新教材

XINJIAOCAI WANQUANJIEDU

完全解读

配人教大纲版·第二次修订

与最新教材完全同步
重点难点详尽解读

高一数学「下」

主　　编　徐新斌　张克修

分册主编　李元明　彭修和

吉林人民出版社

新教材 完全解读

本书特点

- 本书是一套同步讲解类的辅导书。在编写中，首先落实知识点→连成知识线→形成知识面→结成知识网，对重点、难点详尽解读。
- 本书将为您排除学习中的障碍。对思维误区、疑难易错题、一题多解题都指出解题方法或技巧，让您从“学会”到“会学”。
- 本书修订后增加了部分例题、习题的难度，适合于中上等学生使用。

明确学习目的

指出每节的三维目标，明确重难点，指导学生有的放矢地学习新课，提纲挈领，是提高学习效率的前提。

详细解读教材

采用总结归纳、层层渗透的方式，以每个知识点为讲解元素，结合［释疑解难］、［思维拓展］、［思考讨论］、［注意］、［说明］、［小结］、［思维误区］、［探究交流］等栏目设计，落实知识点，连成知识线，形成知识面，结成知识网，突出重点，解决难点，抓住关键点，这是吃透教材的核心内容。

讲解经典例题

结合考点，按基本概念、基础应用、综合应用、探索创新、疑难易错五个角度，精选典型例题，透彻地分析解题思路，给出详细解题过程，总结解题方法，这是知识转化为能力的关键。


新教材完全解读·高二数学

6.3 不等式的证明

新课指南

教材解读

相关链接

知识详解

知识点1 比较法（重点）

典例剖析

基础知识应用题

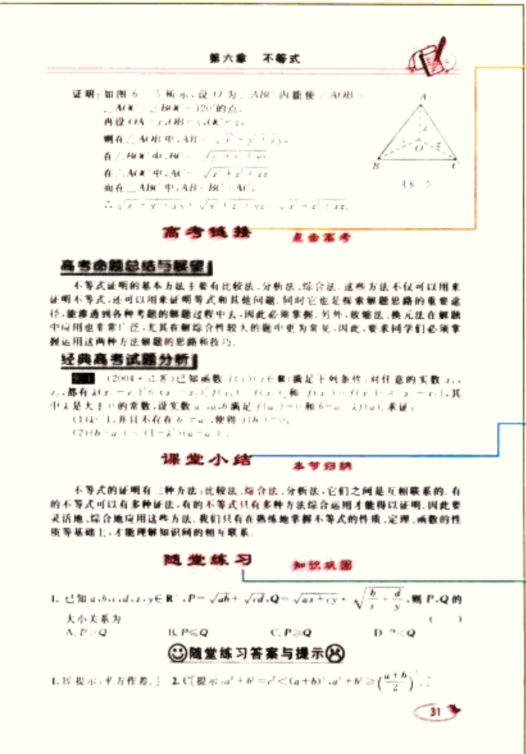
探索与创新题

30

《完全解读》解读完全

说明

本丛书样张按学科分别设计，通过样张您可了解本书栏目、功能等基本信息，仅供参考，如所购图书与样张有个别区别，以所用图书为准。



证明：如图6-5所示，设O为$\triangle ABC$内能使$\angle AOB=\angle AOC=\angle BOC=120^\circ$的点。

再设$OA=x$，$OB=y$，$OC=z$，

则在$\triangle AOB$中，$AB=\sqrt{x^2+y^2+xy}$，

在$\triangle BOC$中，$BC=\sqrt{y^2+z^2+yz}$，

在$\triangle AOC$中，$AC=\sqrt{x^2+z^2+xz}$，

而在$\triangle ABC$中，$AB+BC>AC$，

$\therefore \sqrt{x^2+y^2+xy}+\sqrt{y^2+z^2+yz}>\sqrt{x^2+z^2+xz}$。

图6-5

高考链接　点击高考

高考命题总结与展望

不等式证明的基本方法主要有比较法、分析法、综合法，这些方法不仅可以用来证明不等式，还可以用来证明等式和其他问题，同时它也是探索解题思路的重要途径，能渗透到各种考题的解题过程中去，因此必须掌握。另外，放缩法、换元法在解题中应用也非常广泛，尤其在解综合性较大的题中更为常见，因此，要求同学们必须掌握运用这两种方法解题的思路和技巧。

经典高考试题分析

例1　（2004·江苏）已知函数$f(x)(x\in \mathbf{R})$满足下列条件：对任意的实数x_1，x_2都有$\lambda(x_1-x_2)^2\leq(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]$和$|f(x_1)-f(x_2)|\leq|x_1-x_2|$，其中$\lambda$是大于0的常数，设实数$a_0$，$a$，$b$满足$f(a_0)=0$和$b=a-\lambda f(a)$，求证：

(1)$\lambda\leq1$，并且不存在$b_0\neq a_0$，使得$f(b_0)=0$；

(2)$(b-a_0)^2\leq(1-\lambda^2)(a-a_0)^2$。

课堂小结　本节归纳

不等式的证明有三种方法：比较法、综合法、分析法，它们之间是互相联系的。有的不等式可以有多种证法，有的不等式只有多种方法综合运用才能得以证明。因此要灵活地、综合地应用这些方法。我们只有在熟练地掌握不等式的性质、定理、函数的性质等基础上，才能理解知识间的相互联系。

随堂练习　知识巩固

1. 已知$a,b,c,d,x,y\in\mathbf{R}^+$，$P=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$，$Q=\sqrt{ax+cy}\cdot\sqrt{\frac{b}{x}+\frac{d}{y}}$，则$P$，$Q$的大小关系为（　　）

A. $P>Q$　　B. $P\leq Q$　　C. $P\geq Q$　　D. $P<Q$

随堂练习答案与提示

1. B[提示：平方作差.]　2. C[提示：$a^2+b^2=c^2<(a+b)^2$，$a^2+b^2\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.]

总结命题趋势

根据高考要求和考试范围，结合本节考点，回顾往年高考试题特点，总结解题思路，预测命题趋势，让学生提前了解高考信息。

归纳本节要点

总结本节要点，掌握其内在联系，查找遗漏点，消化课堂知识。

巩固基础知识

与本节知识讲解和例题剖析相对应，题量适当，注重基础，充分落实基础知识和基本技能。

目　录
CONTENTS

第四章

三角函数

本章视点

一、本章内容分析

1. 三角函数是中学数学的重要内容之一，它的基础主要是几何中的相似三角形和圆，研究方法主要是代数中的式子变形和图象分析，因此三角函数的研究，已经初步把代数和几何联系起来了．高等数学、物理学、天文学、测量学以及其他各种应用技术学科，都常常要用到三角函数的一些性质，因此这些内容既是解决生产实际问题的工具，又是学习高等数学的基础．

2. 本章内容可分为四部分．

第一部分（第 1～5 节）主要包括三角函数的有关概念，同角三角函数的基本关系式、诱导公式．教材首先将初中学过的锐角三角函数推广到 0°～360°间的角的三角函数．接着通过具体例子，用运动的观点讲清角的概念推广的实际意义，说明角的概念推广的必要性，引进任意角的概念．然后介绍弧度制，通过运用弧度制对角的度量，使得角和实数建立起一一对应关系．因此当进一步把三角函数的概念推广到任意角后，就可把三角函数看成是以实数为自变量的函数，使三角函数具有更广泛的意义和应用．最后，为了求任意角的三角函数值，又根据三角函数定义导出同角三角函数间的关系式和诱导公式．

第二部分（第 6～7 节）主要包括两角和与差、二倍角

及半角的三角函数.它是以直角坐标系中两角和的余弦公式为基础,利用直角坐标系中两点间距离公式推导出来的.尤其是两角和的余弦、正弦公式,因为它们是本章各类公式的基础,学习这两个公式时,应详细推导,并注意它们的一般性,同时要通过足够的练习,使自己能够牢记这些公式,并能熟练地运用它们.

第三部分(第8~10节)主要包括三角函数的图象和性质.教材先根据三角函数定义导出三角函数线,并以此为工具作出正弦曲线和余弦曲线,接着根据这两种曲线形状的特点,介绍了先找出在确定图象形状时起关键作用的五个点,然后描点作函数简图的方法,这是一种在精确度要求不太高的情况下常用的方法.接下去研究函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象和函数$y=\sin x$的图象的关系,使学生在图象的变换过程中,进一步理解三角函数的性质.最后简要地介绍了正切函数的图象和性质.

第四部分(第11节)主要包括已知三角函数值求角.其中包括反正弦、反余弦、反正切函数的定义.要求理解反三角函数的概念,能用反三角函数式表示非特殊角.

3. 本章的重点、难点及关键.

本章的重点是:(1)任意角三角函数的概念;(2)同角三角函数间的关系式、诱导公式及其运用;(3)正弦、余弦的和角公式及其应用;(4)正弦函数图象的画法和性质.

本章的难点是:(1)弧度制的概念;(2)综合运用公式进行三角函数式的化简、求值和恒等式的证明;(3)周期函数的概念;(4)函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象与$y=\sin x$的图象之间的关系.

学习本章的关键是熟练掌握任意角三角函数的定义,明确余弦的和角公式的特征及其向差角公式、正弦的和角公式的转化,掌握正弦曲线的画法和正弦函数的性质.

二、学法指导

1. 掌握知识体系.对三角函数式的恒等变形,要牢记

公式及其相互关系，在应用公式时要特别注意逆用公式或变形使用，训练逆向思维能力. 对三角函数的图象及其性质，要充分利用图象的特征帮助记忆，以便灵活运用.

2. 在熟练掌握概念、公式的基础上，要善于总结解题方法与规律. 三角函数的问题千变万化，但只要抓住三角函数式的恒等变形这一根本，许多看似不同的问题其解法是相同的. 三角变换中常用的变形有：

(1)化异为同，即化不同名函数为同名函数，化不同角为同角的过程. 例如，求 $y=\cos^2 x+\sin x$ 的最值时就应化为同名函数 $y=-\sin^2 x+\sin x+1$. 又如，求函数 $y=\cos 2x+\cos x$ 的最值时就应化为同角函数 $y=2\cos^2 x+\cos x-1$.

(2)拆凑拼角，即通过分析条件和结论中角的差异，对角实施变换的过程. 例如，已知：$\tan(\alpha+\beta)\cdot\tan\alpha=-5$. 求证：$2\cos(2\alpha+\beta)+3\cos\beta=0$. 只需将已知条件中的角进行如下变换：$2\alpha+\beta=(\alpha+\beta)+\alpha$，$\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$.

(3)升幂与降幂. 对某些无理式常用升幂的方法化简，例如，$\sqrt{1+\cos\alpha}=\sqrt{2}\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$，又如，$1-\cos\theta+\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)$. 对某些高次式常用降幂的方法变形.

(4)对于 $a\sin x+b\cos x$，常提取常数后引入辅助角化为一个角的三角函数.

3. 学习中应注意领会数学思想与方法的实质. 本章中化归思想、数形结合思想、等价转化思想都是贯穿始终的重要思想和方法. 所以在掌握知识的同时，应重视这些方法的运用.

4.1 角的概念的推广

新课指南

1. 理解任意角的概念.
2. 学会在直角坐标系中判定任意角终边所在的象限.
3. 能用集合符号和语言正确地表示终边相同的任意角.
4. 掌握区间角的书写以及区间角间交集、并集的求法.

教材解读 精华要义

知识详解

知识点1 任意角的概念

角可以看成平面内的一条射线绕端点从一个位置旋转到另一个位置所形成的图形.起始位置的射线是角的始边,终止位置的射线是角的终边,射线的端点是角的顶点.本节把以前学习的角从不大于周角的非负角扩充到任意角.

按旋转方向,角可以分为三类:

正角——按逆时针方向旋转所形成的角;

零角——射线没有作任何旋转;

负角——按顺时针方向旋转所形成的角.

记法:"角 α"或"$\angle\alpha$",或简记为"α".

【说明】 (1)掌握角的概念应注意角的三要素:顶点、始边、终边.现在所说的角实际上是初中平面几何中"角是从一点出发的两条射线所组成的图形"的概念的推广,强调了角是"由一条射线绕它的端点旋转而成的"这一运动的观点;

(2)角可以是任意大小的,并强调了角的旋转方向.如,时钟的时针,经过一小时,旋转所成的角为 $-\frac{360^\circ}{12}=-30^\circ$(注意顺时针方向旋转形成负角).

知识点2 象限角、轴线角

1 象限角:当角的顶点与坐标原点重合,角的始边与 x 轴的非负半轴重合,那么角的终边(除端点外)在第几象限,就说这个角是第几象限角.

例如,30°,390°,-330° 角都是第一象限角;300°,660°,-60° 角都是第四

象限角.

【注意】 如果角的顶点不与坐标原点重合,或者角的始边不与 x 轴的非负半轴重合,则不能判断角在哪一个象限,也就是说它不能称为象限角.

各象限角的取值范围:

第一象限角 α 为:$k\cdot360°<\alpha<90°+k\cdot360°\ (k\in\mathbf{Z})$;

第二象限角 α 为:$90°+k\cdot360°<\alpha<180°+k\cdot360°\ (k\in\mathbf{Z})$;

第三象限角 α 为:$180°+k\cdot360°<\alpha<270°+k\cdot360°\ (k\in\mathbf{Z})$;

第四象限角 α 为:$270°+k\cdot360°<\alpha<360°+k\cdot360°\ (k\in\mathbf{Z})$.

Ⅱ轴线角:当角的顶点与坐标原点重合,角的始边与 x 轴的非负半轴重合,那么角的终边落在坐标轴上的角称做轴线角.

例如,0°,90°,180°,270°,−90°,−180°,−270°等都是轴线角.

思维拓展　写出终边在 x 轴上的角的集合.

点拨　$S=\{\alpha|\alpha=n\cdot180°,n\in\mathbf{Z}\}$.

知识点 3　终边相同的角

任意一个角惟一地确定一条终边,但是反过来,任意一个终边位置却可以表示无数个角.

一个角每增加或减少 360°,终边就又回到原来的位置.终边相同的角周而复始地出现,正是三角函数具有周期性的本质原因.

因而,与角 α 终边相同的角的集合为$\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$.

【注意】 这里应明确:①k 是整数;②α 是任意角;③α 与 $k\cdot360°$之间是"+"号.如 $k\cdot360°-30°$应看成 $k\cdot360°+(-30°)$;④终边相同的角不一定相等,但相等的角,终边一定相同;⑤终边相同的角有无数多个,它们相差 360°的整数倍.

【说明】 有时利用一个表达式可以表示多个终边相同的角.如 $S=\{\alpha|\alpha=90°+n\cdot180°,n\in\mathbf{Z}\}$表示终边在 y 轴上的角的集合,$S=\{\alpha|\alpha=n\cdot90°,n\in\mathbf{Z}\}$表示终边在坐标轴上的角的集合.

典例剖析　经典例题

基础知识应用题

主要考查对终边相同的角、象限角、区间角的正确表达形式的掌握.

例 1　在直角坐标系中,作出下列各角,并指出它们是第几象限角:

(1)60°;(2)120°;(3)240°;(4)300°;(5)420°;(6)480°.

解：如图 4-1 所示.

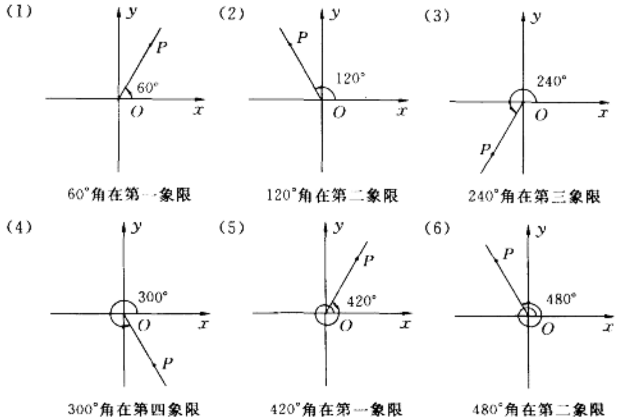


图 4-1

小结　通过作图能够更加直观地观察出 120°,240°,300°,420°,480°等角与锐角 60°之间的关系；也可利用角的形成找出在 0°～360°范围内与任意一个角终边相同的角.

例 2　(1)写出与 $-1\,840°$ 终边相同的角的集合 M；

(2)把 $-1\,840°$ 的角写成 $k\cdot 360°+d(0°\leqslant d<360°)$ 的形式；

(3)若角 $\alpha\in M$，且 $\alpha\in[-360°,360°]$，求角 α.

解：(1)$M=\{\alpha\mid\alpha=k\cdot 360°-1\,840°,k\in\mathbf{Z}\}$；

(2)$-1\,840°=-6\times 360°+320°$；

(3)$\because \alpha\in M$，且 $-360°\leqslant\alpha\leqslant 360°$，

$\therefore\ -360°\leqslant k\cdot 360°-1\,840°\leqslant 360°$.

$\therefore 1\,480°\leqslant k\cdot 360°\leqslant 2\,200°$，$\dfrac{37}{9}\leqslant k\leqslant\dfrac{55}{9}$.

$\because k\in\mathbf{Z}$，$\therefore k=5,6$，故 $\alpha=-40°$ 或 $\alpha=320°$.

小结　在 0°到 360°角范围内找与任意一个角终边相同的角时，可根据实数的带余法进行，因为任意一个角 α 均可写成 $k\cdot 360°+d(0°\leqslant d<360°)$ 的形式，所以与 α 角终边相同的角的集合也可写成 $\{\beta\mid\beta=k\cdot 360°+d,k\in\mathbf{Z}\}$. 如 $M=\{\beta\mid\beta=k\cdot 360°+320°,k\in\mathbf{Z}\}$. 由此确定 $[-360°,360°]$ 范围内的角时，只需令 $k=-1$ 和 0 即可.

例 3　已知 α 是第二象限角，求 $\dfrac{\alpha}{2}$ 以及 2α 所在的象限.

解：∵α是第二象限角，

∴$k\cdot 360^\circ+90^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ+180^\circ, k\in\mathbf{Z}$,

∴$k\cdot 180^\circ+45^\circ<\frac{\alpha}{2}<k\cdot 180^\circ+90^\circ, k\in\mathbf{Z}$,　①

$k\cdot 720^\circ+180^\circ<2\alpha<k\cdot 720^\circ+360^\circ, k\in\mathbf{Z}$.　②

即当①式中的k取不同的整数时，

$\frac{\alpha}{2}$是第一或第三象限角.

即当②式中的k取不同的整数时，

2α是第三或第四象限或y轴负半轴上的角.

【注意】　容易遗漏终边在y轴负半轴上的情况，这时，$2\alpha=k\cdot 720^\circ+270^\circ, k\in\mathbf{Z}$

小结　当α在其他象限时，用同样的方法可以讨论，结论如下：

α所在的象限	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限
$\frac{\alpha}{2}$所在的象限	第一或第三象限	第一或第三象限	第二或第四象限	第二或第四象限

思维拓展　(1)当α在第一或第二象限时，$\frac{\alpha}{2}$都在第一或第三象限，它们有何区别呢？请画图分析；

(2)按照上面的方法，还可以讨论$\frac{\alpha}{3}$所在的象限. 如当α在第一象限时，$\frac{\alpha}{3}$在第一或第二或第三象限.

例4　当角α和角β的终边满足下列关系时，角α和角β满足怎样的关系？

(1)重合；　(2)关于原点对称；

(3)关于x轴对称；　(4)关于y轴对称.

〔分析〕　利用从特殊到一般的辩证思想，可以先在最简单的情况下进行关系分析，即在0°到360°范围内进行分析，然后根据“终边相同的角之间相差整数个周角”推广到任意角. (1)中的两条终边重合，即角α和角β相差整数个周角；(2)中的两条终边关于原点对称，即两个角相差180°角的奇数倍；(3)中两角之和为周角的整数倍；(4)中两条终边的对称轴是y轴，即两角的和为180°角的奇数倍.

解：设$\beta>\alpha$，在0°到360°范围内，

四种情况下的关系分别是$\beta=\alpha, \beta=\alpha+180^\circ, \beta=360^\circ-\alpha, \beta=180^\circ-\alpha$.

推广到任意角，即

(1)$\beta=\alpha+k\cdot 360^\circ\ (k\in\mathbf{Z})$；

(2)$\beta=\alpha+k\cdot 360^\circ+180^\circ\ (k\in\mathbf{Z})$；

(3)$\beta=k\cdot 360^\circ-\alpha\ (k\in\mathbf{Z})$；

(4)$\beta=(2k+1)\cdot 180^\circ-\alpha\ (k\in\mathbf{Z})$.

综合应用题

综合考查数形结合、分类讨论思想的运用.

例5 写出顶点在原点、始边重合于 x 轴正半轴、终边落在阴影部分的角的集合.(不包括边界,如图 4-2 所示)

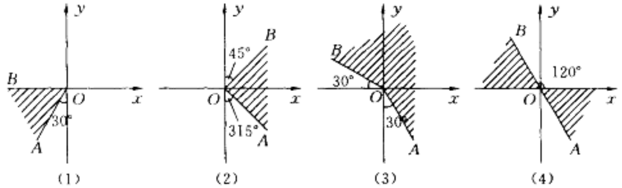


图 4-2

〔分析〕 对于阴影部分形成的角 AOB,先应选定 $OA(OB)$ 并写出其终边对应的一个角,再依照逆时针原则写出一周内终边 $OB(OA)$ 对应的角,最后用终边相同的角的写法表示符合条件的角的范围.

解:(1)选定 OB,在 $0°\sim360°$ 间,把图中以 OB 为终边的角看成 $180°$,则以 OA 为终边的角看成 $240°$,则有 $\{\alpha|180°+k\cdot360°<\alpha<240°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$.

(2)选定 OA,在 $360°\sim720°$ 间(若取 $0°\sim360°$,则无法表示出以 OB 为终边的角),把图中以 OA 为终边的角看成 $315°$,则以 OB 为终边的角看成 $405°$,则有 $\{\alpha|315°+k\cdot360°<\alpha<405°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$;

若选定 OB,在 $-180°\sim180°$ 间,把图中以 OB 为终边的角看成 $45°$,则以 OA 为终边的角看成 $-45°$,则有 $\{\alpha|-45°+k\cdot360°<\alpha<45°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$.

(3)选定 OA,在 $-180°\sim180°$ 间,把图中以 OA 为终边的角看成 $-60°$,则以 OB 为终边的角看成 $150°$,则有 $\{\alpha|-60°+k\cdot360°<\alpha<150°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$.

(4)把图中 x 轴下方一阴影部分看成是由 x 轴上方的阴影部分旋转 $180°$ 得到的,则有 $\{\alpha|120°+k\cdot180°<\alpha<180°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$.

小结 $\alpha+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$,可以看成每旋转 $360°$(一周)即重复出现,类似地,$\alpha+k\cdot180°$,$\alpha+k\cdot90°(k\in\mathbf{Z})$ 则分别表示每旋转 $180°$ 或 $90°$ 重复出现.

例6 终边与坐标轴重合的角 θ 的集合是 ( )

A. $\{\theta|\theta=2k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$　　B. $\{\theta|\theta=k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$

C. $\left\{\theta\middle|\theta=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$　　D. $\left\{\theta\middle|\theta=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$

〔分析〕 A,B,D 选项依次是终边在 x 轴的正半轴上、x 轴上、y 轴上的角的集合.对 $\theta=\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 分类讨论如下:当 k 是偶数时,设 $k=2m(m\in\mathbf{Z})$,则 $\theta=m\pi$;当 k

是奇数时，设 $k=2m+1(m\in\mathbf{Z})$，则 $\theta=m\pi+\frac{\pi}{2}$. 综上，C 项是 B 项与 D 项的并集.

答案：C

【注意】 记住本题的结论，这是终边落在 x 轴、y 轴上的角的表示方法.

例 7　已知 $A=\{\alpha|k\cdot360^\circ-60^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+135^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{\alpha|k\cdot180^\circ+45^\circ<\alpha<k\cdot180^\circ+90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，求集合 $A\cap B$.

〔分析〕　$k\cdot180^\circ+\theta$ 在 0° 到 360° 范围内表示两条终边，所以需将它细化，以便比较.

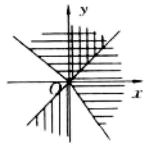


图 4－3

解：对于集合 B，

当 $k=2n$(偶数)时，

$n\cdot360^\circ+45^\circ<\alpha<n\cdot360^\circ+90^\circ$，

当 $k=2n+1$(奇数)时，

$n\cdot360^\circ+225^\circ<\alpha<n\cdot360^\circ+270^\circ$，

所以 $B=\{\alpha|n\cdot360^\circ+45^\circ<\alpha<n\cdot360^\circ+90^\circ,n\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|n\cdot360^\circ+225^\circ<\alpha<n\cdot360^\circ+270^\circ,n\in\mathbf{Z}\}$.

$\therefore A\cap B=\{\alpha|n\cdot360^\circ+45^\circ<\alpha<n\cdot360^\circ+90^\circ,n\in\mathbf{Z}\}$.

【注意】 也可利用图象，即图 4－3 中阴影区域的公共部分为所求的 $A\cap B$.

小结　对 $k\in\mathbf{Z}$ 分奇数、偶数进行分类讨论是判断角的终边是否有相同情况的常用方法.

探索与创新题

例 8　已知 $f(x)=15^\circ\cdot x+20^\circ$，$g(x)=6^\circ\cdot x+30^\circ$. 是否存在正整数 T，使得对于任意的 x 的值，都有 $f(x+T)$ 与 $f(x)$，$g(x+T)$ 与 $g(x)$ 均表示终边相同的角？若存在，求出 T 的最小值；若不存在，说明理由.

〔分析〕　先分别求出使方程 $f(x+T)$ 与 $f(x)$，$g(x+T)$ 与 $g(x)$ 的终边相同的最小正整数 T，则 $kT(k\in\mathbf{Z})$ 也能使它们的终边相同，因而只需求它们的最小公倍数即可.

解：$\because f(x+T)=15^\circ(x+T)+20^\circ=f(x)+15^\circ\cdot T$，

若 $f(x+T)$ 与 $f(x)$ 表示终边相同的角，则

$15^\circ\cdot T=k_1\cdot360^\circ(k_1\in\mathbf{N}^*)$，$\therefore T=24k_1(k_1\in\mathbf{N}^*)$.

同理，$T=60k_2(k_2\in\mathbf{N}^*)$，

$\therefore T$ 是 24 与 60 的公倍数，

故存在这样的正整数 T.

又 $\because$ 24 和 60 的最小公倍数为 120，

$\therefore$ 满足条件的 T 的最小值为 120.

小结　(1)终边相同的角的“周期现象”实质是“同余现象”，即终边相同的角的度数除以 360° 的余数相同. 在日常生活中有不少这样的周期现象，如星期几的问题；

(2)终边相同的角只具有“周期现象”，而不具有“周期性”.

例9 如图4-4所示，半径为1的圆的圆心位于坐标原点，点P从点$A(1,0)$出发，依逆时针方向等速沿单位圆旋转. 已知P在1 s内转过的角度为$\theta(0°<\theta<180°)$，经过2 s到达第三象限，经过14 s后又恰好回到出发点A. 求θ.

〔分析〕 点P经过14 s回到A点的数学语言为14θ角的终边与x轴的非负半轴重合. 根据题中θ角的范围，可以找到角θ.

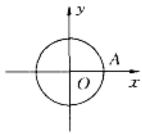


图4-4

解：$\because 0°<\theta<180°$，

且$k\cdot 360°+180°<2\theta<k\cdot 360°+270°(k\in \mathbf{Z})$，

必有$k=0$，则$90°<\theta<135°$.

又$\because 14\theta=n\cdot 360°(n\in \mathbf{Z})$，

$\therefore \theta=\dfrac{n\cdot 180°}{7}$.

从而$90°<\dfrac{n\cdot 180°}{7}<135°$，

即$\dfrac{7}{2}<n<\dfrac{21}{4}$，

$\therefore n=4$或$n=5$，故$\theta=\dfrac{720°}{7}$或$\theta=\dfrac{900°}{7}$.

小结 (1)把实际问题转化为数学问题的关键是把文字语言翻译为数学语言；(2)“回到出发点A”$\Leftrightarrow$“14θ角的终边与0°角的终边相同”. 再利用终边相同的角之间的关系列方程，使问题顺利解决. 这里也体现了方程思想的运用，有利于问题的解决.

易错与疑难题

例10 下列命题是真命题的是 ( )

A. 三角形的内角必是第一、二象限的角

B. 第一象限的角必是锐角

C. 不相等的角终边一定不相同

D. $\{\alpha|\alpha=k\cdot 360°\pm 90°,k\in \mathbf{Z}\}=\{\beta|\beta=k\cdot 180°+90°,k\in \mathbf{Z}\}$.

错解1：由于三角形内角的取值范围为$(0°,180°)$，故选A.

错解2：由于第一象限的角与锐角的取值范围相同，故选B.

〔分析〕 以上两种错解是区分不清象限角、终边在坐标轴上的角、区间角等几种不同的角.

正解：90°的角可以是三角形内角，但它不是第一、二象限的角，排除A；

390°的角是第一象限的角，但它不是锐角，排除B；

390°的角与30°的角不相等，但它们的终边相同，排除C；

D中的两个集合都是终边落在y轴上的角的集合，它们相等.

故正确答案为D.