谢金星　薛毅　编著

优化建模与LINDO/LINGO软件

清华大学出版社

谢金星 薛 毅 编著

优化建模与LINDO/LINGO软件

清华大学出版社

北 京

内容简介

LINDO 和 LINGO 是美国 LINDO 系统公司开发的一套专门用于求解最优化问题的软件包. LINDO 用于求解线性规划和二次规划问题,LINGO 除了具有 LINDO 的全部功能外,还可以用于求解非线性规划问题,也可以用于一些线性和非线性方程(组)的求解,等等. LINDO 和 LINGO 软件的最大特色在于可以允许优化模型中的决策变量是整数(即整数规划),而且执行速度很快. LINGO 实际上还是最优化问题的一种建模语言,包括许多常用的函数可供使用者建立优化模型时调用,并提供与其他数据文件(如文本文件、Excel 电子表格文件、数据库文件等)的接口,易于方便地输入、求解和分析大规模最优化问题. 由于这些特点,LINDO 和 LINGO 软件在教学、科研和工业、商业、服务等领域得到了广泛应用.

本书详细介绍在 Microsoft Windows 环境下运行的最新版本(LINDO 6.1,LINGO 9.0)的使用方法,并包括社会、经济、工程等方面的大量实际应用问题的数学建模和求解实例,可供了解和使用优化建模和优化软件的教师和学生、管理决策者、科技工作者及其他对此感兴趣的读者阅读,也可作为运筹学课程的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

优化建模与 LINDO/LINGO 软件/谢金星,薛毅编著. —北京: 清华大学出版社,2005.7
ISBN 7-302-11180-4

Ⅰ.优…　Ⅱ.①谢…②薛…　Ⅲ.最优化算法—应用软件,LINDO、LINGO　Ⅳ.O242.23

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 061299 号

出 版 者: 清华大学出版社　**地　址**: 北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　**邮　编**: 100084
社 总 机: 010-62770175　**客户服务**: 010-62776969
组稿编辑: 刘　颖
文稿编辑: 王海燕
印 刷 者: 北京牛山世兴印刷厂
装 订 者: 三河市新茂装订有限公司
发 行 者: 新华书店总店北京发行所
开　本: 185×230　**印张**: 30.75　**字数**: 739 千字
版　次: 2005 年 7 月第 1 版　2005 年 7 月第1 次印刷
书　号: ISBN 7-302-11180-4/O·470
印　数: 1～4000
定　价: 48.00 元

前　言

在工程技术、经济管理、科学研究和日常生活等诸多领域中，人们经常遇到的一类决策问题是，在一系列客观或主观限制条件下，寻求使所关注的某个或多个指标达到最大（或最小）的决策. 这种决策问题通常称为最优化（或简称为优化）问题，研究处理这类问题的数学方法称为最优化方法，它也是运筹学和管理科学中解决定量决策问题的基本方法. 在决策科学化、定量化的呼声日益高涨的今天，用最优化方法解决定量决策问题无疑是符合时代潮流和形势发展需要的.

用最优化方法解决决策问题包括两个基本步骤：首先，需要把实际决策问题翻译、表述成数学最优化的形式，即用数学建模的方法建立决策问题的优化模型，或简称为优化建模；其次，建立优化模型后，需要选择、利用优化方法和工具求解模型. 优化建模方法自然具有一般的数学建模方法的共同特性，但优化模型又是一类既重要、又特殊的数学模型，因此优化建模方法又具有一定的特殊性和专业性. 此外，由于优化模型的种类很多，很多模型目前还没有有效的求解方法，不同的算法用于求解不同模型的效果可能差异很大，如何利用优化软件求解优化模型也有一定的专业性和技巧性.

本书就是希望以上面两个步骤为突破口，一方面重点介绍优化建模的思想和方法，另一方面重点介绍专业的优化软件包 LINDO 和 LINGO 的使用. 全书结合具体的案例进行介绍，而很少介绍有关优化的数学理论. 之所以这样组织，主要是基于以下考虑：目前国内有关优化的数学理论方面的专门书籍已经很多，有兴趣的读者随时可以从几乎任何一本运筹学或最优化方法的书中找到相应的数学理论；此外，我们希望使本书的起点尽量低，让没有太多数学基础的读者也能读懂绝大部分内容，从而把本书的重点放到强调优化建模方法的重要性和实用性上，并借助专业优化软件的强大功能，直接得到优化模型的结果.

目前国际市场上的专业优化软件以及包含部分优化功能的数学类软件很多，本书之所以选择 LINDO 和 LINGO 软件进行介绍，主要是因为 LINDO 和 LINGO 软件是著名的专业优化软件，其功能比较强、计算效果比较好，与那些包含部分优化功能的非专业软件相比，通常具有明显的优势. 此外，LINDO 和 LINGO 软件使用起来非常简便，很容易学会，在优化软件（尤其是运行于个人电脑上的优化软件）市场占有很大份额，在国外运筹学类的教科书中也被广泛用做教学软件.

本书大致可以分成两部分：前 4 章介绍优化模型的基本概念和 LINDO/LINGO 软件的基本使用方法.在这一部分，我们尽量将软件的使用介绍得完整些，以便使之能作为 LINDO/LINGO 的简易使用手册，但读者不一定在第一次阅读时就全部掌握，可以在将来需要时再回头来查阅和加深理解（尤其对于标题中带有"*"的内容）.从第 5 章开始，通过介绍优化模型在各个领域的一些典型的应用案例，说明优化建模的过程，最后归结为用 LINDO/LINGO 软件求解.这部分内容中的每个案例基本上都是独立的，读者可以随意选择阅读.

本书中所有案例的 LINDO/LINGO 程序可以从以下网址下载：

http://faculty.math.tsinghua.edu.cn/~jxie/lindo

由于编者水平所限，书中一定存在很多不足甚至错误之处，欢迎读者不吝指正.我们的电子邮件地址是：jxie@math.tsinghua.edu.cn（谢金星）；xueyi@bjut.edu.cn（薛毅）.

编　者

2005 年 3 月

目　录

第1章 引 言

1.1 优化模型的基本概念

1.1.1 优化模型的一般形式

在工程技术、经济管理、科学研究和日常生活等诸多领域中，人们经常遇到的一类决策问题是：在一系列客观或主观限制条件下，寻求使所关注的某个或多个指标达到最大（或最小）的决策. 例如，结构设计要在满足强度要求的条件下选择材料的尺寸，使其总重量最轻；资源分配要在有限资源约束下制定各用户的分配数量，使资源产生的总效益最大；运输方案要在满足物资需求和装载条件下安排从各供应点到各需求点的运量和路线，使运输总费用最低；生产计划要按照产品工艺流程和顾客需求，制定原料、零件、部件等订购、投产的日程和数量，尽量降低成本使利润最高.

上述这种决策问题通常称为最优化（optimization，简称为优化）问题. 人们解决这些优化问题的手段大致有以下几种：

（1）依赖过去的经验判断面临的问题. 这似乎切实可行，并且没有太大的风险，但是其处理过程会融入决策者太多的主观因素，常常难以客观地给予描述，从而无法确认结果的最优性.

（2）做大量的试验反复比较. 这固然比较真实可靠，但是常要花费太多的资金和人力，而且得到的最优结果基本上跑不出开始设计的试验范围.

（3）用数学建模（mathematical modeling）的方法建立优化模型（optimization model）求解最优决策，我们将这种方式简称为优化建模（optimization modeling）. 虽然由于建模时要作适当的简化，可能使得结果不一定完全可行或达到实际上的最优，但是它基于客观规律和数据，又不需要多大的费用，具有前两种手段无可比拟的优点. 如果在此基础上再辅之以适当的经验和试验，就可以期望得到实际问题的一个比较圆满的回答. 优化建模是解决优化问题的最有效、最常用的方法之一. 在决策科学化、定量化的呼声日益高涨的今天，用数学建模方法求解优化问题，无疑是符合时代潮流和形势发展需要的.

优化模型是一种特殊的数学模型，优化建模方法是一种特殊的数学建模方法. 优化模型一般有以下三个要素：

（1）决策变量（decision variable），它通常是该问题要求解的那些未知量，不妨用 n 维

向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 表示，当对 $\boldsymbol{x}$ 赋值后它通常称为该问题的一个解或一个点(solution／point).

(2) 目标函数(objective function)，通常是该问题要优化(最小或最大)的那个目标的数学表达式，它是决策变量 $\boldsymbol{x}$ 的函数，可以抽象地记作 $f(\boldsymbol{x})$.

(3) 约束条件(constraints)，由该问题对决策变量的限制条件给出，即 $\boldsymbol{x}$ 允许取值的范围为 $\boldsymbol{x}\in\Omega$，Ω 称为可行域(feasible region)，常用一组关于 $\boldsymbol{x}$ 的等式 $h_i(\boldsymbol{x})=0(i=1,2,\cdots,m_e)$或不等式 $g_j(\boldsymbol{x})\leqslant 0(j=m_e+1,m_e+2,\cdots,m_e+m)$来界定，分别称为等式约束(equality constraint)和不等式约束(inequality constraint).

于是，优化模型从数学上可表述成如下一般形式：

$$\text{opt}\quad z=f(\boldsymbol{x}); \tag{1}$$

$$\text{s.t.}\quad h_i(\boldsymbol{x})=0\quad (i=1,2,\cdots,m_e), \tag{2}$$

$$g_j(\boldsymbol{x})\leqslant 0\quad (j=m_e+1,m_e+2,\cdots,m_e+m). \tag{3}$$

这里 opt 是最优化(optimize)的意思，可以是 min(求极小，即 minimize 的缩写)或 max(求极大，即 maximize 的缩写)两者之一； s. t. 是“受约束于”(subject to，也可理解成 such that)的意思.

1.1.2 可行解与最优解

同时满足约束(2)和(3)的解 $\boldsymbol{x}$(即 $\boldsymbol{x}\in\Omega$)称为可行解或可行点(feasible solution／point)，否则称为不可行解或不可行点(infeasible solution／point). 满足(1)的可行解 $\boldsymbol{x}^*$(也就是使目标达到最优的 $\boldsymbol{x}^*$)称为最优解或最优点(optimal solution／point，也称为optimizer)，在最优解 $\boldsymbol{x}^*$ 处目标函数的取值 $f(\boldsymbol{x}^*)$称为最优值(optimal value，也称为optimum). 对于极小化问题，则对应的最优解(点)也可以称为最小解(点)(minimum solution／point，或 minimizer)，最优值称为最小值(minimum). 类似地，对于极大化问题，则对应的最优解(点)也可以称为最大解(点)(maximum solution／point，或maximizer)，最优值称为最大值(maximum).

如果在某个可行解 $\boldsymbol{x}^*$ 的附近($\boldsymbol{x}^*$ 的某个邻域)，$\boldsymbol{x}^*$ 使目标函数达到最优(即将可行域限定在 $\boldsymbol{x}^*$ 的某个邻域中时 $\boldsymbol{x}^*$ 是最优解)，但 $\boldsymbol{x}^*$ 不一定是整个可行域 Ω 上的最优解，则 $\boldsymbol{x}^*$ 称为一个局部最优解或相对最优解(local／relative optimal solution，或local /relative optimizer)，此时的所谓最优解实际上只是极值点. 相对于局部最优解，我们把整个可行域上的最优解称为全局最优解或整体最优解(global optimal solution，或 global optimizer). 例如，对于极小化问题，图 1-1 中的 x_1，x_2 都是局部最优解(最小点)，其中 x_1 不是全局最优解，而 x_2 是全局最优解. 对大多数优化问题，求全局最优解是很困难的，所以很多优化软件往往只能求到局部最优解.

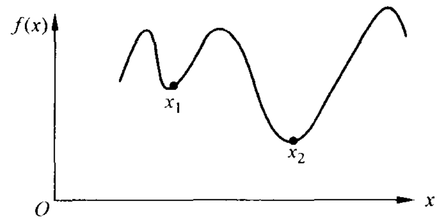

图 1-1 局部最优解与整体最优解

1.1.3 优化模型的基本类型

优化模型可以从不同的角度进行分类.若优化模型中只有(1)式而没有(2)、(3)式,则这种特殊情况称为无约束优化(unconstrained optimization);只要有(2)或(3)式,模型就称为约束优化(constrained optimization).还有一些更特殊的情况,即只有(2)式而没有(1)、(3)式,模型就变成了普通的方程组(system of equations);如果只有(3)式而没有(1)、(2)式,模型就变成了不等式组(system of inequalities);这些都可以看成是约束优化的特例.一般说来,实际生活中的优化问题总是有约束的,但是如果最优解不是在可行域的边界上,而是在它的内部,那么就可以考虑用无约束优化来比较简单地处理.另外,在理论和算法上,无约束优化也是约束优化的基础.

在上面的模型(1)、(2)、(3)中,除了要求决策变量满足约束(2)、(3)外,没有限制决策变量 $\boldsymbol{x}$ 在什么范围内取值,这时通常表示(默认)决策变量的分量 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 可以在实数范围内取值,即 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$.优化问题的另一种分类方法,是按照模型中决策变量的取值范围以及目标函数 $f(\boldsymbol{x})$ 和约束函数 $h_i(\boldsymbol{x})=0\ (i=1,2,\cdots,m_e)$ 或不等式 $g_j(\boldsymbol{x})\leqslant 0\ (j=m_e+1,m_e+2,\cdots,m_e+m)$ 的特性进行分类.常见的类型如下:

(1) 当模型中决策变量 $\boldsymbol{x}$ 的所有分量 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 取值均为连续数值(即实数)时,优化模型称为连续优化(continuous optimization),这也是通常所说的数学规划(mathematical programming).此时,若 f,h_i,g_j 都是线性函数,称为线性规划(linear programming,LP);若 f,h_i,g_j 至少有一个是非线性函数,则称为非线性规划(nonlinear programming,NLP).特别地,若 f 是一个二次函数,而 h_i,g_j 都是线性函数,则称为二次规划(quadratic programming,QP),它是一种相对比较简单的非线性规划.

(2) 否则,若 $\boldsymbol{x}$ 的一个或多个分量只取离散数值,则优化模型称为离散优化(discrete optimization),或称为组合优化(combinatorial optimization).这时通常 $\boldsymbol{x}$ 的一个或多个分量只取整数数值,称为整数规划(integer programming,IP),并可以进一步明确地分为纯整数规划(pure integer programming,PIP,此时 $\boldsymbol{x}$ 的所有分量只取整数数值)和混合整数规划

(mixed integer programming,MIP,此时 $\boldsymbol{x}$ 的部分分量只取整数数值). 特别地,若 $\boldsymbol{x}$ 的分量中取整数数值的范围还限定为只取 0 或 1,则称为 0-1 规划(zero-one programming, ZOP). 此外,与连续优化分成线性规划和非线性规划类似,整数规划也可以分成整数线性规划(ILP)和整数非线性规划(INLP).

请大家注意,上面括号内的英文中经常出现"programming"(规划)这个词,在与计算机语言连用时它通常是"编程"的意思,如C ++ programming (C ++ 语言编程). 但在最优化中,它的意思就是"optimization"(优化),因此偶尔也会有用"optimization"(优化)来代替"programming"(规划)的时候,但反过来通常不行,什么时候用哪个词基本上是约定俗成的,并没有什么特别的道理可言. 例如,我们几乎从来不把"组合优化"(combinatorial optimization)说成"组合规划"(combinatorial programming),一般也很少会将"整数规划"(integer programming)说成"整数优化"(integer optimization).

还可以根据其他标准对优化问题进行分类. 例如,根据模型中参数或决策变量是否具有不确定性,可以把优化问题分成确定性规划、不确定性规划(如随机规划、模糊规划等);根据 f,h_i,g_j 是否连续、是否可微,可以把优化问题分成光滑优化、非光滑优化;根据需要优化的目标的多少,把优化问题分成单目标规划、多目标规划;此外,还有目标规划、动态规划、多层规划,等等. 总之,出于解决实际问题的需要,人们建立和研究了不同类型的优化问题;反过来,有关优化问题的理论研究成果和所涉及的内容非常丰富,为优化方法的广泛应用提供了支持.

本书不准备对优化理论和方法进行具体、详细地介绍,而是把重点放在如何建立优化模型,然后如何用 LINDO/LINGO 软件来求解所建立的模型和分析所得到的计算结果. 即便如此,由于不同类型的优化问题的求解难度和求解方法是有很大差异的,因此在解决我们所面临的问题时,弄清问题的类型是很有必要的. 例如,只能对于连续线性规划或某些特定的二次规划(如凸二次规划)问题,可以比较容易地求到整体最优解,或判断原问题无解;而对于一般的非线性规划和整数规划,当问题的规模比较大时,在可以接受的计算时间内找到整体最优解是非常困难的,因此通常只能求局部最优解. 一般来说,离散优化问题比连续优化问题难以求解,非线性规划问题比线性规划问题难以求解,非光滑优化比光滑优化难以求解. 对于本书后面选择的求解软件来说,理解下面列出的主要优化类型及其求解难度(如图 1-2 所示)是有帮助的.

对于解决实际优化问题来说,建立其对应的优化模型是极其重要的一步. 为了让大家对上述类型的优化模型有一个基本的了解,1.2 节将分别介绍一些可以用线性规划、二次规划、非线性规划、整数规划建立模型的实际问题的案例.