普通高等教育“十五”国家级规划教材

实变函数论与泛函分析（第二版）

（上册）

曹广福　编

Lusin

Fubini

Egoroff

Riemann

Bernstein

Lebesgue

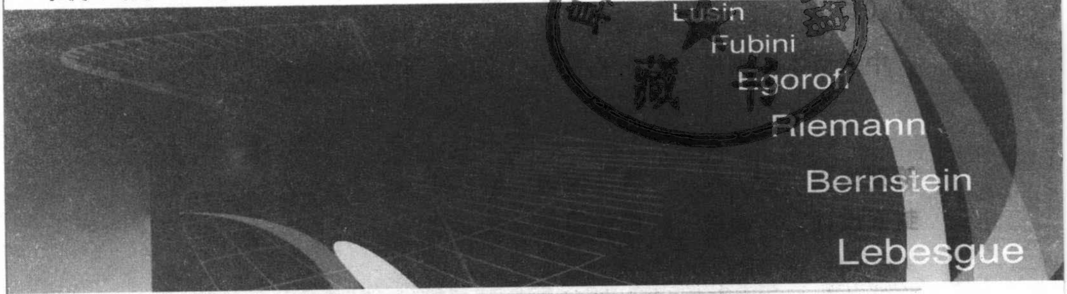
高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育"十五"国家级规划教材

实变函数论与泛函分析（第二版）

（上册）

曹广福 编



阜阳师范学院图书馆
藏书

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图书在版编目（CIP）数据

实变函数论与泛函分析．上册/曹广福编．2 版．—北京：高等教育出版社，2004.5
ISBN 7-04-014367-4

Ⅰ．实…　Ⅱ．①曹…②严…　Ⅲ．①实变函数论－高等学校－教材②泛函分析－高等学校－教材
Ⅳ．017

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 029505 号

策划编辑　徐　可　　**责任编辑**　徐　可
封面设计　王凌波　　**责任印制**　孔　源

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010－64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800－810－0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www hep edu cn
总　　机	010－82028899		http://www hep com cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京市卫顺印刷厂		
		版　　次	2000 年 8 月第 1 版
开　　本	787×960　1/16		2004 年 4 月第 2 版
印　　张	11 5	**印　　次**	2004 年 4 月第 1 次印刷
字　　数	210 000	**定　　价**	12.80 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有　侵权必究

第二版前言

本书上册是在《实变函数论》(高等教育出版社 2000 年出版)基础上修订而成的,与第一版相比,第二版做了如下几个方面的改进:

1. 文字上作了进一步的润饰,纠正了第一版中的一些疏漏,包括印刷错误和笔误以及定理证明中的一些疏忽

为更好地帮助读者理解一些概念和定理,并掌握本课程中的重要的思想方法与技巧,增加了对一些问题的阐述 以编者之见,学习任何一门课程的根本目的在于了解两个方面的问题:

(i)为什么要做某些事? 它是必要的吗?

(ii)应该如何科学地做这些事?

但愿读者通过阅读本书能透彻地理解为什么要定义测度、可测函数及新型的积分,能熟练掌握本课程的基本思想和方法

2. 为使本书适应更宽的读者面,在内容上做了一些标注.第一章至第四章(第四章*4.1 小节读者可以只作简单的了解,某些繁琐的证明可以跳过)为数学系学生的必学内容,考虑到一些专业确实需要抽象测度,特别是 Radon-Nikodym 定理,所以仍保留第五章作为选学内容供需要者使用

有些非数学类理工科专业的研究生实际上也需要实变函数知识,或许是学时所限的缘故,以往常常是只讲泛函分析,不讲实变函数,但如果不介绍 L^p 空间,则很难对泛函分析有直观和本质的理解,事实上,L^p 空间也是应用较为广泛的一类空间.希望本书在这方面能有所帮助.

书中所有标有 * 号的章节都是非数学类学生可以跳过不学的内容, 标有 * 号的定理可以只熟悉结论,暂不必学习它的证明 这样安排有两个好处,一是可以在极短的时间内了解实变函数的基本内容; 二是有兴趣的读者可以在有余力和时间的情况下方便地学习相关定理的证明而不必另寻资料 我们认为这样并不妨碍读者对实变函数理论的理解,实际上许多结论都可以与微积分中相应的结论作类比,关键在于了解这些理论的背景及科学意义

严格说来,教材只是一部半成品,对教材中概念、定理及思想方法的理解往往因教者或读者而异,正所谓仁者见仁、智者见智,只有在融入了使用者的智慧

之后，教材才能真正发挥它的作用 有鉴于此，编者在教材中尽可能渗入对一些问题的理解，或许它能为读者使用本教材提供一点方便，同时亦期望以此作为与读者的心得交流

曹广福

2004 年 3 月 20 日

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第一版前言

实变函数论在大学数学系已开设了几十年，其间出版的各种教材不计其数，仅以国内作者编写的教材而言，就有很多名家大作和各具特色的好教材，如恩师江泽坚先生和吴智泉先生合编的《实变函数论》（第二版）（高教出版社，1998年）、夏道行先生、吴卓人先生、严绍宗先生、舒伍昌先生合编的《实变函数论与泛函分析》（第二版）（上册）（高教出版社，1985年）、周民强先生编写的《实变函数》（北京大学出版社，1994年）等 有如此众多的好教材，为什么还要编写此书呢？主要出于如下几个方面的原因：

1 根据我校这几年开设实变函数论课程的实际情况，我们感到该课程的起点如建在抽象测度上，学生觉得太吃力，往往难于把握此门课程的本质，但如将起点建在直线上的 Lebesgue 测度上，又显得过于特殊 将起点建于 n 维欧氏空间情形是比较适当的，当然，这是指我校数学系学生而言，未必适用于其他兄弟院校. 在这一点上，江泽坚先生、吴智泉先生合编的《实变函数论》比较适合于我校

2 与数学系开设的前期课程相比，实变函数论有一定的抽象性，初学者会感到有些困难，如果对一些抽象概念作些必要的直观解释，对定理的来龙去脉交待得更清楚一点，并注重新旧知识之间的内在关联，将会给初学者准确把握该理论带来较大的帮助.

3 目前，我校课程体系正进行大的调整，许多课程的学时都要精简，实变函数论也不例外，我们需要一本更适合现行体系的《实变函数论》教材

鉴于上述原因，我们在讲授几年讲义的基础上，尝试编写了此书，谬误之处，敬请诸位专家指正

我们正处于从精英化教育向大众化教育转变的历史时期，众所周知，学习数学的关键在于理解数学，数学教育改革的根本任务在于如何从过去的传授数学知识转向培养学生提出、分析和解决数学问题或实际问题的能力，要让学生掌握解决问题的钥匙，同时，使他们懂得该如何学习. 基于这个原则，我们力求使本书直观、通俗易懂，尽可能让读者明白，为什么要引进某个概念，为什么要考虑某个问题，如何得到所要的结论. 如果读者阅读此书时，能轻松、准确地把握本门课程中的重要概念和定理，并从中有所收获，那么作者的努力就没有白费

要指出的是，本书编写过程中，参考了上面提到的多部教材以及其他一些教

材和一些数学史料 特别是江先生、吴先生合编的教材对本书的编写影响颇深，在此，对所有我们参考过的教材与书籍的作者深表谢意！另外，要感谢钟昌勇同志仔细阅读了全部手稿，指出了许多疏漏之处，并提供了部分习题 徐安石教授、余大海教授曾与作者多次研讨过编写方面的问题，在此一并表示谢意.最后还要特别感谢数学学院领导在作者编写本书过程中所给予的鼓励、支持和帮助，正是由于他们的支持，才使这部抛砖引玉之作得以顺利完成

曹广福

目　　录

引　言

实变函数即实变量的函数，微积分中所讨论的函数都属此类函数．然而，微积分学中涉及的函数都是比较“好”的函数，至少“基本上”是连续的函数，如果间断点太多，则无论是其可导性还是可积性就都成问题了，但非连续的函数是我们常常会碰到和必须处理的．著名的狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}-1, & x\text{ 是}[0,1]\text{ 中的有理数},\\ 1, & x\text{ 是}[0,1]\text{ 中的无理数}\end{cases}$$

在 Riemann 积分意义下就是个处处不连续的不可积函数．

另一方面，初等微积分学中的积分与极限交换顺序以及重积分化成累次积分等通常要在很强的条件下才能进行，然而，许多情况下，这些条件并不能得到满足．例如，一个黎曼(Riemann)可积函数序列在处处收敛意义下的极限完全可能是一个 Riemann 不可积函数，此时讨论 Riemann 积分意义下的极限与积分交换顺序问题可能是毫无意义的．遗憾的是，这类问题恰恰是无法回避的，有时，为了使问题的讨论得以继续进行，常常要做一大堆复杂的推导，这给我们带来极大的不便，如何解决这个问题呢？还是让我们先来回顾一下 Riemann 积分的定义，以图找出问题的症结所在．

定义　假设 $y=f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的函数，若存在某个常数 A，使得对区间 $[a,b]$ 的任一分割：$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ 及任意 $\xi_i\in[x_i,x_{i+1}]$，$i=0,1,\cdots,n-1$，只要 $\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1}(x_{i+1}-x_i)\to 0$，就有

$$\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)\to A,\tag{1}$$

则称 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，A 称为 f 在 $[a,b]$ 上的定积分．

从上述定义可以看出，如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则对 $[a,b]$ 内任一充分小的邻域，$f(x)$ 在其上值的变化不能太大，否则(1)式中和式的极限可能会不存在．由此看来，(1)式对函数有了特定的要求，它要求这些函数必须是“循规蹈矩”的，即(1)式中极限存在的函数要“基本上”是连续的，事实上，这已为人们所证明(这里所说的“基本上”稍有含糊，所幸不妨碍对问题的理解)．这说明，问题恰恰出在 Riemann 积分的定义本身，若想使事情得以解决，就必须摆脱 Riemann 积分的局限．

法国著名数学家勒贝格(Lebesgue，Henri Leon)给我们带来了全新的观点，

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

他凭着基于直观几何概念的深刻的洞察力，给分析学开辟了新天地，这也正是本书要介绍的新型积分学理论——Lebesgue 积分. Lebesgue 放弃了对函数的定义域进行分割并进而求和的方法，转而对函数的值域进行分割. 为方便起见，不妨以$[a,b]$上有界函数 $y=f(x)$ 为例，假设 $m\leqslant f(x)\leqslant M$，对$[m,M]$作任意分割 $m=c_0<c_1<c_2<\cdots<c_n=M$，则对 f 的定义域中任意x，$f(x)$ 必定位于某个$(c_i,c_{i+1}]$中. 考虑所有其值位于$(c_i,c_{i+1}]$中的那些 x，即$(c_i,c_{i+1}]$的原像，记作 $E_i=\{x\mid c_i<f(x)\leqslant c_{i+1}\}$. 直观上看来，当 $y=f(x)$ 连续时，E_i 是一些区间的并. 我们暂时先假定 f 是连续的，这样 E_i 自然有"长度"，即几个(也可能是无穷多个)小区间长度之和，作和式

$$S(f)=\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i\left|E_i\right|,\quad c_i<\xi_i\leqslant c_{i+1}\tag{2}$$

(也可以 $f(x_i)$ 代替 ξ_i，$x_i\in E_i$)，其中$|E_i|$表示小区间长度之和. 当 $\max\limits_i(c_{i+1}-c_i)\to 0$ 时，$S(f)$ 有没有极限？极限是什么？仔细分析一下，此时 $S(f)$ 的极限其实就是 f 的 Riemann 积分. 这就是说，用上述方法分割求和相对于连续函数来说与 Riemann 积分是一样的(以后将会看到，除了广义 Riemann 积分外凡 Riemann 可积函数在这种意义下都是可积的).

如果 f 在$[a,b]$上不连续，情形会怎样呢？此时 E_i 就未必是由区间组成的了，这从狄利克雷函数便可看出，因而 E_i 就没有通常的"长度"了，(2) 式自然没有意义. 要解决这一问题，就有必要对一般的集合 E_i 建立"长度"概念，这就是本书要介绍的"测度". 有了"长度"概念，还要考察什么样的集合有"长度"，什么样的集合没有"长度"？假如有些集合没有"长度"，那么什么样的函数 f 使得 $E_i=\{x\mid c_i<f(x)\leqslant c_{i+1}\}$ 有"长度"？什么样的f使(2)式有极限？于是"可测函数"及新型"可积函数"的概念便由此产生. 乍看起来，与 Riemann 积分比较，除了定义的角度、观点不同，Lebesgue 积分似乎无更多新意. 其实不然，这一理论给数学带来的影响是深刻和巨大的，它除了使可积函数的范围扩大了以及为积分与极限交换顺序等问题提供了更方便实用的理论外，其更深远的影响在于为泛函分析的产生奠定了基础，同时，也使得概率论很自然地成为近代数学的一个重要分支. 当然，实变函数对数学的影响远非仅止于此，江泽坚先生与吴智泉先生合编的《实变函数论》(第二版)(高教出版社，1998 年) 一书的序中对此作了生动的阐述.

本书将从集合的基本概念出发，逐步介绍测度、可测函数、Lebesgue 积分等理论，并简单介绍抽象测度与积分.

全书主要限于 Lebesgue 测度及积分情形，对于更一般的测度与积分理论，作为选学内容放在最后一章，它对于想进一步了解有关理论，特别是要学习泛函分析、现代概率论等课程的读者是必需的.

第一章　集　合

集合论产生于 19 世纪 70 年代,它是德国数学家康托尔(Cantor) 创立的,不仅是分析学的基础,同时,它的一般思想已渗入到数学的所有部门."集合论观点"与现代数学的发展不可分割地联系在一起,然而,任何一门学科的发展都不可能是一帆风顺的,也不可能是完美无缺的,正是集合论,曾经给数学界带来了极大的恐慌,因为自从康托尔以相当随便的方式阐述了集合论(即现在人们所说的朴素集合论)之后,人们逐渐发现它存在着不可调和的矛盾.如罗素(Bertrand Russell)于1918年叙述的著名"理发师"悖论,以及理查德(Jules Richard)编造的"理查德"悖论等等,都曾经深深困扰了数学家们,为避免集合论中的矛盾,人们求助于将 Cantor 的朴素集合论加以公理化,以策梅洛(Ernst Zermelo)为首的一批数学家建立了一套集合论公理体系,即如今的形式集合论,从而避免了这一理论内已被发现的矛盾.然而,有关公理化集合论相容性尚未得到证明.庞加莱(Poincare)关于相容性问题做了一个风趣的评论:"为了防备狼,羊群已用篱笆圈了起来,但却不知道圈内有没有狼."尽管集合论不如人们所期望的那样无懈可击,它在数学中的地位却不因此而降低.它始终是我们掌握许多理论所必须的基本知识.

§1　集合及其运算

1.1　集合的定义及其运算

我们在诸如数学分析等前期课程中已接触过集合这个概念,所谓**集合**,指的是具有某种特定性质的**对象**的全体,通常用大写英文字母 $A,B,X,Y,\cdots$ 表示;集合中的每个对象称为该集合的**元素**.一般说来,我们总用小写字母 $a,b,x,y,\cdots$ 表示集合中的元素.

对于集合 A,某一对象 x 如果是A 的元素,则称 x **属于**A,记作 $x\in A$;如果 x 不是A 的元素,则称 x **不属于**A,记为 $x \overline{\in} A$(或记为 $x\notin A$).

正如定义所说,集合是由具有某种特定性质的对象全体组成的,因此,在表示一个集合时,常把这一性质写出来,例如,A 是由具有性质P 的元素全体组成时,通常记为:

$$A = \{x \mid x \text{ 具有性质} P\},$$

其中 P 可以是一段文字，也可以是某个数学式子.

例 1　假设集合 A 是直线上满足方程 $x^3 - 3x + 2 = 0$ 的点组成的，试用适当方法表示该集合.

解　$A = \{x \mid x^3 - 3x + 2 = 0\}$.

例 2　假设 $y = f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}^1$(实直线)上的函数，试用适当方法表示使函数值小于 2 的那些点的全体.

解　记 A 为函数值小于 2 的点的全体，则 A 可写成：

$$A = \{x \in R^1 \mid f(x) < 2\}.$$

除了上述方法之外，有时也用特殊记号表示某些特殊的集合. 比如，在大多数场合下，$\mathbf{R}^1$ 始终表示实数全体(或直线)，$\mathbf{C}$ 始终表示复数全体(或复平面)，$\mathbf{N}$、$\mathbf{Z}$、$\mathbf{Q}$① 分别表示**自然数**、**整数**、**有理数**全体，以后如无特别声明，我们也都不加解释地使用这些符号. 此外，直线上的区间也采用诸如 $[a,b]$，(a,b) 等记号，如果一个集合仅由有限个元素组成，则最方便的办法是将其一一列出来，例如，1 到 10 的自然数全体可记作 $\{1,2,3,\cdots,10\}$，不含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$.

假设 A，B 是两个集合，如果 A 中的元素都是 B 中的元素，则称 A 是 B 的子集，记作 $A \subset B$，或记作 $B \supset A$. 前者读作"A 包含于 B 中"，后者读作"B 包含 A". 显然，空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集，任何集合是其自身的子集. 假如要证明 A 是 B 的子集，最常用的办法是，任取 $x \in A$，然后设法证明 $x \in B$.

如果 A 是 B 的子集，且存在 $b \in B$，使 $b \overline{\in} A$，则称 A 是 B 的**真子集**，记作 $A \subsetneqq B$.

如果 A 是 B 的子集，B 又是 A 的子集，则称 A 与 B 相等，记作 $A = B$.

下面来定义集合的运算.

假设 A，B 是两个集合，所谓 A 与 B 的**并集**(或**和集**)，指的是由 A 与 B 中所有元素构成的集合，记作 $A \cup B$，换句话说，$x \in A \cup B$ 当且仅当 $x \in A$ 或 $x \in B$. 所有既属于 A，又属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**交集**(或**通集**)，记作 $A \cap B$，若 $A \cap B = \varnothing$，则称 A 与 B 互不相交，显然 $x \in A \cap B$ 当且仅当 $x \in A$ 且 $x \in B$. 对于一簇集合 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$，可类似定义其并集与交集，即 $\bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \{x \mid \text{存在} \alpha \in \Lambda, \text{使 } x \in A_\alpha\}$，$\bigcap\limits_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \{x \mid \text{对每一} \alpha \in \Lambda, \text{有 } x \in A_\alpha\}$. 由所有属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合，称为 A 减 B 的**差集**，记作 $A - B$(或 $A \setminus B$)，也就是说，$x \in A - B$ 当且仅当 $x \in A$，但 $x \overline{\in} B$. 应该注意的是，此处并未要求 B 是 A 的子集. 假如 B 是 A 的子集，则称 $A - B$ 为 B 关于 A 的余集，

---

① 这里作一个符号说明，从这里开始，我们把数集 $\mathbf{R},\mathbf{C},\mathbf{N},\mathbf{Z},\mathbf{Q}$ 简化表示成 R,C,N,Z,Q，读者可根据上、下文判断. 在国标中，$\mathbf{N}$ 表示集合 $\{0,1,2,\cdots\}$. 本书仍沿用旧的记法，记 $\mathbf{N} = \{1,2,\cdots\}$.

记作$\complement_A B$(或 B^c).需要指出的是,我们讲某个集合的余集时,要弄清相对于哪个集合的余集,特别是涉及多个集合时,尤其应注意.有时,我们总是限定在某个固定集合 A 内讨论一些子集,在这种情况下,可以省略 A,而将$\complement_A B$ 记作$\complement B$.

集合$(A - B) \cup (B - A)$ 称为 A 与 B 的**对称差**,记作 $A \Delta B$.

集合的“并”、“交”、“差”运算具有下列基本性质:

定理 1

(1)$A \cup A = A, A \cap A = A$;

(2)$A \cap \varnothing = \varnothing, A \cup \varnothing = A, A - \varnothing = A$;

(3)$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;

(4)$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

(5)$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

(6)$(A - B) \cap C = (A \cap C) - (B \cap C)$;

(7)$(C - A) - B = C - (A \cup B)$;

(8)$A \cup B = (A \Delta B) \cup (A \cap B)$;

(9)$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$;

(10)$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$;

(11) 若 $B \subset A \subset C$,则$\complement_C A \subset \complement_C B$;

(12) 若 $B \subset A$,则 $B \cap A = B, A \cup B = A$.

上述基本性质都是常用的,其中(9),(10) 两式通常称为德摩根(De Morgan) 法则,它们的证明也是容易的.现在以(10) 式为例进行证明.

假设 $x \in A - (B \cap C)$,则 $x \in A$ 且$x \overline{\in} B \cap C$,由交的定义知 $x \overline{\in} B$ 或 $x \overline{\in} C$,于是 $x \in A - B$ 或$x \in A - C$,从而 $x \in (A - B) \cup (A - C)$,故 $A - (B \cap C) \subset (A - B) \cup (A - C)$.反之,任取 $x \in (A - B) \cup (A - C)$,则 $x \in A - B$ 或$x \in A - C$,于是 $x \in A$ 且$x \overline{\in} B$,或者 $x \in A$ 见且$x \overline{\in} C$,总之,$x \in A$,但 $x \overline{\in} B \cap C$,这说明 $x \in A - (B \cap C)$,进而$(A - B) \cup (A - C) \subset A - (B \cap C)$,综上知 $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.证毕.

这些性质有些也可以推广至多个乃至无穷多个集合的情形,比如若 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是一簇集合,S 是一个集合,则有

(9′)$S - (\bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in A} (S - A_\alpha)$;

(10′)$S - (\bigcap_{\alpha \in A} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in A} (S - A_\alpha)$.

1.2　集合序列的上、下限集

在引言中，我们已见过形如$\{x \mid C_t < f(x) \leqslant C_{t+1}\}$的集合，在实变函数中，常常利用这类集合来反映函数的特征，当我们考虑一串函数$\{f_n\}$及其某种意义下的极限时，就不可避免地要涉及一串集合，以及当$n \to \infty$时，这些集合的“极限”，所以我们现在便来定义集合序列的极限.

就像数列未必有极限，集合序列当然也可能没有极限，如何定义集合的极限呢?类似数列的上、下极限概念，我们可以定义集合的上、下限集.

定义 1　假设$\{A_n\}$是一列集合，称集合

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \quad 与 \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

分别为序列$\{A_n\}$的**上限集**与**下限集**，并分别记作

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n \quad 与 \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n.$$

如果$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$，则称$\{A_n\}$有极限或收敛，并且将$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$称为$\{A_n\}$的**极限**，记作$\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

上述定义似乎不太直观，对于给定的集列$\{A_n\}$，其上限集与下限集都是由什么元素组成的呢?我们先来看看上限集，不妨设$x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m$，则对任意$n$，有$x \in \bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m$，故存在$m$，使$x \in A_m$. 先取$n_1 = 1$，则存在某个$m_1$，使$x \in A_{m_1}$，再令$n_2 > m_1$，则由$x \in \bigcup\limits_{m=n_2}^{\infty} A_m$知存在$m_2 > m_1$，使$x \in A_{m_2}$，…，依此过程继续下去，可得到一串$\{m_n\}$，使对任意$n$，$x \in A_{m_n}$，这就是说，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$中的点一定在无穷多个$A_m$中. 反过来，如果$x$属于无穷多个$A_n$，不妨设$x \in A_{m_k}$，$m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots$，则对任意$n$，总存在$k_n$，使$m_{k_n} > n$，于是$x \in A_{m_{k_n}} \subset \bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m$，由$n$的任意性立得$x \in \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$. 因此，我们又可以将$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$叙述为：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \{x \mid x \text{ 属于无穷多个 } A_n\}.$$

类似的分析可以证明：$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \{x \mid$ 存在n_0，使得x属于n_0以后的所有$A_n\} = \{x \mid$ 只有有限个n，使x不属于$A_n\}$.

集列$\{A_n\}$称为单调上升(或下降)的，如果$A_n \subset A_{n+1}$(或$A_n \supset A_{n+1}$)对一切n都成立. 对于单调集列，我们有

定理 2　设$\{A_n\}$是单调上升集列，则

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n;$$

如果$\{A_n\}$是单调下降集列，则

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

证明　由上、下限集的定义不难证明.

例 3　设 $A_n = \left\{x \middle| -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}\right\}, n = 1,3,\cdots$，求$\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

解　不难看到$\{A_n\}$是单调下降的集列，由定理 2 立知

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid 对任意 n, -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}\} = \{0\}.$$

例 4　设 $A_n = \{x \mid -1 + \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 - \frac{1}{n}\}, n = 1,2,3,\cdots$，求$\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

解　显然 A_n 是单调上升集列，于是

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \left\{x \middle| 有无穷多个 n，使 -1 + \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 - \frac{1}{n}\right\}$$
$$= \{x \mid -1 < x < 1\}.$$

*1.3　域与 σ－域

回想实数全体或复数全体相对于四则运算是封闭的，人们通常称它们为实数域和复数域. 一般来说，如果我们给某一类对象引进了某种运算，当然希望经过这种运算后，新的对象还在给定的类中，这在许多情况下是至关重要的，前面已经定义了集合的"并"、"交"、"差"运算，在大多数情况下，我们总是考虑由某种类型的集合组成的集簇，那么什么样的集簇相对于集合的运算是封闭的呢？这就是下面要引进的定义.

定义 2　假设 S 是一个给定的集合，$\mathscr{F}$是以 S 的一些子集为元素的一个集合，称为 S 的**子集簇**，如果它满足

(1) $\varnothing \in \mathscr{F}$;

(2) 当 $A \in \mathscr{F}$时，$\complement_S A \in \mathscr{F}$;

(3) 当 $A, B \in \mathscr{F}$时，$A \cup B \in \mathscr{F}$,

则说$\mathscr{F}$是 S 的一些子集构成的一个**域(或代数)**. 如果还有

(3′) 当 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是$\mathscr{F}$中一串元素时，有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F},$$

则称$\mathscr{F}$为 S 的一些子集构成的一个 σ－域(或 σ－代数).

不难发现，如果(1)、(2)、(3) 成立，则必有 $S \in \mathscr{F}$，及对任意 $A, B \in \mathscr{F}$，$A \cap B \in \mathscr{F}$. 如果(3′) 成立，则对任意 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \in \mathscr{F}$，有 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$.

σ－域的最简单例子是 S 的一切子集构成的簇，这是 S 的子集簇中最大者；

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com