成人高等教育理工科试用教材

高等数学

上册

于慎根 主编

南开大学出版社

高　等　数　学

主　　编　于慎根
责任编辑　王家骅

南开大学出版社出版
（天津八里台南开大学校内）
河北工学院印刷厂印刷
（天津丁字沽河北工学院院内）

1987年9月第1版　　1987年9月第1次印刷
开本：850×1168 1/32　　印张：13
字数：318千　　印数：1—10,000
ISBN7—310—00028—5/O·6
统一书号：13301·47　　定价：2.35元

内 容 提 要

本书分上下两册出版．上册包括函数、极限理论、连续函数、导数与微分、中值定理导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、向量代数与空间解析几何共十章．

本书可作为成人高等学校（夜大学、函授大学、职业大学、电视大学等）理工科的教学教材，也可作为普通高等工科院校的教学教材．

前　　言

本书是在河北省教育委员会的领导下，责成河北工学院成人教育处负责组织、为适应成人高等教育理工科《高等数学》课程的教学需要而编写的。

本书主要供函授大学、夜大学、职业大学、电视大学等类成人高等学校本、专科使用，同时可供普通高等工科院校本、专科使用。

全书由杨从仁、郝寿主审。

全书分上、下两册出版，上册由于慎根主编，参加上册编写工作的还有李万选、王玲英、耿景昕和商宏麒。

书中内容的叙述和论证，都力求严谨、简明和易懂。但由于编者水平不高，时间短促，因此书中存在缺点错误一定很多，希望同志们批评指正。

编　者　1987年5月

目　录

第一章　函　数

高等数学的主体是数学分析，它的主要内容是用极限方法研究以下三个问题：

1. 函数的局部性质（微分学部分）；
2. 函数的整体性质（积分学部分）；
3. 函数的展开问题（无穷级数部分）。

这里所说的函数，是指定义在实数集上并且在实数集上取值的函数（今后如无特殊说明，所说的数，都指的是实数）。本章先对这种函数作一些必要介绍。

§1-1　实数集

全体实数和数轴上的点，可建立一一对应关系，即每一个实数对应数轴上唯一的一点，反之，数轴上每一个点，对应唯一的一个实数。这样以后我们就不再区分实数和数轴上的点了。

用数轴上的点代表实数的可能性的根据是下边所给出的所谓实数连续性公理。

公理　任何非空的上方有界数集，都存在有最小上界。

这里所说的数集，是指由一些实数所组成的集合，非空是说这个集合中确实有实数；所谓上方有界，是说存在一个常数M，使所述数集中的每一个数，都不大于M；从几何上看，这就是所述集合中的数都分布在M的左边（在相反的情况下，则说这个数集不是上方有界的）。这样的M就叫做数集的上界。所谓存在最小上界，就是说，有那样一个实数μ存在，它本身是所说数集

的上界；但任何比μ再小的数，就不再是数集的上界了。μ叫数集E的上确界常用

$$\mu = \sup E$$

表示，于是 $\mu = \sup E$相当于

（1）对E中每一个数x，都有$x \leqslant \mu$。

（2）对任意小的正数ε，都有属于E的点x_0，使$x_0 > \mu - \varepsilon$

这个公理在理论上有很重要的意义，许多重要事实的成立，都是由它来保证的。

对于数集E，如果有常数m，使对E中每个x，都有$m \leqslant x$，便称数集E是下方有界的（否则称这个数集E不是下方有界的）。对于下方有界的数集E，又有最大下界的概念。数集E的最大下界，叫做数集E的下确界，常记为$\inf E$。$v = \inf E$相当于

（1）对E中每个x，都有$x \geqslant \nu$；

（2）对任意的正数ε，都有属于E的点x_0，使$x_0 < \nu + \varepsilon$。

用上述的公理，可得到如下的定理。

定理 任何非空的下方有界数集，都有最大下界。

假如已知的数集，既是上方有界的，又是下方有界的，则说这个数集是有界的。

§1-2 绝对值

定义 对于实数x的绝对值，规定为

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{当} x \geqslant 0 \text{时}; \\ -x, & \text{当} x < 0 \text{时}. \end{cases}$$

x的绝对值$|x|$，在数轴上表示原点与点x之间的距隔。利用绝对值的概念，可得出数轴上任意两点间距隔的表达式。事实上$|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$就表示点$x_1$与点$x_2$之间的距离。

绝对值有下列一些论断：

（1） $-|x|\leqslant|x|\leqslant|x|$.

当$x>0$时，右边是等号，左边是不等号。当$x<0$时，左边是等号，右边是不等号。当$x=0$时，右边、左边都是等号。

（2） $|x|<\varepsilon\Longleftrightarrow-\varepsilon<|x|<\varepsilon$，（$\varepsilon>0$）.

证 如果$|x|<\varepsilon$（$\varepsilon>0$），当$x\geqslant0$时，$x=|x|<\varepsilon$，同时，已知$\varepsilon>0$，则有$x>-\varepsilon$，即$x\geqslant0$时，$x<\varepsilon$，$x>-\varepsilon$同时成立。同理，$x<0$时，$x>-\varepsilon$，$x<\varepsilon$也同时成立。所以$-\varepsilon<x<\varepsilon$。反之，由$-\varepsilon<x<\varepsilon$表示$x<\varepsilon$与$-x<\varepsilon$同时成立，而$x$与$-x$中必有一个为$|x|$，所以$|x|<\varepsilon$。

（3） $|x|>N\Longleftrightarrow x>N$或$x<-N$，（$N>0$）。

（4） $|x|=\sqrt{x^2}$。

以上两个论断，读者可自行证明。

绝对值还具有一些运算规则：

（1） $|x|\geqslant\pm x$，$|x|=|-x|$。

（2） $|x\cdot y|=|x||y|$。

（3） $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$，　（$y\neq0$）.

（4） $|x+y|\leqslant|x|+|y|$。

其中（1）、（2）、（3）是中学代数中已经学过的，（4）通常称为三角不等式，这是一个很重要的不等式，这里给出它的证明：

若$x+y\geqslant0$，则，$|x+y|=x+y$，但$|x|\geqslant x$，$|y|\geqslant y$，所以$|x+y|\leqslant|x|+|y|$，

即
$$|x+y|\leqslant|x|+|y|.$$

若$x+y<0$则$|x+y|=-(x+y)$，

但$|x|\geqslant-x$，$|y|\geqslant-y$，所以$-(x+y)\leqslant|x|+|y|$，

即
$$|x+y\leqslant|x|+|y|.$$

综合以上两种情况，知$|x+y|\leqslant|x|+|y|$。

由三角不等式立即可导出下述常用的另一个不等式。

$$|x-y|\geqslant|x|-|y|.$$

这只须在三角不等式中，将x换为$x-y$即得

$$|x-y+y|\leqslant|x-y|+|y|,$$

移项得

$$|x-y|\geqslant|x|-|y|.$$

§1-3 区 间

在数集中，经常用到的是各式各样的区间。

设a、b是两个实数，且$a<b$，满足不等式$a<x<b$的一切实数x的全体，叫做开区间，记为(a, b)。数a与b不属于开区间，在几何图形上，开区间(a, b)为介于数轴上a与b两点间线段上的全体，它不包括点a与点b（图1-1）。

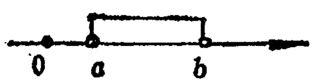

图 1－1

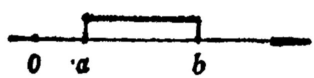

图1－3

满足不等式$a\leqslant x\leqslant b$的一切实数x的全体叫做闭区间，记为$[a, b]$·数a与数b属于闭区间．在几何图形上，闭区间$[a, b]$是介于数轴上a与b两点间线段上点的全体，a、b两点也在其中（图1-2）。

满足不等式$a\leqslant x<b$或$a<x\leqslant b$的一切实数x的全体叫做半开区间，分别记为$[a, b)$或$(a, b]$。在几何图形上半开区间分别表示介于a与b两点之间线段上点的全体，前者，点a在其中，点b不在其中（图1-3）；后者点a不在其中，点b在其中（图1-4）。

在以上各种情形中，a与b叫做区间的端点，而$b-a$叫做区

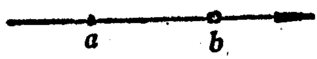

图 1－3

图 1－4

间的长度。

除了上述那些有限区间外，还有一类区间叫做无限区间，我们规定：

实数的全体，用符号（$-\infty$，$+\infty$）表示。

满足不等式$x<a$的实数的全体用符号（$-\infty$，a）表示。

满足不等式$b\leqslant x$的实数的全体用符号〔b，$+\infty$〕表示

类似地可以对满足不等式$x\leqslant a$或$b<x$的实数的全体，分别用符号（$-\infty$，a〕或（b，$+\infty$）表示。

满足绝对值不等式

$$|x-x_0|<\delta,\quad (\delta>0)$$

的一切实数x的全体，叫做x_0的δ邻域，x_0称为邻域的中心，δ称为邻域的半径。在数轴上，邻域是一个以x_0为中心，长度为2δ的开区间（$x_0-\delta$，$x_0+\delta$），有时也记作O（x_0，δ）。

§1-4　点集的聚点

设E是一个点集（数轴上一些点所作成的集合），x_0是一个定点（x_0可属于E，也可以不属于E），若对任意的$\delta>0$，$O(x_0$，$\delta)$内都含有无穷多个属于E的点，则称x_0为E的聚点。

例1　E由$1/n$（$n=1$，2，$\cdots$）这些点组成，则E只有一个聚点$x=0$。事实上任取$\delta>0$，当$n>1/\delta$时，有$0<1/n<\delta$，即O（0，δ）内含有E的无穷多个点。

例2　E是区间（a，b）上的全部点组成的集合，则每个属于

E的点都是E的聚点。a点虽不属于E，但它也是E的聚点。

只有有限多个点组成的点集E，显然是没有聚点的，即使E是由无限多个点组成的点集，它也不一定有聚点，例如由1,2,3,…，n…这些点组成的无穷集合，就没有聚点。但是对于有界的无穷集合，由§1-1的公理，便可得到如下的所谓聚点原理。

聚点原理　若E是一个有界的无穷点集，则E至少有一个聚点。

§1-5　函　数

在同一个过程中，往往同时有几个变量，并且它们之间不是孤立的，而是相互联系的，遵循着一定的规则变化，这种相互之间的关系就是函数关系。下面先看一些实例，而后再给出函数的精确定义。

例1　在初速为零的自由落体运动中，下落的路程s与下落的时间t是两个变量，它们之间存在着下列的关系。

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中g是重力加速度，它是一个常量，假定经过时间T物体着地，那么当t取〔0，T〕上某一值时，由上式便可确定s的值。

例2　半径为1的圆内接一个正n边形，边数n与面积A之间有如下关系：

$$A=\frac{1}{2}n\sin\frac{2\pi}{n},$$

当边数n取定时（n只能取3，4，5，…等自然数），由上式就可确定出A的值。

上面所考查的两个例子，虽然它们的实际意义不同，但从纯数量关系的角度看，却有着共同的属性，这就是：两个变量之间

都存在着一个规则，即当一个变量在一定范围内取定一值后，由这个规则，另一个变量就能确定出其对应的值，两个变量之间的这种关系，就是函数概念的实质。

定义 设有两个变量 x 与 y，当变量 x 在某一数集 D 中任意取定一个值时，依某一规律 f，总有唯一确定的值 y 与之对应，我们就说 y 是 x 的函数。x 叫做自变量，数集 D 叫做函数的定义域。y 是 x 的函数，一般记为

$$y=f(x),\quad x\in D。$$

符号 f 是指变量 x 与变量 y 的一种对应规律。这种规律，完全由具体问题所确定，不能一概而论，如在上述的例 1 中，距离 S 是时间 t 的函数，可表为 $S=f(t)$。在这个具体问题中，符号 f 表示一种确定的对应规律，即 t 平方，再乘以 g 的一半，就得到 S 的对应值。

f 既然是表示一种对应规律的符号，自然也可以用其它的字母来表示，如 φ、ψ、f_1、f_2，…等等。有时也用 $y=y(x)$，$v=v(x)$ 等等来表示 y 是 x 的函数。

对于自变量 x 的某一固定值 $x_0\in D$，函数 $f(x)$ 的对应值 y_0，叫做函数当 $x=x_0$ 时的函数值。记作 $y_0=f(x_0)$，例如，对于函数

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2-1},$$

有

$$f(-1)=\sqrt[3]{(-1)^2-1}=0;$$
$$f(0)=\sqrt[3]{0^2-1}=-1;$$
$$f(1)=\sqrt[3]{1^2-1}=0;$$
$$f(x+h)=\sqrt[3]{(x+h)^2-1}。$$

函数定义中，不排除把 x 在 D 中的不同值对应到同一的 y 值，因此常量 c 可看成对 x 在 D 中的任意值，都对应到同一个值的特殊的函数。

确定一个函数的根本要素是函数的定义域和对应规律，而不在于表示自变量和函数时所采用的字母，两个函数如果定义域和对应规律相同，那么它们就是同一个函数。例如$S=\frac{1}{2}gt^2$，$t\in[0,1]$与$y=\frac{1}{2}gx^2$，$x\in[0,1]$所表示的函数是相同的。

以全体自然数集合N为定义域的函数，称为整变量函数，常记为

$$y=f(n),\ n\in N.$$

为了方便，对于这种函数，有时也把自变量n记为附标的形式，如记作x_n，y_n等等。

例如，$x_n=1/2^n$，$y_n=1/n$，$z_n=(-1)^n$等都是整变量的函数。

有时我们把整变量函数按序号排列起来，对应写成序列形式。

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots.$$

这个序列，也常记作$\{x_n\}$。例如对于前面谈到的三个整变量函数，可以分别写成。

$$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}:\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots.$$

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}:\ 1,\ \frac{1}{2},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots.$$

$$\{(-1)^n\}:\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots(-1)^n,\ \cdots.$$

§1-6 函数关系的表示法

函数的对应规律，也叫做函数关系，我们经常遇到的函数关

系，大都可以用公式、图像或表格表出，这就是已知的公式表示法、图形表示法和列表表示法。因为这三种表示法在中学数学教材中已有详细叙述，在此不再重复，只是需要指出以下几点：

用公式法表示函数关系时，为便于作理论分析，常把使公式有意义的一切自变量的值，作为函数的定义域。例如 $y=\sqrt{x}+1/\sqrt{1-x}$。对这函数的第一项 $\sqrt{x}$，$x\geqslant 0$ 才有意义，而对第二项 $1/\sqrt{1-x}$，则要求 $1-x>0$，即 $-\infty<x<1$，因此当 $x\geqslant 0$ 且 $-\infty<x<1$ 时，公式才有意义，故需解不等式组

$$\begin{cases} x\geqslant 0, \\ -\infty<x<1. \end{cases}$$

解之得 $0\leqslant x<1$，故函数的定义域为 $[0,1)$。

用公式表示函数时，有时定义域的不同部分用不同的公式给出，这种函数叫做分段表示的函数，例如绝对值函数（图1—5）。

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0; \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

这是定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的一个函数，就这个例子说，已知函数 y 在区间 $(-\infty,0)$ 内，由 $y=-x$ 来表示；在区间 $[0,+\infty)$ 内，由 $y=x$ 来表示。显然，$f(5)=5$，$f(-2)=-(-2)=2$。

又如狄里克雷（Dirichlet）函数 $y=D(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是由下述对应规律定义的：

$$D(x)=\begin{cases} 1, & \text{若 } x \text{ 为有理数；} \\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数。} \end{cases}$$

显然，$D(0)=D(1)=D\left(-\dfrac{1}{2}\right)=D(0.1)=1$，$D(\sqrt{2})=D(\pi)=0$。

再如 $y=\operatorname{sgn} x$（符号函数）在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是由下述对应规律定义的（图1-6）：

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & 若x>0;\\ 0, & 若x=0;\\ -1, & 若x<0。\end{cases}$$

这些用两个或几个式子表示的函数，都是分段表示的函数，虽然分段表示，但表示的是一个函数。

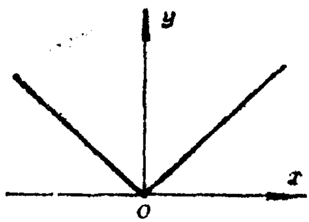

图 1－5

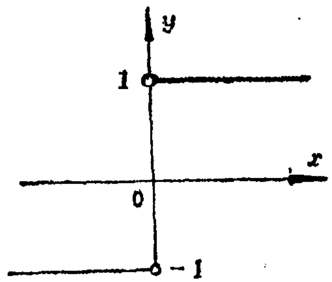

图 1－6

§1-7　函数的几种性质

§1-7-1　函数的有界性

设函数$y=f(x)$在某数集I有定义（I可以是函数$f(x)$的整个定义域，也可以是定义域的一部分）。若存在一正数M，使得对一切的$x\in I$，都有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称$f(x)$在I内是有界的。若这样的M不存在，则称$f(x)$在I内是无界的。

几何解释。若$f(x)$有界，则存在正数M使之满足

$$|f(x)|\leqslant M\Longleftrightarrow -M\leqslant f(x)\leqslant M$$

即$f(x)$的图形在$y=-M$与$y=M$的一个带形区域内（图1-7）。

例1　因在$(-\infty,+\infty)$内，有$|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$。