

(2) $f(x)=\arccos(3x^2)$，求 $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

(3) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+5x+4}+2$，求 $f(0)$ 与 $f(1)$.

(4) 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & -1\leqslant x<0,\\ \sin x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$ 求 $f(x)$ 与 $f(2x+1)$ 的定义域及 $f(-0.5)$，$f(0)$ 与 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 的值。

(5) 已知 $f(x)$ 定义域为 $[a,b]$，$(a>0)$，求 $g(x)=f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域。

3. 已知 $f(x)$ 的定义域为 R，下列各函数中哪些函数必为偶函数？为什么？

(1) $y=|f(x)|$　　(2) $y=f(x^2)$

(3) $y=f(x)=C$　　(4) $y=f(x)+f(-x)$

4. 指出下列各函数的有界区域

(1) $y = \sin^2 x$　　(2) $y = p_n(x)$, $p_n(x)$ 为 n 次多项式

(3) $y = \dfrac{\cos x}{x}$　　(4) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

5. 证明 $y = \lg x$ 当 $x > 0$ 时是单调增函数．

6. 证明若 $x > 0$，$f(x)$ 为单调增函数，则 $f(1/x)$ 与 $f(\ln \dfrac{1}{x})$ 均为单调减函数。

§1.3　初等函数

一、反函数

定义 2　已给函数 $y=f(x)$，若将 y 作为自变量，由关系式 $y=f(x)$确定的函数 $x=\varphi(y)$称为 $y=f(x)$的反函数，而 $y=f(x)$称为直接函数。

习惯上，仍用 x 作自变量，故 $y = \varphi(x)$（有时记为 $y = f^{-1}(x)$）叫 $y = f(x)$ 的反函数。

$y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称。

例 1　求下列各式的反函数

(1) $y = f(x) = 2x + 3$　　(2) $y = g(x) = x^2$

解

(1) ① 求出 $f^{-1}(x)$ 的具体表达式，即由 $y = f(x)$ 解出 x。

$y = 2x + 3 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}(y - 3)$, $y \in R$.

② x 与 y 对换：$y = f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}(x - 3)$, $x \in R$.

(2) $y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$, $y \in [0, +\infty)$

它不是单值函数。但若将 $g(x) = x^2$ 定义域分为两个单调区间$(-\infty, 0]$和$(0, +\infty)$，则 $g(x)$ 在$(-\infty, 0]$和$(0, +\infty)$上的反函数分别为 $y = -\sqrt{x}$，$x \in [0, +\infty)$ 和 $y = \sqrt{x}$，$x \in (0, +\infty)$.

说明：若直接函数是严格单调的，则其反函数必定存在，且严格单调。

二、基本初等函数

1. 常数函数

$y = f(x) = c$（常数），$\forall\, x \in R$.

2. 幂函数

$y = f(x) = x^{\mu}$，其定义域随 μ 的取值不同而异。如 μ 为正整数，则 $D(f) = R$。当 $\mu = \dfrac{3}{2}$ 时，$y = f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ 叫半立方抛物线，其定义域为$[0, +\infty)$，图 1-6 中细实线和粗实线分别表示三次抛物线 $y = x^3$ 和半立方抛物线 $y = x^{\frac{3}{2}}$ 的图象。

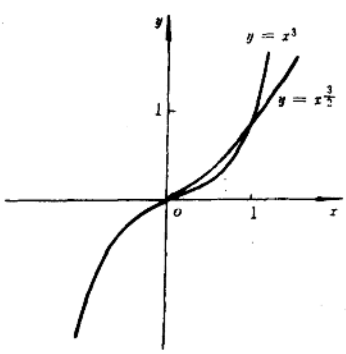


图 1-6

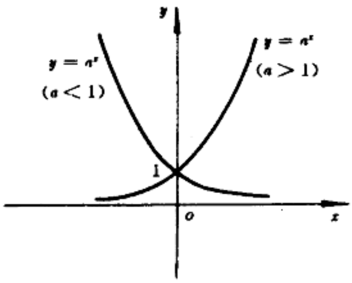


图 1-7

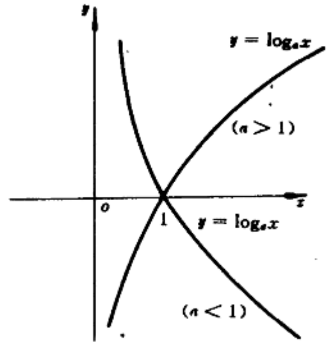


图 1-8

3. 指数函数

$y = a^x$(a 为常数,$a > 0$,且 $a \neq 1$),其定义域为 R,图 1-7 中,细实线和粗实线分别表示 $a > 1$ 和 $0 < a < 1$ 时,指数函数 $y = a^x$ 的图形。

4. 对数函数

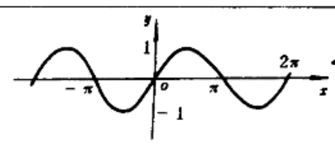
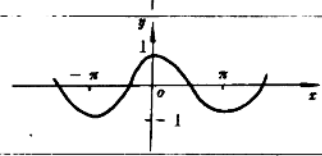
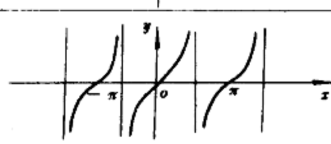
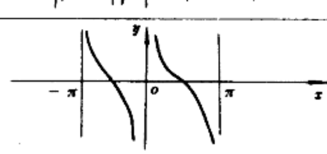
$y = \log_a x$(a 为常数,$a > 0$,且 $a \neq 1$)其图象如图 1-8。当底数 a 为 e 和 10 时,$y = \log_a x$ 分别记为 $y = \ln x$ 和 $y = \lg x$.

指数函数 $y = a^x$ 与对数函数 $y = \log_a x$ 互为反函数。

5. 三角函数

三角函数的图象、性质见表 1-1。

表 1-1

函数名称	符 号	图 象	主 要 性 质
正弦函数	$y=\sin x$		(1) 定义域:R (2) 在 R 上有界,$\lvert\sin x\rvert\leqslant 1$ (3) 周期 $T=2\pi$ (4) 为奇函数
余弦函数	$y=\cos x$		性质(1)、(2)、(3)与正弦函数相同 (4) 是偶函数
正切函数	$y=\frac{\sin x}{\cos x}$ $=\mathrm{tg}x$		(1) 定义域 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z$ (2) 周期 $T=\pi$ (3) 奇函数
余切函数	$y=\frac{\cos x}{\sin x}$ $=\mathrm{ctg}x$		(1)定义域 $y\neq k\pi, k\in Z$ 性质(2)、(3)与正切函数相同

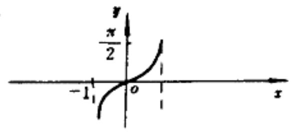
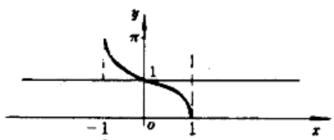
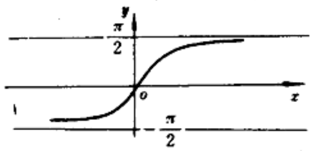
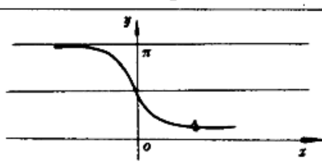
6. 反三角函数

$y = \sin x$,$y = \cos x$,$y = \mathrm{tg}x$ 和 $y = \mathrm{ctg}x$ 的反函数分别称为反正弦函数:$y = \mathrm{Arc}\ \sin x$,

反余弦函数：$y = \text{Arc}\cos x$，反正切函数：$y = \text{Arc tg}x$ 和反余切函数：$y = \text{Arc ctg}x$.

上述四个反三角函数都是多值函数，为此，要限制其值域，使它们成为单值函数，这些单值函数分别称为各反三角函数的主值函数，规定如表 1-2。

表 1-2

函数名称	符　号	图　　象	主　要　性　质
反正弦主值函数	$y=\arcsin x$		(1) 定义域$[-1,1]$ (2) 值域$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ (3) 奇函数
反余弦主值函数	$y=\text{arc}\cos x$		(1) 定义域$[-1,1]$ (2) 值域$[0,\pi]$ (3) 不具奇偶性
反正切主值函数	$y=\text{arctg}x$		(1) 定义域：R (2) 值域$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ (3) 奇函数
反余切主值函数	$y=\text{arcctg}x$		(1) 定义域：R (2) 值域$(0,\pi)$ (3)不具奇偶性

定义 3　常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数称为基本初等函数。

三、复合函数

函数 $y = \ln(\sin x)$，可以视为 $y = \ln u$ 和 $u = \sin x$ 复合(叠置)而成。一般情形如定义 4。

定义 4　设函数 $y = f(u)\ (u \in D(f))$ 与 $u = \varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的值域 $R(\varphi)$ 与 f 的定义域相交不空，即 $R(\varphi) \cap D(f) \neq \varnothing$，则称 $y = f(\varphi(x))$ 为 x 的复合函数，x 为自变量，u 称为中间变量。

例如函数 $y = f(u) = \sqrt{u-2}$，$u = \varphi(x) = \text{arc}\sin x$，$u = \psi(x) = x^2 - 1$。显然有 $D(f) = [2, +\infty)$，$R(\varphi) = [-1,1]$，$R(\psi) = [-1, +\infty)$

(1) 由于 $D(f) \cap R(\varphi) = [2, +\infty) \cap [-1,1] = \varnothing$，($\varnothing$ 表示空集合)．故 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 不能构成复合函数。即 $y = f(\varphi(x)) = \sqrt{\text{arc}\sin x - 2}$ 无意义。

(2) 因为 $D(f) \cap R(\psi) = [2, +\infty) \cap [-1, +\infty) = [2, +\infty) \neq \varnothing$，故 $y = f(u)$ 与 $u = \psi(x)$ 能构成复合函数，即

$$y = f(\psi(x)) = \sqrt{x^2 - 1 - 2} = \sqrt{x^2 - 3}$$

此函数当 $|x| \geqslant \sqrt{3}$ 时有意义。

例 2 指出下列函数的复合过程

(1) $y = \sqrt{\ln \sin(x^2 + 1)}$ (2) $y = a^{e^{e^x}}$

解

(1) $y = \sqrt{u_1}$, $u_1 = \ln u_2, u_2 = \sin u_3, u_3 = x^2 + 1$;

(2) $y = a^u$, $u = e^v, v = e^x$.

研究复合函数复合过程的方法是：将复合函数从外层向里层(或从整体上)看成一个基本初等函数，从而可确定 y 作为第一层中间变量的解析表达式的形式。第一层中间变量若仍为自变量的复合函数，则继续使用上述法，直到中间变量成为自变量的基本初等函数或基本初等函数的代数和为止。

定义 5 将由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合所得到的函数称为初等函数。

如 $y = x^2 + 2x + 1, y = \sin(x^3 - \sqrt{x}), y = \ln(\mathrm{tg}x^2)$ 等都是初等函数，但 $y = \mathrm{sgn}x$, $y = [x]$ 等不是初等函数。

定义 6 将 $y = \mathrm{sh}x \triangleq \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$、$y = \mathrm{ch}x \triangleq \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$、$y = \mathrm{th}x \triangleq \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$、$y = \mathrm{cth}x \triangleq \frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}$ 分别称为**双曲正弦、双曲余弦、双曲正切、双曲余切函数**。

可以证明：

(1) $y = \mathrm{sh}x, y = \mathrm{th}x, y = \mathrm{cth}x$ 为奇函数，$y = \mathrm{ch}x$ 为偶函数

(2) $(\mathrm{ch}x)^2 - (\mathrm{sh}x)^2 = 1$

(3) $\mathrm{sh}(x + y) = \mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}y + \mathrm{ch}x\,\mathrm{sh}y$

特别 $\mathrm{sh}2x = 2\mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}x$

习　　题

1. 求下列各函数的反函数

(1) $y = 5x - 7$ (2) $y = \frac{x+1}{x-1}$

(3) $y = \sqrt[3]{x^3 + 1}$ (4) $y = \mathrm{sh}x$

2. 指出下列复合函数的复合过程

(1) $y = a^{x^2}$ $(a > 0, a \neq 1)$ (2) $y = \arccos \sqrt{x^2 - 1}$

(3) $y = \sin(\cos(\sin x))$ (4) $y = \log_a(\mathrm{tg}\sqrt{x+1})$

3. 已知 $y = f(x) = 2x + 3$，求 $\varphi(x)$ 并使 $f(\varphi(x)) = x$。

4. 下列哪些函数是初等函数

(1) $y = x\cos x$ (2) $y = e^{x\ln x}$, $x > 0$

(3) $y = \mathrm{sgn}x + \cos x$ (4) $y = \mathrm{arctg}x + x^2 - 1$

(5) $y = [x] - 1$