方程和方程组

主编：杨大淳

北京广播学院出版社

方程和方程组

主　编：杨大淳

副主编：袁智园、杜其湘

编　者：杨家林、耿俊杰

李文英、周秀敏

石景林

北京广播学院出版社

1989年2月

方程和方程组

杨大淳、袁智国、杜其湘

北京广播学院出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京广播学院印刷厂印刷

ISBN 7-81004-112-6/G02

787×1092毫米1/32 5.9印张 132千字

1989年2月第1版1989年2月第1次印刷

印数4000册　　定价1.50元

前　　言

数学是中学阶段重要的基础学科，在科学技术日益更新，教学改革不断发展的新时期，数学教学起着特殊的作用。它是基础的基础，是培养学生思维能力创造能力的有效课程。

教师如何教好这门课，学生如何学好这门课，是师生共同关心的问题。我们几位教师根据自己多年的实践体会，参照了中学数学教学中的可取的经验，以教学大纲为指针，与教材内容相适应，编写了这套丛书。近年来，数学练习题，可谓多矣，各种测试题也是名目繁多，不可胜数。但教改的宗旨是减轻负担，提高质量。教学不能以多取胜，练习切忌陈陈相因，繁琐重复的练习，使人不得要领，岂能提高学习效益？学生的学习如能拨云见日，以少胜多，在山重水复之中，寻求到柳暗花明的新境界，这就必然要找到一条可行之路。这条路，应当是既符合教材知识的逻辑联系，又掌握学生思维发展的客观规律，使学生由浅入深由近知远，逐步悟见其知，学生在掌握规律，运用规律的同时，还可不断提出创造性的见解，以新颖，科学，简洁的思考和解题发展兴趣，提高能力。

自学是中学生学习的重要手段，是为今后获取知识必备的能力，这套丛书，在培养学生自学能力，开启他们的数学灵感，做出一些尝试，同时也有利于学生在学习中建立自己的知识系统和结构。对于在校学生或知识青年的自学，对于青年教师的教学，应有一定的参考价值。

为编写这套丛书，我们特邀中学数学界有影响的老教师杨大淳先生为主编，对于初中数学教材中的难点、重点，内在联系，以及精选的习题，点拨的要点，作了多方面讨究，但我们限于教学水平，理论修养，实践经验之不足，疏漏之处在所难免，敬希同仁不吝指正。

参加编写的有袁智国，杜其湘，李文英，耿俊杰，杨家林，周秀敏，石景林。

编　者

目　录

第一章　一元一次方程……………………………………………1
§1.1　方程 ……………………………………………………1
§1.2　同解方程 ………………………………………………5
§1.3　一元一次方程和它的解法 ……………………………8
§1.4　列方程解应用题 ……………………………………15
§1.5　可以化成一元一次方程的分式方程 ………………25

第二章　一次方程组……………………………………………37
§2.1　二元一次方程 ………………………………………37
§2.2　二元一次方程组 ……………………………………40
§2.3　二元一次方程组的解法 ……………………………42
§2.4　二元一次方程组解的讨论 …………………………51
§2.5　三元一次方程组和它的解法 ………………………55
§2.6　分式方程组 …………………………………………61
§2.7　列方程组解应用题 …………………………………65

第三章　一元二次方程…………………………………………75
§3.1　一元二次方程的概念 ………………………………75
§3.2　一元二次方程的解法 ………………………………77
§3.3　一元二次方程根的判别式 …………………………102
§3.4　一元二次方程的根与系数的关系 …………………108

§3.5 二元三项式的因式分解 ……………………119
§3.6 可以化成一元二次方程来解的特殊的高次方程 ……………………121
§3.7 可以化成一元二次方程的分式方程 ……………………126
§3.8 无理方程 ……………………133
§3.9 列一元二次方程解应用题 ……………………140

第四章 二元二次方程 ……………………148

§4.1 二元二次方程和二元二次方程组 ……………………148
§4.2 由一个二元一次程和一个二元二次方程组成的方程组的解法 ……………………149
§4.3 由两个二元方程所组成的方程组的解法 ……153

第一章　一元一次方程

§1.1　方程

我们知道用等号连结两个代数式所成的式子，叫做等式。例如

$2-(-7)=2+7$，　　$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，

$x+2=5$

等都是等式。

等式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 中，不论 a 和 b 取任何数值，等式的左边和右边的值总是相等的，这样的等式我们叫做恒等式。又例如等式 $a+b=b+a$，$3x^2+2x^2=5x^2$ 也都是恒等式。又如

$$\frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)}=x+3$$

也是恒等式。但是 x 的取值不能使分母等于零，所以 x 的取值不允许等于3（$x=3$ 时分式没有意义），也就是说，除 $x=3$ 时分式没有意义，不论 x 等于其它任何数值等式的左边总是等于右边。

一般地，一个等式，不论用任何允许取的数值代替其中的字母，它的左右两边的值总是相等的，这样的等式叫做恒等式。

由数字组成的等式也叫做恒等式。例如

$7-(-2)=7+2$，　　$3^2=9$，　　$(7+3)\div 2-5\times\frac{1}{5}=4$

都是恒等式。

等式$x+2=5$中的字母x并不是取任何数值都能使左右两边的值相等，所以$x+2=5$不是恒等式，同样$x^2=9$也不是恒等式。

在等式$x+2=5$里，2和5叫做已知数，而字母x的值需要根据它和2和5的关系来确定，这样的字母叫做未知数。

含有未知数的等式，叫做关于这个未数的方程，简称方程。

例如 $x+2=5$就是方程，又如$x^2=9$，$\frac{y}{2}=5$，$x^2+x-3=0$，$x+y=z$等都是方程。

能使方程左右两边的值相等的未知数的值叫做方程的解。

例如，在方程$x+2=5$里，当未知数x是3时，方程两边的值相等，因此$x=3$是方程$x+2=5$的解，同样$x=3$和$x=-3$是方程$x^2=9$的解。

只含有一个未知数的方程的解，也叫做方程的根，例如方程$x+2=5$的解是3，也可以说方程$x+2=5$的根是3，同样也可以说方程$x^2=9$的根是3和-3。

求方程的解或根的过程，叫做解方程。

[例题1] 判别下列等式是不是恒等式：

(1) $(x-6)^2=x^2-12x+36$； (2) $2x+3x=5x$；

(3) $2x+1=3x-2$。

[解] (1)因为不论x取任何数值，等式左右两边的值总是相等，所以$(x-6)^2=x^2-12x+36$是恒等式。

(2)因为不论x取任何数值，等式左右两边的值总是相等，所以 $2x+3x=5x$的恒等式。

(3)因为x不是取任何数值都能使等式左右两边相等，例如 $x=1$时，左边$=3$，右边$=1$，两边的值就不相等，所以$2x+1=3x-2$不是恒等式。

[**例题2**] 根据下列条件列出方程：

(1) x的12倍与3的和等于36；

(2) x与3的差的6倍等于12；

(3) 某数的14倍比这个数的5倍大于5；

(4)某数与3的和平方等于这个数的10倍与6的和。

[**解**] (1) $12x+3=36$。 (2) $16(x-3)=12$。

(3) 设某数为x,那么,“x的14倍比x的5倍大于5”就可以表示成方程

$$14x-5x=5.$$

(4) 设某数为x，那么“x与3和的平方等于x的10倍与6的和”，就可以表示成方程 $(x+3)^2=10x+6$。

[**例题3**]检验下列各数是不是方程 $2(x-4)=3x-10$的解：

(1) $x=-1$； (2) $x=0$； (3) $x=2$。

[**解**] (1) 把$x=-1$代入方程

左边$=2(-1-4)=-10$，右边$=3\cdot(-1)-10=-13$，

因为 左边$\neq$右边，

所以 $x=-1$不是方程$2(x-4)=3x-10$的解。

(2) 把$x=0$ 代入方程

左边$=2(0-4)=-8$,右边$=3\cdot 0-10=-10$

因为 左边$\neq$右边，

所以 $x=0$不是方程 $2(x-4)=3x-10$的解。

(3) 把$x=2$代入方程

左边$=2(2-4)=-4$，右边$=3\cdot2-10=-4$，

所以$x=2$是方程$2(x-4)=3x-10$的解。

[注意].检验时左右边两边要分别计算，不能写成下面的形式：

$$2(2-4)=3\cdot2-10. \qquad -4=-4.$$

练习1.1

1 下列等式中，哪些是恒等式？哪些是不恒等式？

(1) $3x-5=7$；　(2) $(x+3)(x-2)=x^2+x-6$；

(3) $1+7=8$；　(4) $(x+2)(x-2)=x^2-4$；

(5) $x^2=3x$；　(6) $(x+3)(x-2)=0$；

(6) $4-3x=-(3x-4)$；(8)$5x=0$。

2 用方程式表示下列数量关系：

(1) 某数的$\frac{1}{4}$加上5等于7；

(2) 某数的5倍比这个数的3倍大2；

(3) 某数的3倍比这个数的5倍小于2；

(4) 某数与2的差的5倍等于15的75%。

3 下列各方程后面括号内的数，指出哪一个数是这个方程的根：

(1) $3x+6=0$ $(2,-2,0)$；　(2) $5-2x=-1$ $(3,4)$；

(3) $x^2-2x=0$ $(1,2,0)$　(4) $x^2-9=0$；$(9,+3,-3)$；

(5) $x^2-7x+6=0(1,2,6)$；(6)$6x+16=\frac{x}{2}-28$ $(8,-8)$。

§ 1.2　同解方程

我们先理解同解方程的意义，看下面的两个方程

$$2x-3=7 \qquad (1)$$

$$2x=10 \qquad (2)$$

如果用$x=5$代入方程(1)，方程两边的值都是7，所以5的方程(1)的根，如果用5以外的任何数代入方程(1)，方程两边的值都不相等，因此方程(1)，只有一个根5.

用同样的方法，我们可以知道方程(2)也只有一个根5，就是说，方程(1)和方(2)的解相同，我们说方程(1)和方程(2)是相同解方程.

一般地，两个方程，如果第一个方程的解都是第二个方程的解，并且第二个方程的解也都是第一个方程的解，并且解的个数相同，那么这两个方程叫做同解方程.简单叙述为：如果两个方程的解相同，那么这两个方程叫做同解方程.

[**例题**] 判别下列各组方程是否同解方程

(1)　方程$x^2+x-2=0$的全部根是1和-2，

方程$(x+2)(x-1)=0$的全部根是-2和1.

(2)　方程$(x+2)(2x-1)=0$的全部根是$\frac{1}{2}$，-2

方程$x+2=0$的全部根是-2.

[**解**] (1)因为方程$x^2+x-2=0$的全部根都是方程$(x+2)(x-1)=0$的根，并且方程$(x+2)(x-1)=0$的全部根都是$x^2+x-2=0$的根，所以这两个方程是同解方程.

(2) 因为方程 $x+2=0$ 的全部根都是方程 $(x+2)(2x-$

1) = 0的根，但是方程$(x+2)(2x-1)=0$的其中一个根$\frac{1}{2}$，不是$x+2=0$的根，所以这两个方程不是同解方程。

解方程时，需要把一个方程变形为一个简单方程，那么原来的方程和变形后的方程是不是同解方程，从上面我们可以看出判别这两个方程是否同解是很繁琐，为了解决这个问题，下面我们研究方程的同解变形原理：

1. 方程的两边都加上（或都减去）同一个数或同一个整式，所得方程与原方程是同解方程.

例如 方程$2x-5=7$

(1) 两边都加上5，得

$$2x-5+5=7+5 \qquad (2)$$

就是 $$2x=7+5 \qquad (3)$$

根据方程同解原理1，方程(1)和方程(2)就是同解方程.

由方程(1)和(3)可以看出，是把方程(1)的左边的常数项-5，把它的符号改变后，从方程的左边移到方程右边.

方程中的任何一项，都可以把它的符号改变后，从方程的一边移到另一边．这叫做移项，移项后所得的方程与原方程是同解方程.

2. 方程的两边都乘以（或都除以）不等于零的同一个数，所得的方程与原方程是同解方程.

例如方程 $$\frac{3}{2}x+1=5, \qquad (1)$$

方程两边同乘以2，得 $3x+2=10$. (2)

根据方程同解原理2，方程(1)和(2)是同解方程.

练习 1.2

1.

(1) 第一个方程的根是 3 和$\frac{1}{5}$，第二个方程根是$\frac{1}{5}$和 3 这两个方程是不是同解方程？为什么？

(2) 第一个方程的两个根是 3 和$\frac{1}{5}$，第二个方程的两个根是 -3 和$\frac{1}{5}$，这两个方程是不是同解方程？为什么？

(3) 第一个方程的两个根是 3 和$\frac{1}{5}$，第二个方程的根是 3，这两方程是不是同解方程？为什么？

2. 用移项的方法，把含有未知数的项移到方程左边，常数项移到方程右边，并把两边合并同类项：

(1) $6x-2=5x$；　　(2) $3-2y=4-3y$；

(3) $7y+5=6y-7$；　　(4) $\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}=\frac{7}{10}-\frac{2}{3}x$.

3. 根据方程原理 2，使方程左边未知数x的系数是 $+1$，右边是数字表示的数：

(1) $2x=3$；　　(2) $\frac{1}{2}x=3$；

(3) $-3x=6$；　　(4) $-\frac{2}{3}x=1.5$；

(5) $0.75x=-\frac{3}{5}$；　　(6) $\sqrt{2}x=\sqrt{6}$；

(7) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})x=-1$；　　(8) $-0.5x=0$.

§1.3 一元一次方程和它的解法

对于未知数来说，方程两边的代数式都是整式的方程，叫做整式方程．

只含有一个未知数，并且未知数的次数只有一次的整式方程叫做一元一次方程，例如方程

$$3x-5=7,\qquad 6x-1=4x+5,$$

$$3-\frac{5-2y}{5}=4-\frac{4-7y}{10}+\frac{y+2}{2},$$

$$7(2x-1)-3(4x-1)=5(3x+2)+1$$

等都是一元一次方程，而方程$2x+3y=5$，$x^2-5x+6=0$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}=\frac{2}{9}$，都不是一元一次方程．

解方程的方法，就是根据方程的两个同解原理，把原方程逐步变形成比较简单的方程，直到最后得出象$x=a$这样最简单的方程，解比较简单的一元一次方程时，常常利用移项的方法，把含有未知数的项移到方程的左边，不含带知数的项移到方程右边．

下面我们研究一元一次方程的解法．

[**例题1**]解下列方程

(1) $9x-4=2x+24$；

(2) $4(2x+3)=8(1-x)-5(x-2)$；

(3) $3-\frac{5-2y}{5}=4-\frac{4-7y}{10}+\frac{y+2}{2}$．

[**解**] (1)移项，得 $9x-2x=24+4$,

合并同类项，得 $7x=28$,

两边都除以7，得 $x=4$.

检验 把$x=4$代入原方程

左边$=9\times4-4=32$,

右边$=2\times4+24=32$,

所以 $x=4$是原方程的解.

(2) 去括号，得 $8x+12=8-8x-5x+10$,

移项，得 $8x+8x+5x=8+10-12$,

合并同类项，得 $21x=6$,

两边都除以21，得 $x=\dfrac{2}{7}$.

检验略(由读者自己完成，以下各例都从略).

(3)去分母(两边都乘以10)，得

$$30-2(5-2y)=40-(4-7y)+5(y+2),$$

去括号，得 $30-10+4y=40-4+7y+5y+10$,

移项，得 $4y-7y-5y=40-4+10-30+10$,

合并同类项，得 $-8y=26$,

两边都除以-8 $y=-\dfrac{13}{4}=-3\dfrac{1}{4}$.

[注意]如果方程里有分数系数，要先去分母，去分母时方程两边乘以分母的最小公倍数，实际变形时是用这个最小公倍数乘以方程两边的每一项.

去分母和去括号时还要注意各项系数的符号.

从上面几个例子，我们可以概括出解一元一次方程的一般步骤是：

(1)如果方程里有分数系数，先去分母；

(2)如果方程里有括号，先去括号；

(3)移项；

(4)合并同类项，化成最简单方程$ax=b$的形式；

(5)如果$a\neq 0$方程两边都除以未知数的系数，得出方程的解 $x=\frac{b}{a}$.

在解方程时由于方程的形式不同，上面所说的步骤不一定都用到，也不一定严格按着上面的顺序进行演算，如例题1的方程(3)，去分母再去括号后得

$$30-10+4y=40-4+7y+5y+10,$$

可先将方程两边合并同类项，得 $20+4y=46+12y$,

然后再移项，得 $4y-12y=46-20$,

再合并同类项，得 $-8y=26$,

方程两边除以-8，得 $y=-\frac{13}{4}=-3\frac{1}{4}$.

[例题2]解下列方程

(1) $\frac{(3x+4)(4x+7)}{2}-1=\frac{(3x+13)(6x+3)}{3}$;

(2) $\frac{1}{5}(20x-3)-\frac{1}{10}(10x-7)=\frac{1}{3}(9x+1)-\frac{7}{30}$;

(3) $x-\frac{1}{4}(1-\frac{3x}{2})-\frac{1}{3}(2-\frac{x}{4})-\frac{35x}{24}=2$.

[解] (1) 原方程变形为

$$\frac{(3x+4)(4x+7)}{2}-1=(3x+13)(2x+1),$$

去分母，得

$$(3x+4)(4x+7)-2=2(3x+13)(2x+1),$$