刘海生 编译

苏联高考与竞赛物理试题精选

（详解）

SULIAN GAOKAO YU JINGSAI
WULI SHITI JINGXUAN

科学普及出版社

苏联高考与竞赛物理试题精选

（详　解）

刘海生　编译

上海科学普及出版社

（沪）新登字第 305 号

责任编辑　陈英黔

苏联高考与竞赛物理试题精选

（详解）

刘海生　编译

上 海 科 学 普 及 出 版 社 出 版

（上海曹杨路 500 号　邮政编码 200063）

新华书店上海发行所发行　上海长鹰印刷厂印刷

开本 787×1092 1/16　印张 11.25　字数 380000

1992 年 9 月第 1 版　1992 年 9 月第 1 次印刷

印数 1—5000

ISBN 7-5427-0410-9/G·100　定价：6.00 元

前　言

本书中的题目主要选自苏联物理—数学书籍总编辑部《科学》出版社近年首版书：Л.П. 巴卡尼娜和 B.E. 别洛努奇金等编著的《莫斯科理工大学高考物理试题集》，Г.B. 叶利金编著的《新西伯利亚国立大学高考物理试题集》，A.И. 布兹金和 B.И. 伊利思等编著的《莫斯科物理竞赛试题集》。《高等教育》出版社的C.И. 卡乞娜和Ю.И. 塞佐罗夫等编著的《物理习题集》。另有选自苏联近期杂志《物理教学》和《量子》(截止 1991 年 5月)，上面刊载有国立莫斯科大学、莫斯科理工大学、列宁格勒大学等苏联第一流大学各系历年入学考试试题；全苏奥林匹克竞赛以及莫斯科、列宁格勒、俄罗斯等主要市区历年竞赛试题。编译者根据我国《高中物理教学纲要(草案)》以及《全国中学生物理竞赛内容提要》，结合我国目前中学生的实际情况，从几千题中精选了 500 多题。

入选的题目新颖、独创、概念性强。难度适中，大学入学试题相当于我国高考试题中较难题目；竞赛试题为市区一级水平，可作为竞赛预备题，这正是国内所缺乏的参考资料，必将丰富国内题库。所选题目均作了详细的分析，解法简捷、灵活、技巧性高。能有效地帮助学生加深对物理概念的理解，开拓视野，启发思维，提高理解能力，推理判断能力和分析综合能力，因此它可供广大中学师生参考。凡打“*”号的题目难度稍大。

最后，衷心感谢《量子》杂志出版社编辑部给编译者寄来了宝贵的资料，使本书得以崭新的面貌同读者见面。

由于水平有限，书中定会有不少欠妥甚至错误之处，敬希读者批评指正。

编　译　者

1991 年 5 月于上海

目　　录

第一章 力 学

一、运 动 学

1-1 敞开的旋转木马离转动轴距离为 r，以角速度 ω 转动，人站在木马上。下雨了，雨滴以速度 v_0 竖直下落。试问人应该怎样支撑着遮雨伞才能够最有效地避开雨。

分析与解 设人上方的雨滴相对木马的速度方向与竖直方向成角 α，这个角由图 1-1 所示的速度矢量三角形来确定。

因为按照速度合成规律，$v_0 = v_{相} + v_{马}$，式中 $v_{马}$ 是人所在处木马的速度，所以 $v_{相} = v_0 - v_{马}$。木马的速度 $v^{马} = \omega r$，因此 $\mathrm{ctg}\,\alpha = v_0/\omega r$

于是，遮雨伞的轴应该与竖直方向成角

$$\alpha = \mathrm{arc\ ctg}\frac{v_0}{\omega r}$$

朝木马运动方向倾斜并垂直于木马所在的半径。

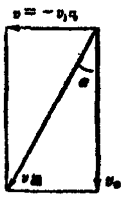

图 1-1

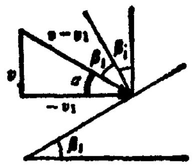

图 1-2

1-2 一辆汽车的正面玻璃一次安装成与水平方向倾斜角为 $\beta_1 = 30°$，另一次安装成倾斜角度为 $\beta_2 = 15°$。问汽车两次速度之比 $\frac{v_1}{v_2}$ 为多少时，司机看见冰雹两次都是以竖直方向从车的正面玻璃上弹开?(冰雹相对地面是竖直下落的)

分析与解 假设冰雹以速度 v 竖直下落。在与汽车相连的坐标系内，冰雹对正面玻璃的入射角等于反射角。在这种情况下冰雹落到玻璃上之前的速度等于 $v-v_1$(图 1-2)。由于在反弹后(司机观察到)冰雹竖直向上飞去，这意味着，反射角和入射角都等于 β_1 (β_1 是汽车正面挡风玻璃的倾角)因此

$$\alpha + 2\beta_1 = \frac{\pi}{2}$$

并且

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v}{v_1}$$

由此

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 2\beta_1\right) = \mathrm{ctg}\,2\beta_1$$

$$\frac{v}{v_1} = \mathrm{ctg}\,2\beta_1$$

所以汽车两次速度之比

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\mathrm{ctg}\,2\beta_2}{\mathrm{ctg}\,2\beta_1} = 3$$

1-3 图 1-3 为从两列蒸汽机车上冒出的两股长幅汽雾拖尾的照片(俯视)。两列车沿直轨道分别以速度 $v_1 = 50$ 千米/小时和 $v_2 = 70$ 千米/小时行驶，行驶方向如箭头所示。求风速。

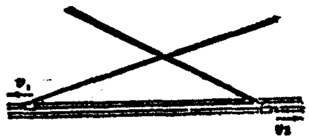

图 1-3

分析与解 将两列机车之距离 AB 按照比例 5:7 分成两段，分点 C 为两列机车相遇之处(图 1-4)。两股长幅汽雾拖尾的交点被风从 C 点吹到 O 点，因此风速 $v_{风}$ 沿直线 CO 方向。量出图 1-4 上线段 CO (l_1) 和 AB(l_2)的长度，得到风速

$$v_{风} = (v_1 + v_2)\frac{l_1}{l_2} \approx 32 \text{ 千米/小时} \approx 9 \text{ 米/秒}$$

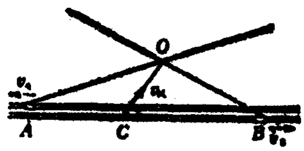

图 1-4

1-4 一架飞机从 A 处向北飞到 B 处，然后返回 A 处，飞机相对于空气的速度为 v，而空气相对于地面的速度为 u。假设 v 保持恒定，AB 之间距离为 l。试证：当空气速度的方向偏离南北方向某一角度时，来回飞行所用时间为

$$t = \frac{t_0\sqrt{1 - \frac{u^2}{v^2}\sin^2\theta}}{1 - \frac{u^2}{v^2}} \left(当\ u = 0\ 时,\ t_0 = \frac{2l}{v}\right)$$

分析与解 当空气速度方向与南北方向夹角为

θ 时，为保证飞机以南北方向飞行，设飞机应沿着与南北方向的夹角为 φ 飞行。根据正弦定理

$$\frac{\sin\theta}{v}=\frac{\sin\varphi}{u}$$

由此得到

$$\sin\varphi=\frac{u}{v}\sin\theta \quad \cos\varphi=\sqrt{1-\frac{u^2}{v^2}\sin^2\theta}$$

于是，往北飞行速度

$$v_{往}=u\cos\theta+v\cos\varphi$$
$$=u\cos\theta+v\sqrt{1-\frac{u^2}{v^2}\sin^2\theta}$$

往北飞至 B 处所需时间

$$t_{往}=\frac{l}{u\cos\theta+v\sqrt{1-\frac{u^2}{v^2}\sin^2\theta}}$$

同理可得

$$v_{返}=v\sqrt{1-\frac{u^2}{v^2}\sin^2\theta}-u\cos\theta$$

$$t_{返}=\frac{l}{v\sqrt{1-\frac{u^2}{v^2}\sin^2\theta}-u\cos\theta}$$

所以往返飞行时间为

$$t=t_{往}+t_{返}=\frac{t_0\sqrt{1-\frac{u^2}{v^2}\sin^2\theta}}{1-\frac{u^2}{v^2}}$$

1-5　磁带录音机的空带轴以恒定角速度转动，重新绕上磁带。绕好后带卷的末半径 $r_{末}$ 为初半径 $r_{初}$ 的 3 倍（图 1-5）。绕带的时间为 t_1。要在相同的带轴上重新绕上厚度为原磁带一半的薄磁带，问需要多少时间 t_2？

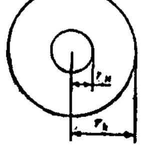

图 1-5

分析与解　绕好厚磁带后，磁带占据带轴部分的截面积

$$S_1=\pi(r_{末}^2-r_{初}^2)=8\pi r_{初}^2。$$

于是这部带的长度

$$l=\frac{S_1}{d}=8\pi\frac{r_{初}^2}{d},$$

式中 d 是磁带的厚度。

当绕好薄磁带后，磁带占据带轴部分的截面积 $S_2=\pi(r'^2_{末}-r_{初}^2)$，式中 $r'_{末}$ 是第二种情况下带卷的末半径。因为带长相同，而第二种情况中磁带的厚度为第一种情况的一半，由此可以列出

$$l=2\pi(r'^2_{末}-r_{初}^2)/d \quad r'^2_{末}-r_{初}^2=4r_{初}^2$$

因而，在第二种情况中带卷的末半径 $r_{末}'$ 等于

$$r_{末}'=\sqrt{5}r'_{初}$$

在第一和第二种情况中所绕带卷的匝数 N_1 和 N_2 可以列出

$$N_1=\frac{2r_{初}}{d} \qquad N_2=\frac{(\sqrt{5}-1)r_{初}}{d/2}$$

由此得到

$$t_2=(\sqrt{5}-1)t_1$$

1-6　在听磁带录音机的录音时发觉：带轴上带卷的半径经过时间 $t_1=20$ 分减小一半。问此后半径又减小一半需要多少时间 t_2？

分析与解　设带卷的初半径为 $4r$，于是当半径减少一半，成为 $2r$ 时，带卷的面积减少了

$$S=\pi(16r^2-4r^2)=12\pi r^2$$

这等于所绕带的长度 l_1 与带的厚度 d 之乘积。在听录音时带运行的速度 v 恒定，所以 $l_1=vt_1$，于是可以列出关系式

$$12\pi r^2=vt_1d \tag{1}$$

当带轴上线卷面积又减少一半（从 $2r$ 到 r）时，带卷的面积减少了 $\pi(4r^2-r^2)=3\pi r^2$，即

$$3\pi r^2=vt_2d \tag{2}$$

式中 t_2 是第二种情况中减少带卷半径所经过的时间。将(2)式除以(1)式，得到

$$t_2=\frac{t_1}{4}=5\text{分}$$

1-7　试求在日全食期间月球的影子沿地球表面运动的速度。不考虑地球沿轨道运行方向的修正值。为了简单起见可以认为：观察日食是在赤道上晌午时进行的，地轴垂直于月球轨道平面。地球绕地轴的转动方向与月球沿轨道运动方向一致（图 1-6）。地球与月球之间距离 $r=3.8\times10^5$ 千米，地球半径 $R_{地}=6.4\times10^3$ 千米。月球上一个月为地球上 28 天。计算时注意地球到太阳的距离比地球到月球距离远得多。

分析与解　在地球表面上月球影子的位移是由于地球的自转（Δl_1）和月球在其轨道上运行的位移（Δl_2）所引起的。在时间 Δt 内这两个位移分别等于

$$\Delta l_1=(2\pi R_{地}/T_{地})\Delta t \quad \Delta l_2=(2\pi r/T_{月})\Delta t$$

式中 $T_{地}=1$ 天，而 $T_{月}=28T_{地}$。因为月球沿轨道运动方向与地球自转一致，所以月球影子的合位移

$$\Delta l=\Delta l_2-\Delta l_1=2\pi(r/T_{月}-R_{地}/T_{地})\Delta t$$

影子位移的速度

$$v=2\pi(r/T_{月}-R_{地}/T_{地})=0.52\text{ 千米/秒}$$

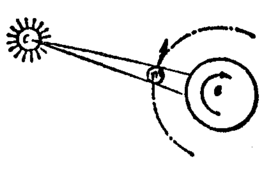

图 1-6

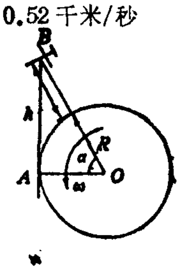

图 1-7

1-8　一架飞机在高度为10千米上空飞行，机上乘客看见太阳升起。试估计在飞机正下方地面上的观察者还要经过多少时间可以看见太阳。

分析与解　设站在地面上的观察者经过时间 t 看见太阳。t 为此时地球绕地轴转过角 α（图1-7）所需要的时间。

在直角 $\triangle BAO$ 中（图1-7），飞机离地面的高度 $h=10$ 公里，地球半径 $R=6.4\times10^3$ 千米。

$$\frac{R}{R+h}=\cos\alpha$$

$$\frac{h}{R}=\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}=\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$$

因为 α 很小，故 $\mathrm{tg}\,\alpha\approx\alpha$，$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\approx\frac{\alpha}{2}$，于是

$$\frac{h}{R}\approx\frac{1}{2}\alpha^2\qquad\alpha\approx\sqrt{\frac{2h}{R}}$$

$$t=\frac{\alpha}{\omega}=\frac{\alpha}{\frac{2\pi}{T}}\approx\frac{\sqrt{\frac{2h}{R}}}{\frac{2\pi}{T}}\approx 13\text{分}$$

式中 ω 是地球自转的角速度，$T=1$ 昼夜。

*1-9　三位小学生：斯娜华(C)、伊戈尔(N)和尼基塔(H)。他们打算玩一会旋转木马。斯娜华和伊戈尔在半径为 r 的旋转木马上正相反的两点；尼基塔在半径为 R 的旋转木马上。开始时三位小学生的位置如图1-8所示。考虑到，两个木马彼此相互接触并且朝同一方向以相同的角速度 ω 旋转。试问：从伊戈尔观察，尼基塔的运动有什么特点？从尼基塔观察，斯娜华的运动有什么特点？

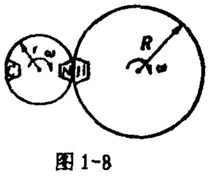

图1-8

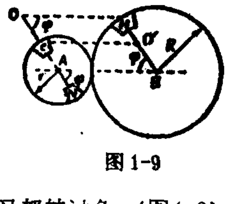

图1-9

分析与解　假设两个木马都转过角 φ(图1-9)。作 O 点($OA=R$)，使点O、C、A、N 位于同一条直线上。不难看出，在任何时刻存在如下关系 $OH=R+r$。此外，O 点相对伊戈尔是不动的(斯娜华总是位于伊戈尔对面)。所以从伊戈尔观察，尼基塔是沿着以 O 点为中心，以 $R+r$ 为半径的圆周平动，而 O 点相对地面沿着以 A 点为中心，以 R 为半径的圆周运动。从尼基塔观察，斯娜华沿着以 O' 点为中心（相对尼基塔是静止的）、以 $R+r$ 为半径的圆周平动。但是相对地面 O' 点沿着以 B 点为中心，以 r 为半径的圆周运动。

1-10　一只木筏离开河岸，初速度为 v，方向垂直于岸，且划行路线如图1-10所示。经过时间 T，木筏划到路线上标有*号处。河水速度恒定为 u。用作图法找到在 $2T$、$3T$ 和 $4T$ 时刻此木筏在航线上的确切位置。

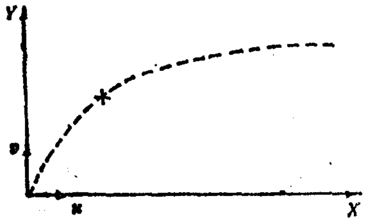

图1-10

分析与解　研究木筏在以水(河水速度 u)为坐标系内运动情况。在此坐标系内，木筏具有初速度 $v'=v-u$，沿直线运动 同时，受到水的阻力作用，速度v'减小(如果没有受到水的阻力，那么，经过时间 T，木筏应在坐标为 $x_c=uT$，$y_c=vT$ 的 C 点，图1-11)。在时间 T 内，木筏相对岸的位移是它相对水的位移 $s_{相}=v'T$ 和水流位移 $s_{水}=uT$ 之和(见图)。经时间$2T$，水流位移增大一倍，沿 x 轴离 O 点距离用长度为 $2s_{水}$线段表示，过 x 轴上 $2s_{水}$ 一点作平行于 $s_{相}$ 的直线与木筏的路线相交于第二个标有*号点，可见经过时间 $2T$，木筏正划到此处。

运用上述作图法，也可以找到经过时间 $3T$、$4T$ 等情况时，木筏划行所到之处。

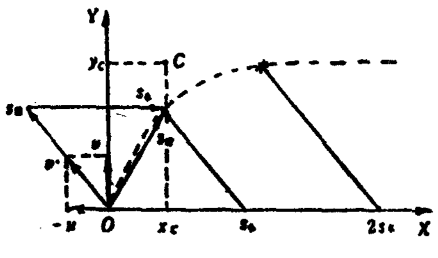

图1-11

1-11　两只小环 O 和 O' 分别套在静止不动的竖直杆 AB 和 $A'B'$ 上。一根不可伸长的绳子一端系在 A' 点上，穿过环 O'，另一端系在环 O 上(图1-12)。若环 O' 以恒定速度 v_1 向下运动，$\angle AOO'=\alpha$，求环 O 的速度？

分析与解　取与环 O' 相连接的坐标系。在这个坐标系内 O 点速度等于 $v_1/\cos\alpha$ 且方向向上，这是由于绳不可伸长，绳相对环 O' 以恒定速度 v_1 抽出。所以相对与地面相连接的直线 AA'，环 O 的速度为

$$v_2=\frac{v_1}{\cos\alpha}-v_1=v_1\frac{2\sin^2(\alpha/2)}{\cos\alpha}$$

方向向上。

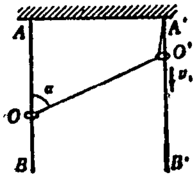

图 1-12

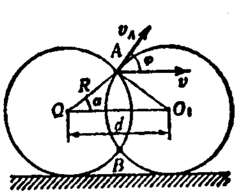

图 1-13

1-12 一个半径为 R 的轴环立在水平面上。另一个同样的轴环以速度 v 从前一个轴环旁边经过。试求两轴环上部的"交叉点"的速度 v_A 与两环中心之距离的关系。可以认为轴环薄，第二个轴环紧紧地靠近第一个轴环"驶过"。

分析与解 由于以 O_1 点为圆心的轴环是静止的，所以在任何时刻两轴环"相交叉"的上边一点 A 的速度v_A方向，应该指向圆 O' 的切线(图 1-13)。在任何时刻线段AB 将两环中心之距离 $d=OO'$ 平分。所以 v_A 的水平分量 v_A 总是等于 $v/2$。因而，速度 v_A 与水平线的夹角 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ 并且大小等于

$$v_A=\frac{v}{2\cos\varphi}=\frac{v}{2\sin\alpha}$$

既然 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\dfrac{d}{2R}\right)^2}$，那么上"交叉点"的速度等于

$$v_A=\frac{v}{2\sqrt{1-\left(\dfrac{d}{2R}\right)^2}}$$

1-13 合页构件由三个菱形组成，其边长之比为 3:2:1(图 1-14)。顶点 A_3 以速度 v 往水平方向移动。求当构件的所有角都为直角时，顶点 A_1，A_2，B_2 的速度。

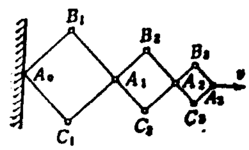

图 1-14

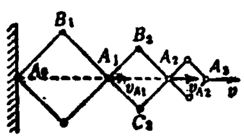

图 1-15

分析与解 由题意可知，在构件运动时，线段 A_0A_1，A_0A_2，A_0A_3 的长度 l_1 l_2，l_3 之间保持如下比例

$$l_1:l_2:l_3=3:5:6$$

所以点 A_1，A_2，A_3 速度之比为

$$v_{A_1}:v_{A_2}:v_{A_3}=3:5:6$$

因此(图 1-15)

$$v_{A_1}=v/2 \quad v_{A_2}=5v/6$$

现在我们来讨论当构件的各角为直角时中间环节 ($A_1B_2A_2C_2$) 的运动。在以速度 v_{A_1} 运动的坐标系内，当 B_2 点的速度 v'_{B_2} 沿 B_2A_2 边方向时；A_2 点速度沿水平方向并且等于

$$v'_{A_2}=v_{A_2}-v_{A_1}=v/3$$

从杆 B_2A_2 不可伸长这一条件得出结论

$$v'_{B_2}=v'_{A_2}\sin(\pi/4)=\frac{\sqrt{2}}{6}v$$

运用余弦定律求得 B_2 点相对静止坐标系的速度

$$v^2_{B_2}=v^2_{A_1}+v'^2_{B_2}+(2\sqrt{2}/2)v_{A_1}v'_{B_2}=(17/36)v^2$$

$$v_{B_2}=(\sqrt{17}/6)v$$

1-14 一个球以速度 v 沿直角斜槽 ACB（图 1-16)的棱角作无滑动地滚动。AB 等于球的瞬时转轴。试问球上哪些点速度最大？这最大速度为多少？

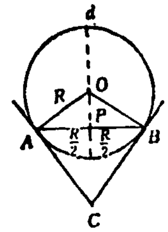

图 1-16

分析与解 根据题意球作无滑动地滚动，那么球上速度为零的那些点是此刻球与槽相切的点 A 和 B（见图）。可以认为球是坚硬的物体(这意味着，球上任何两点之距离保持不变），于是得出结论，在该时刻球中位于线段 AB 上的各点都是静止不动的，这就意味着，球的运动就是相对 AB 轴的转动。

球上任意一点即时速度为 ωr，ω 为转动角速度，r 为该点到轴 AB 的距离。球中心速度(即圆上O点)为 v，O 点到轴 AB 距离为 $r_0=OP=\dfrac{\sqrt{3}}{2}R$。因此

$$\omega=\frac{v}{r_0}=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{v}{R}$$

显然，球上离轴 AB 最远的点具有最大速度。从几何学知识推测，在任意时刻仅有一个点离轴最远，即圆上 d 点，从 d 点到轴 AB 的距离为 $r_d=r_0+R=R(1+\sqrt{3}/2)$，因而，$d$ 点的速度

$$v_d=v_{\max}=\omega r_d=\frac{2v}{\sqrt{3}R}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)R$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}v$$

1-15 绳的一端固定，另一端缠在圆筒上。圆筒放在与水平面成角 α 的光滑斜面上，如图 1-17所示。当绳为竖直方向时，圆筒转动角速度为 ω。试求此刻(1) 圆筒轴的速度；(2) 圆筒与斜面切点的速度。(圆筒半径为 R)

分析与解 我们讨论当绳为竖直方向时的情况。由于绳子不可伸长，绳上竖直段上的最低点与其相接触的圆筒上的 A 点，具有相同的水平方向速度 v_A。圆

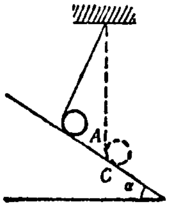

图 1-17

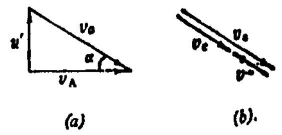

图 1-18

筒的运动可看作是，它的轴以平行于斜面方向速度 v_0 的平动，和绕轴按顺时针方向以角速度ω 转动之合运动。在这种情况下 A 点速度(图 1-18 a)

$$v_A = v_0 + v'$$

不难看出，$v' = \omega R$　$v_A \perp v'$ 由此得到

$$v_0 = \omega R/\sin\alpha$$

对于圆筒与斜面的切点 C 可以列出类似关系(图 1-18 b)

$$v_c = v_0 + v''$$

而沿斜面方向投影

$$v_c = v_0 - \omega R$$

由此

$$v_c = \omega R/\sin\alpha - \omega R = \omega R(1-\sin\alpha)/\sin\alpha$$

1-16　缠在线轴上的绳子的一头搭在墙上的钉子 A 上(图 1-19)。以恒定速度 v 拉绳，当绳子与竖直方向成角 α 时，求线轴中心运动速度 v_0。线轴的外径为 R，内径为 r。线轴沿水平面做无滑动的滚动。

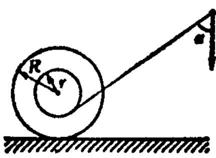

图 1-19

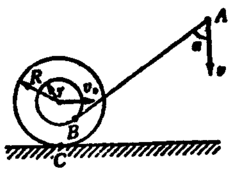

图 1-20

分析与解　如果像图 1-20 所示那样拉绳，线轴将向右滚动，同时绕自己的轴按顺时针方向转动。

对于B点平动速度 v_0 和转动线速度(角速度ω)在沿绳方向上投影之和等于 v

$$v = v_0\sin\alpha - \omega r$$

根据题意线轴沿水平面做无滑动的滚动，所以对于 C 点相应速度的投影之和等于零

$$v_0 - \omega R = 0$$

解所得到的两个方程，求得速度v_0等于

$$v_0 = vR/(R\sin\alpha - r)$$

显然，当 $R\sin\alpha = r$ 时(即对应点 A、B 和 C 位于一条直线上)表示 v_0 的式子失去意义。同时注意，无论线轴向右运动（当 B 点位于直线 AC 上方且 $R\sin\alpha > r$），还是向左运动（当 B 点位于直线 AC 下方且 $R\sin\alpha < r$），所求得的 v_0 表达式都能描述线轴的运动。

1-17　线轴沿水平面作没有滑动的滚动，并且线端(A 点)的速度为 v，水平方向。以铰链固定于 B 点的木板靠在线轴上(图 1-21)。线轴的内、外半径分别为 r和R。试确定木板的角速度 ω 与角 α 的关系。

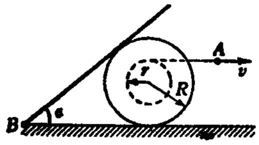

图 1-21

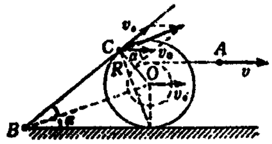

图 1-22

分析与解　设当某个时刻木板与线轴相切于C点。C 点速度是转轴 O 的速度 v_0 同速度 v_0' 之矢量和，v_0' 大小等于 v_0 大小（相对 O 点），方向在 C 点与圆相切。如果在这一时刻木板的角速度为 ω，那么木板与线轴切点的线速度等于 $\omega R\,\mathrm{tg}^{-1}(\alpha/2)$（图 1-22）。由于木板总是与线轴相切的，故相对木板 C点速度沿木板方向，由此 $\omega R\,\mathrm{tg}^{-1}(\alpha/2) = v_0\sin\alpha$。从线轴沿水平面作无滑动的滚动可知

$$v_0/R = v/(R+r)$$

所以得到角速度 ω 的式子

$$\omega = \frac{v}{R+r}\sin\alpha\cdot\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2\,v\sin^2(\alpha/2)}{(R+r)\cos(\alpha/2)}$$

1-18　长度 $l = 10$ 厘米的棒在光滑水平面上转动，同时以速度 $v = 10$ 厘米/秒滑动，离棒的中心距离 $L = 50$ 厘米处有竖直的墙。要使棒平着与墙相撞（图 1-23)，试问棒的角速度 ω 应为多少？

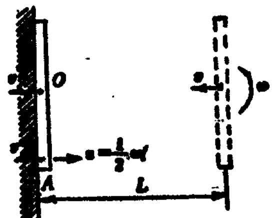

图 1-23

分析与解　棒的中心经过距离 L 与墙相撞所经历时间

$$\tau = L/v = 5\ 秒$$

为使棒平着与墙相撞，必须在这段时间内，棒转动的次数为半圈的整数倍。因此

$$\omega_n\tau = n\pi\quad 式中\ n = 1、2、3\cdots\cdots$$

故

$$\omega_n = n\pi/\tau \tag{1}$$

但是，并非(1)式中所表示的一切 ω 值符合题目的要求。当 ω 足够大时，棒在运动中将一端碰到墙，未能够平着靠墙。为此必须寻找满足所求 ω 值的条

件。注意，当棒撞墙时，棒的A端的速度方向(见图)不可能是离开墙的方向（否则，在此以前A点已在墙上，这是不可能的)。A点速度是棒中心速度和棒转动的线速度之和：$v_A = u - v = \frac{\omega L}{2} - v < 0$

由此得到ω的条件：$\omega < 2v/l = 2$ 秒$^{-1}$

考虑这个条件和(1)式，得出只有 $\omega_1 = 0.63$秒$^{-1}$，$\omega_2 = 1.26$ 秒$^{-1}$ 和 $\omega_3 = 1.89$ 秒$^{-1}$ 值时才符合所求ω_n的值。

1-19 一片胶合板从空中下落。发现在某个时刻板上a点速度和b点速度相同：$v_a = v_b = v$，且均位于板面上；同时还发现板上c点速度比速度v大一倍，c点到a、b两点距离等于a、b两点之间距离。试问板上哪些点的速度等于$3v$？

分析与解 板上各点所作的复杂运动都可以看作是在确定时刻两个简单运动的合运动：与a、b两点一起作平动(这意味着，也与直线ab一起)和相对轴ab转动。

研究c点的运动。c点速度矢量$\boldsymbol{v}_c$是矢量$\boldsymbol{v}$（平动速度）和$\boldsymbol{v}_{转}$(转动速度）之矢量和，并且矢量$\boldsymbol{v}$与$\boldsymbol{v}_{转}$是互相垂直的(图 1-24)

$$\boldsymbol{v}_c = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_{转} \qquad v_c^2 = v^2 + v_{转}^2$$

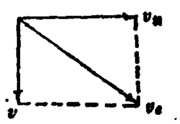

图 1-24

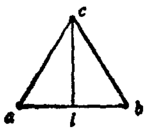

图 1-25

既然 $v_c = 2v$，那么

$$v_{转} = \sqrt{3}\,v$$

下面求从c点到直线ab的距离。a、b、c是等边三角形的三个顶点(图 1-25)，用l表示边长ab，于是得到对我们有用的距离

$$d = \frac{\sqrt{3}}{2}l$$

显然，板上其速度大小为$3v$的点应位于与轴ab平行并且离轴ab相距为某一距离L的两条直线上。为了求距离L，特作如下处理。同分析c点方法类似，将待求点的速度表示为两个相互垂直的速度v和$v_{转}$之矢量和。

$$(3v)^2 = v^2 + (v'_{转})^2$$

由此得到

$$v'_{转} = 2\sqrt{2}\,v$$

现在使速度$v_{转}$与$v'_{转}$相等。

一方面

$$v_{转}/v'_{转} = \sqrt{3}\,v/2\sqrt{2}\,v = \sqrt{3}/2\sqrt{2}$$

另一方面

$$v_{转}/v'_{转} = a/L = \frac{\sqrt{3}}{2}l/L$$

因而

$$\frac{\sqrt{3}}{2}l/L = \sqrt{3}/2\sqrt{2}$$

$$L = \sqrt{2}\,l$$

1-20 蚂蚁离开巢沿直线爬行，它的速度与到蚁巢中心距离成反比。当蚂蚁爬到距巢中心$l_1 = 1$米的A点处，速度是$v_1 = 2$厘米/秒。试问蚂蚁从A点爬到B点需要多少时间？（B点到巢中心距离$l_2 = 2$米）

分析与解 蚂蚁的速度随时间的变化规律不是线性的。所以在各段路程内的平均速度是不同的，不能利用已知的平均速度公式来解。

我们将蚂蚁爬行的路程从A点到B点分成许多小段，且经过每个小段的时间均为Δt。于是$\Delta t = \Delta l/v_{平}(\Delta l)$，式中$v_{平}(\Delta l)$是该小段$\Delta l$内的平均速度。这个公式帮助我们想出个思路：作出从$A$点到$B$点整个路程上量$1/v_{平}(\Delta l)$与$l$之间关系图，这个图象是一条直线段(图 1-26)，在这条线段下面画有细线部分的面积在数值上就等于所求的时间。计算面积S

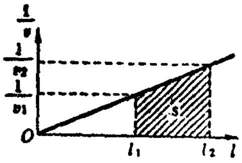

图 1-26

$$S = \frac{1/v_1 + 1/v_2}{2}(l_2 - l_1)$$

$$= \left(\frac{1}{2v_1} + \frac{1}{2v_1}\frac{l_2}{l_1}\right)(l_2 - l_1)$$

$$= \frac{l_2^2 - l_1^2}{2v_1 l_1}$$

(因为 $1/v_2 = (1/v_1)l_2/l_1$)。由此得到蚂蚁从A点爬到B点所需时间为

$$t = \frac{4\text{米}^2 - 1\text{米}^2}{2\times 2\text{米/秒}\times 10^{-2}\times 1\text{米}} = 75\text{秒}$$

1-21 一架直升飞机从机场竖直向上起飞，其加速度$a = 3$米/秒^2。经过时间t_1，驾驶员关闭发动机。而过了时间$t_2 = 30$秒，地面起飞站听不到飞机发动机的声音。试求发动机停止工作时刻飞机的速度？（声音的速度$v = 320$米/秒）

分析与解 驾驶员关闭发动机时飞机所在高度$h = \frac{1}{2}at_1^2$。考虑到起飞站在时间t_2后听不到机声，机声从高空h传到地面时间为$at_1^2/2v$，于是

$$t_2 = t_1 + at_1^2/2v$$

解此二次方程，得到

$$t_1=\sqrt{\left(\frac{v}{a}\right)^2+2\frac{v}{a}t_2}-\frac{v}{a}$$

舍去方程的另一个根，因为它没有物理意义。

发动机停止工作时刻直升飞机的速度为

$$u=at_1=a\left[\sqrt{\left(\frac{v}{a}\right)^2+2\frac{v}{a}t_2}-\frac{v}{a}\right]$$

$$=\sqrt{v^2+2avt_2}-v=80\ 米/秒$$

1-22　质点开始以恒定加速度 a 沿直线运动，经过时间 t_1 后，加速度的方向变为相反，大小不变。试求质点从开始运动后经过多少时间 t，回到原来的位置？

分析与解　质点以加速度 a 运动，经过时间 t_1，通过的路程 $s=\frac{1}{2}at_1^2$，达到速度 $v=at_1$。选择 X 轴，如图 1-27 所示。O 为运动的起点，A 为经过时间 t_1 所在的点。考虑到加速度 a 反向，运用匀变速运动的位移公式，得到质点从 A 点回到 O 点所经过的时间 t_2

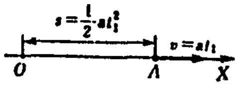

图 1-27

$$0=at_1^2/2+at_1t_2-at_2^2/2$$

由此　　$t_2=t_1(1+\sqrt{2})$

质点从开始运动到返回出发位置所经历时间是

$$t=t_1+t_2=t_1(2+\sqrt{2})$$

1-23　两个物体沿直线相向运动，初速度分别为 v_1 和 v_2，而加速度分别为 a_1 和 a_2，加速度的方向分别与相应的初速度方向相反。要使两物体在运动过程中迎面相遇，试求它们之间最大的起始距离 l_{max}。

分析与解　我们从第一个物体上来观察两个物体的相对运动。于是，在开始时刻第一个物体是静止的（它在以后时间仍处于静止），而第二个物体以速度 v_1+v_2 迎面运动，其加速度恒定，大小为 a_1+a_2，方向与其初速度方向相反。要满足相遇这一条件，这意味着第二个物体的速度变为零所经过的距离，应该大于开始运动时两个物体之间的距离。

由此得到

$$l_{max}=(v_1+v_2)^2/[2(a_1+a_2)]$$

1-24　第一个钢球从高度 $h_1=44$ 厘米处开始自由下落，τ 秒钟后，第二个钢球从高度 $h_2=11$ 厘米处开始自由下落，落向钢板。经过某一时间 τ 两球速度的大小和方向都相同。试求时间 τ 以及两球速度相同所需时间间隔（两个球不发生相碰）。

分析与解　由于两球的运动是沿竖直线进行，故取坐标轴方向为竖直向上。作两球速度与时间关系图，图 1-28 表示第一个球（v_1t），图 1-29 表示第二个球（v_2t）（开始运动时刻它们之间还没有任何关系）。这些图象是无限组斜率相同（加速度相同）的直线段。

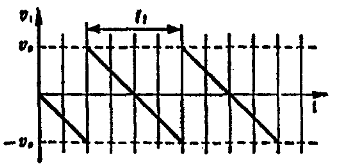

图 1-28

这些图象沿时间轴互相间隔，对第一个球间隔量 $t_1=2\sqrt{2h_1/g}$，对第二个球间隔量 $t_2=2\sqrt{2h_2/g}$。据题意 $h_1=4h_2$，所以 $t_1=2t_2$，即对第二个球来说，运动恢复要加快一倍。从起始高度可知，两球所能达到的最大速度也相差一倍（看图 1-28、1-29）

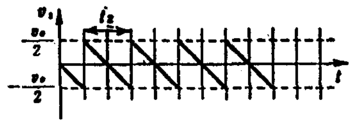

图 1-29

$$v_{1max}=2v_{2max}=\sqrt{2h_1g}=v_0$$

要使两球的速度在任何一个时刻，其大小和方向都相同，有两种可能。第一种可能是首先从开始运动起经过时间 $\tau=nt_1$（式中 $n=0$，1，2，……），每隔 $t_1/4$ 时间两球速度相同，其次从开始运动起经过时间 $3t_1/4$，每隔时间 $t_1/2$ 两球速度相同。后来以周期 t_1、每隔时间 $t_1/2$，两球速度继续相同。另一种可能是经过时间 $\tau=t_1/2+nt_1$（式中 $n=0,1,2,\cdots\cdots$）第二个球开始运动。经过时间间隔 $t_1/4$，两球速度首次相同，再每隔时间 $t_1/2$ 两球速度完全相同。往后状况以周期 t_1 重复出现。

在第二个球开始运动的其他时刻，由于两球运动重复周期短，两球速度图象不具有公共点，因此本题无解。

1-25　一个小球一次沿 ABC 槽无摩擦滑下，另一次沿 ADC 槽无摩擦滑下（图 1-30）。槽的 AD 段和 BC 段是竖直的，而 $\angle ABC$ 和 $\angle ADC$ 成圆角形。试对于这两种情况作出球的速度 v 与时间 t 的关系图，如果 $AB=BC=AD=DC=h$。球在 A 点处速度为零。问球沿哪一段槽（ABC 还是 ADC）能够较

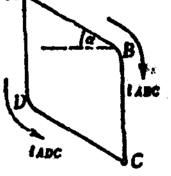

图 1-30

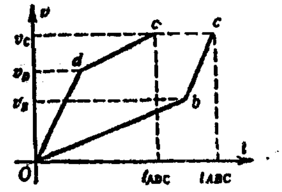

图 1-31

快地从 A 点落到 C 点？

分析与解 因为没有摩擦，所以球在 C 点速度大小与路径无关且都是相同的。球的速度与时间关系用直线来表示，在槽的 AB 和 DC，BC 和 AD 段直线斜率相同。在图 1-31 上两段路程数值上分别等于曲线下方 Odc 和 Obc' 所围的面积。因为两段路程相同，这两部分面积应该相等，由此可知 $t_{ABC}>t_{ADC}$。

下面计算沿两条路径滑行时间

$$t_{AD}=\sqrt{2h/g} \quad v_D=\sqrt{2gh}$$

因为$DC=h=v_Dt_{DC}+\left(\frac{1}{2}gt_{DC}^2\right)\sin\alpha$，所以

$$t_{DC}=-\frac{v_D}{g\sin\alpha}+\sqrt{\frac{v_D^2}{g^2\sin^2\alpha}+\frac{2h}{g\sin\alpha}}$$

因而

$$t_{ADC}=t_{AD}+t_{DC}$$

$$=\sqrt{\frac{2h}{g}}\frac{1}{\sin\alpha}(\sqrt{1+\sin\alpha}+\sin\alpha-1)$$

同理对于 t_{ABC}

$$t_{AB}=\sqrt{\frac{2h}{g\sin\alpha}} \quad v_B=\sqrt{2gh\sin\alpha}$$

$$t_{BC}=-\frac{v_B}{g}+\sqrt{\frac{v_B^2}{g^2}+\frac{2h}{g}}$$

由此

$$t_{ABC}=\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(\frac{1-\sin\alpha}{\sqrt{\sin\alpha}}+\sqrt{1+\sin\alpha}\right)$$

现在不难求出时间差

$$t_{ABC}-t_{ADC}=\sqrt{\frac{2h}{g}}\frac{1-\sin\alpha}{\sin\alpha}$$

$$(\sqrt{\sin\alpha}+1-\sqrt{1+\sin\alpha})>0$$

由于$\sqrt{\sin\alpha}+1>\sqrt{\sin\alpha+1}$

1-26 从离地面上同一高度h，相距 l 的两处同时各抛出一个石块：一个以速度 v_1 竖直向上抛；另一个石块以速度 v_2 水平抛出。求这两个石块在运动过程中它们之间最短距离？（两个石块的初速度位于同一竖直平面内）

分析与解 选择同第一个石块相连接的坐标系。于是在此坐标系内第二个石块的运动将是匀速直线运动。因为第二个石块相对第一个石块的加速度

$$a_{21}=a_2-a_1=g-g=0$$

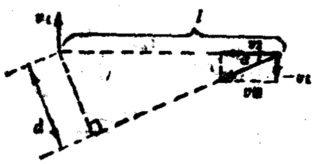

图 1-32

第二个石块相对第一个石块的速度

$$v_{相}=v_2-v_1$$

从图 1-32 中容易求出两个石块之间最短距离

$$d=l\sin\alpha=lv_1/\sqrt{v_1^2+v_2^2}$$

附注：两个石块从开始抛出到它们彼此相距最近所经过的时间

$$t=\frac{l\cos\alpha}{v_{相}}=\frac{l\cos\alpha}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}=\frac{lv_2}{v_1^2+v_2^2}$$

必须使第一个石块在此刻前未落地，即满足条件

$$lv_2/(v_1^2+v_2^2)\leqslant\sqrt{2h/g}$$

1-27 一只苍蝇在高 H 处，以速度 v 平行桌面飞行。在某一时刻发觉就在它的正下面一滴蜂蜜，苍蝇借助翅膀可以向任何方向加速，但加速度大小不超过 a。试求苍蝇能够飞到蜂蜜所在处的最短时间？重力不存在（设想问题发生在宇宙空间）。

分析与解 设苍蝇加速度 a 方向与水平方向成角 θ。建立如图 1-33 所示坐标系，苍蝇的运动可看作是沿 X 轴方向作初速度 v 的匀减速直线运动，沿Y 轴方向作匀加速直线运动，这两个分运动的合运动。因而

$$vt-\frac{1}{2}a\cos\theta\cdot t^2=0 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2}a\sin\theta\cdot t^2=H \qquad (2)$$

由(1)式得到

$$\cos\theta=\frac{2v}{at} \qquad (3)$$

由(2)式得到

$$\sin\theta=\frac{2H}{at^2} \qquad (4)$$

$(3)^2+(4)^2$ 可得出

$$a^2t^4-4v^2t^2-4H^2=0$$

取正根 $$t^2=\frac{2(v^2+\sqrt{v^4+a^2H^2})}{a^2}$$

因而 $$t_{min}=\frac{v}{a}\sqrt{2\left(1+\sqrt{1+\frac{a^2H^2}{v^2}}\right)}$$

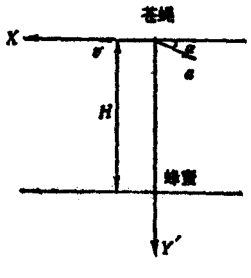

图 1-33

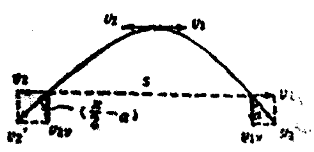

图 1-34

1-28 两个质点以加速度 g 在均匀重力场中运动。开始时两个质点位于同一点，且其中一个质点具有水平速度 $v_1=3.0$米/秒；另一个质点水平速度 $v_2=4.0$米/秒，方向与前者相反(图 1-34)。求当两个质点

的速度矢量相互垂直时，它们之间的距离。

分析与解 两个质点均作平抛运动，在竖直方向的分运动相同，作自由落体运动，任何时刻位于同一高度，竖直向下分速度相同。当两个质点的速度相互垂直时

$$v_{1y}=v_{2y} \quad v_{1y}=v_1\operatorname{ctg}\alpha \quad v_{2y}=v_2\operatorname{tg}\alpha$$

由此得到

$$v_{1y}=v_{2y}=\sqrt{v_1v_2}$$

飞行时间

$$t=\frac{v_{1y}}{g}=\frac{1}{g}\sqrt{v_1v_2}$$

两质点之间距离

$$s=(v_1+v_2)t=\frac{v_1+v_2}{g}\sqrt{v_1v_2}=2.5\text{米}$$

1-29 小冰球从高为 H 的光滑坡顶由静止开始下滑，这个坡的末端形如水平跳板(图 1-35)。当跳板高 h 为何值时，冰球飞过的距离 s 最远？它等于多少？

分析与解 根据机械能守恒定律，冰球滑到 B 点速度为

$$\frac{1}{2}mv_B^2=mg(H-h)$$

$$v_B=\sqrt{2g(H-h)}$$

冰球从 B 球飞出，作平抛运动，飞行时间

$$t=\sqrt{2h/g}$$

水平路程为

$$s=v_Bt=\sqrt{2g(H-h)}\sqrt{2h/g}=2\sqrt{h(H-h)}$$

当 $h=\frac{1}{2}H$ 时 s 有极大值

$$s_{\max}=H$$

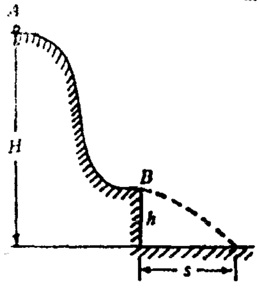

图 1-35

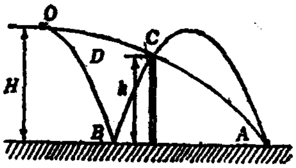

图 1-36

1-30 一位网球运动员用拍朝水平方向击网球。第一只球落在自己一方场地上后，弹跳起来，刚好擦网而过，落在对方场地 A 点处。第二只球直接擦网而过，也落在 A 点处(图 1-36)。球与地面的碰撞是完全弹性的，且空气阻力不计。试求运动员击球点的高度为网高的多少倍？

分析与解 第一只球先作平抛运动，后作斜抛运动；第二只球作平抛运动。平抛物体落地时间仅由所在高度决定，故第一只球落在场地 B 点所经历时间与第二只球落在场地 A 点时间相同，第一只球从 B 点到 A 点经历的时间为从 O 点到 B 点时间的2倍。用 T_1 和 T_2 分别表示两球从 O 点到 A 点时间，则 $T_1=3T_2$。两球从 O 点飞到 C 点时间分别用 t_1 和 t_2 表示，因每个球的水平速度不变($v_2=3v_1$)，水平距离相同，则 $t_1=3t_2$。设第一只球到 B 点时间为 t_3，从 B 点到 C 点时间为 t_4，则 $t_1=t_3+t_4$。又因为第一只球飞到 D 点时间与第二只球飞到 C 点时间相同(C、D 两点等高)，因此，$t_4=t_3-t_2$，$t_1=2t_3-t_2$。将 $t_1=3t_2$ 代入上式，$3t_2=2t_3-t_2$，由此得到：$t_3=2t_2$ 并且 $t_3=T_2$，所以 $T_2=2t_1$。这说明第二只球从 O 到 C 时间与从 C 到 A 时间相同。因此，

$$\frac{H-h}{H}=\left(\frac{t_2}{T_2}\right)^2=\frac{1}{4},$$

所以

$$H=\frac{4}{3}h$$

1-31 一只弹性小球从离地板高 $H=1$ 米处放下，在球下落的路径上固定一块板，球从板上弹起。求球碰到板时的速度。问怎样放置板，才能使球落地点离下落起点最远？这个最远距离为多少？

分析与解 球落到板上时速度大小与板如何放置无关。根据机械能守恒定律

$$mgH=\frac{1}{2}mv^2$$

$$v=\sqrt{2gH}$$

球与板的碰撞是弹性的，碰撞后球速越大，球飞行也越远。故板离球的起点越远，这个速度越大。因此，板应安置在地板上(图 1-37)。

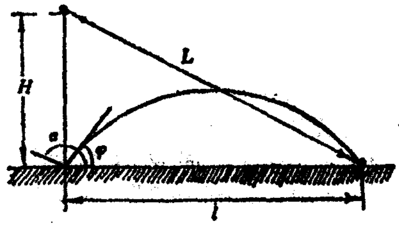

图 1-37

球从板上弹开后立即具有速度 $v=\sqrt{2gH}$，作斜抛运动。我们知道碰撞后若球速方向与水平地板成角 $\varphi=45°$，则水平飞行距离最远，所以板的法线应该与水平方向成角 $45°+22.5°=67.5°$，即板应该与水平成角 $\alpha=90°+67.5°=157.5°$ 放置。

球落地点到板的距离为 l

$$l=\frac{v^2}{g}=2H$$

因此，球的下落起点与落地点之间最远距离 L

$$L=\sqrt{l^2+H^2}=\sqrt{5}\,H\approx 22.4\text{ 米}$$

1-32　倾角为 α 的光滑斜面静止在地面上不动。一个小钢球以角 β 飞向斜面(图 1-38)。试问 β 为何值时，球可以返回到它第一次与斜面相碰的点？（所有碰撞可认为是弹性的）

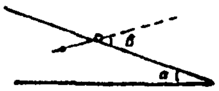

图 1-38

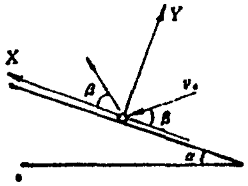

图 1-39

分析与解　选择建立在斜面上的坐标系较为方便，坐标轴的选择如图 1-39 所示。讨论球与斜面两次连续碰撞间的运动。

因为球的加速度在 OY 轴上分量是恒量：$a_y=g\cos\alpha=$ 恒量。球的速度在此轴上的分量为 v_y，由于碰撞是弹性的，所以 v_y 在第一次碰撞时同第二次碰撞时大小相等。由此可见，所有相碰时 $v_y=v_0\sin\beta$，式中 v_0 是球第一次与斜面碰撞时刻的速度。

两次连续碰撞所经历时间 τ，球沿 OY 轴方向上运动方程 $y=v_yt-g\cos\alpha\cdot t^2/2$。当 $t=\tau$ 时，$y=0$：

$$\tau=\frac{2v_y}{g\cos\alpha}=\frac{2v_0\sin\beta}{g\cos\alpha}$$

沿 OX 轴运动方程 $x=v_xt-a_xt^2/2$（式中 $v_x=v_0\cos\beta, a_x=g\sin\alpha$），而返回条件为：当 $t=n\tau$ 时 ($n=1、2、3\cdots\cdots$)，则 $x=0$。由此对于角 β 应为

$$\beta=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{n}\operatorname{ctg}\alpha\right)$$

1-33　一些很小的球从竖直对称轴附近，高度 $H=R/8$ 处，无初速度情况自由落下。碰到半径为 R 的凹形球面上，小球与球面的碰撞是完全弹性的，试证明在第一次碰撞后，每个小球都落在球面的最低点(小球之间不发生碰撞)。

分析与解　我们研究小球从对称轴附近高 H 处自由落下，与凹形球面碰撞时刻起开始运动的情况。在碰撞时小球初速度 $v_0=\sqrt{2gH}$（由于碰撞是完全弹性的），速度 v_0 方向与竖直线成角 2α(图 1-40)。

设与球面碰撞后，经过时间 t 小球水平位移为 s，于是 $v_0\sin 2\alpha\cdot t=s$，由此得到

$$t=s/(\sqrt{2gH}\sin 2\alpha)$$

式中 $v_0\sin 2\alpha$ 是小球初速度的水平分量(在时间 t 内小球不再与球面碰撞)。经过时间 t 小球所在高度为

$$\Delta h=h_0+v_0\cos 2\alpha\cdot t-gt^2/2$$

式中 $v_0\cos 2\alpha$ 为小球初速度的竖直分量。

因为小球是从对称轴附近高 H 处落下（角 α 很小），可以认为：$h_0\approx 0, \sin 2\alpha\approx 2\alpha, \cos 2\alpha\approx 1, s\approx R\alpha$。考虑到这些近似值以及上述关系式，得到小球落到球面的最低点的条件

$$t=s/(\sqrt{2gH}\sin 2\alpha)=R/(2\sqrt{2gH})$$

$$\Delta h\approx v_0t-gt^2/2=R/2-R^2/(16H)=0$$

由此得到

$$H=R/8$$

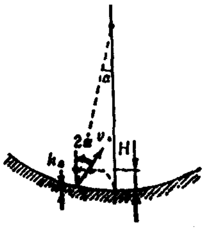

图 1-40

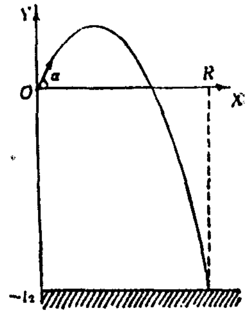

图 1-41

1-34　**一盏灯挂在离地板高 l_2，天花板下面 l_1 处。灯泡爆破，所有碎片以同样大小的初速度 v 朝各个方向飞去。求碎片落到地板上的半径。（可以认为碎片与天花板的碰撞是弹性的，与地板的碰撞是完全非弹性的，碎片碰不到墙）**

分析与解　首先假设没有天花板，求这种情况下碎片落到地板上斑点的最大半径。

建立坐标系，以悬挂处的灯头位置作为原点（图 1-41）。碎片与水平方向成角 α 飞行，经过时间 t 后，落到地板上，则

$$-l_2=vt\sin\alpha-gt^2/2 \qquad (1)$$

$$R=vt\cos\alpha$$

显然，我们必须选择角 α，使 R 值最大。为此，将(1)变形

$$gt/2-l_2/t=v\sin\alpha \qquad (2)$$

$$\frac{R}{t}=v\cos\alpha$$

由此得到有关 R 值的不等式

$$R^2=(v^2+gl_2)t^2-\frac{g^2t^4}{4}-l_2^2$$

$$=\left(\frac{v^2+gl_2}{g}\right)^2-l_2^2-\left(\frac{gt^2}{2}-\frac{v^2+gl_2}{g}\right)^2$$

$$\leqslant\left(\frac{v^2+gl_2}{g}\right)^2-l_2^2$$

从中得到

$$R_{\max}=\frac{v}{g}\sqrt{v^2+2gl_2}$$

碎片飞行这段距离的时间 t'

$$t' = \frac{1}{g}\sqrt{2(gl_2 + v^2)}$$

与水平方向所成角由下式得到

$$\cos\alpha' = \frac{R_{\max}}{vt'} = \sqrt{\frac{v^2 + 2gl_2}{2(v^2 + gl_2)}}$$

碎片运动轨迹在灯头上方的高度h'由下式得到

$$h' = \frac{(v\sin\alpha')^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}(1 - \cos^2\alpha')$$
$$= \frac{v^4}{4g(v^2 + gl_2)}$$

现在考虑有天花板情况。显然，如果 $l_1 \geqslant h'$，那么

$$R_{\max} = \frac{v}{g}\sqrt{v^2 + 2gl_2}$$

如果 $l_1 < h'$　即 $l_1 < \frac{v^4}{4g(v^2 + gl_2)}$ 情况下，碎片运动轨迹在灯头上方最大高度为 l_1（轨迹与天花板相切），才能使碎片在地板上斑点的半径最大。为证明这一结论，只须研究被天花板反弹的一个碎片的运动情况。碎片反弹后的轨道与"切线的"轨道相比较"圆形"，任何时候它也不会与"切线的"轨道交叉。这意味着，同天花板相切的碎片要比所有被天花板反弹的碎片在水平方向飞行的距离更远。

由此可见，如果 $l_1 > \frac{v^4}{4g\sqrt{v^2 + gl_2}}$，那么

$$R_{\max} = \frac{v}{g}\sqrt{v^2 + 2gl_2}$$

如果 $l_1 < \frac{v^4}{4g\sqrt{v^2 + gl_2}}$，那么

$$R_{\max} = \frac{\sqrt{v^2 + 2gl_1}}{g}\left[\sqrt{2gl_1} + \sqrt{2g(l_1 + l_2)}\right]$$

（后一答案由方程(1) 在 $(v^2\sin\alpha)/2g = l_1$ 情况下得到的）

1-35　钢球沿着光滑的长梯弹跳，在每一级台阶上仅弹跳一次(图1-42)。每次与台阶碰撞时，球要损失 $\alpha = 50\%$的机械能。试求小球抛出时的初速度 v 及其与竖直线的夹角 φ（梯子台阶的高度 $h = 10$ 厘米，宽 $l = 20$ 厘米）。

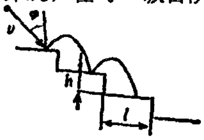

图 1-42

分析与解　球要能够同长梯的每一级台阶碰撞，只有每一次碰撞前，它具有同样的速度并且碰到台阶的同一地方。这时球的水平分速度在碰撞中不变，而当球落向下一个台阶中，由于重力做功，竖直分速度的变化得到补偿。由此可知，球的速度$v = (2gh/\alpha)^{1/2} = 2$ 米/秒。

两次碰撞所经历时间 $t = \tau/v\sin\varphi$。弹起后开始的竖直分速度 v_1 由条件 $(v\cos\varphi)^2 - v_1^2 = \alpha v^2$ 求得。球在时间 t 内在竖直方向上发生的位移 $-h = v_1 t - gt^2/2$。

由这四个关系式得出方程

$$-\frac{h}{l} = \frac{(\cos^2\varphi - \alpha)^{1/2}}{\sin\varphi} - \frac{l}{h}\,\frac{\alpha}{4\sin^2\varphi}$$

代入 α、l 和 h 数值，得到两个解

$\varphi_1 = 45°$　$\operatorname{tg}\varphi_2 = 1/3$（或 $\sin\varphi_2 = 1/\sqrt{10}$）

显然，第一个解不符合题意，因为这时获得碰撞中全部损失的竖直分速度。第二个解给出 $\varphi = 18.5°$。

1-36　从高度 $h = 1$ 千米的山上，以速度 $v_0 = 500$ 米/秒水平发射第一颗炮弹，过了 $t_0 = 1$ 秒钟接着发射第二颗炮弹。问要使第二颗炮弹追上第一颗炮弹，它应当具有的最小初速度及发射角度为多大?

分析与解　首先在与炮（可以认为两颗炮弹是从位于山顶上同一门炮发射的）相联系的坐标系 1 中(图1-43)分析问题。当发射第二颗炮弹时刻，第一颗炮弹发生的水平位移 $x_0 = v_0 t_0$，而竖直位移

$$y_0 = \frac{1}{2}gt_0^2$$

同时，将具有速度

$$v_1 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (gt_0)^2}$$

与水平方向成的角度 $\alpha = \operatorname{arc\,tg}(gt_0/v_0)$。假设第二颗炮弹以速度$v_1$，与水平方向成角$\alpha'$发射。在这种情况下当第二颗炮弹发射后，两颗炮弹彼此始终相距同一个距离 $s_0 = \sqrt{x_0 + y_0}$ 飞行着。

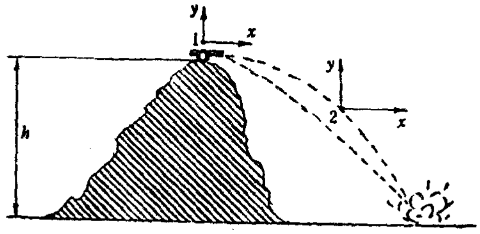

图 1-43

下面取与第二颗炮弹相联系的坐标系 2，如果它正如我们所假设的那样飞行。在这个坐标系内，如果第二颗炮弹沿着连接两颗炮弹的直线，以相对速度 v' 去接近第一颗炮弹。我们来求速度 v' 的大小和方向。

容易理解相互接近的速度不可能任意小，因为相互接近的时间应该明显地小于飞行时间

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

于是
$$v' \geqslant \frac{s_0}{t} = s_0\sqrt{\frac{g}{2h}}$$

相对速度v'方向应当与水平方向成角度α'

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{y_0}{x_0} = \frac{gt_0}{2v_0}$$

现在再回到静止的坐标系1内。在这里所求速度 v 的分量应当等于

$$v_x = v_0 + v'\cos\alpha' \qquad v_y = -gt - v'\sin\alpha'$$

式中 $v' \geqslant s_0\sqrt{g/(2h)}$。最小速度为

$$v' = s_0\sqrt{g/(2h)}$$

此时两颗炮弹在地面附近相遇，发射角度水平向下为

$$\alpha_0 = \mathrm{arctg}(v_x/v_y)|_{t=t_0} = 0.019\text{ 弧度} = 1°5'$$

第二颗炮弹发射的初速度应为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\,|_{t=t_0} = 535.1\text{ 米/秒}$$

1-37　木排停泊在河上，到岸的距离 $L = 60$ 米。流水速度同离岸的距离成比例增大，在岸边 $u_0 = 0$，而在木排边流速 $u_L = 2$ 米/秒。小汽船离开岸驶向木排。船相对水的速度 $v = 7.2$ 千米/小时。问驾驶员在起航前应该使船指向何方，使以后无须校正船速就能靠上与起航处正对面的木排？这时船航行多少时间 T？

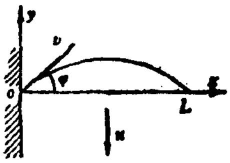

图 1-44

分析与解　离岸 x 处（图1-44）河水速度 $u = u_L x/L$。船相对岸沿 x 轴和 y 轴方向的分速度分别为 $v_x = v\cos\varphi$，$v_y = v\sin\varphi - u$（v 是船相对水的速度）；因为 $x = vt\cos\varphi$，所以

$$v_y = v\sin\varphi - \frac{u_L}{L}vt\cos\varphi$$

由此可见，船沿 x 轴作匀速运动，而沿 y 轴作匀减速运动。

起航后经过时间 t 船的坐标为 x 和 y，并且

$$x = vt\cos\varphi \qquad y = vt\sin\varphi - \frac{v_L}{L}\frac{vt^2\cos\varphi}{2}$$

当船与木排相遇时 $t = T$，坐标 $y = 0$，$x = L$。因此

$$L = vT\cos\varphi, 0 = vT\sin\varphi - \frac{u_L}{L}\frac{vT^2\cos\varphi}{2}$$

由此 $\sin\varphi = u_L/2v$ 和 $T = L/(v\cos\varphi)$。代入数值，得到 $\varphi = 30°$，$T \approx 35$ 秒。如果 $u_L \geqslant 2v$，那么船不可能同木排相遇。

1-38　迫击炮和目标位于同一个水平面上，它们之间有高为 h 的小山。迫击炮到山（山顶）的水平距离为 a，目标到山的距离为 b（图1-45）。试求为击毁目标炮弹必需具有的最小初速度以及发射角（空气阻力不计）。

分析与解　分析本题，讨论当没有山的情况下所有通过目标的轨道。在图1-45上标出与炮弹最小初速度相应的轨道。大家知道：这条轨道对应发射角 $\alpha = 45°$。不难确信，位于这条轨道上方或下方的其他轨道所对应的初速度都要大于这个最小初速度。因此，如果山就位于这条轨道的下方，那么上述解答是符合实际的：正是这条轨道满足题意。如果山高出这条轨道，那么所求的轨道要穿过山的顶部，问题就在于此。

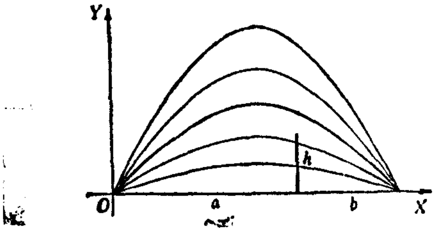

图 1-45

现在我们来作定量的讨论。选择坐标系：迫击炮位于坐标的原点，X 轴为水平线，Y 轴为铅直线。炮弹的坐标与时间的关系表述如下

$$x = v_0\cos\alpha\cdot t$$

$$y = v_0\sin\alpha\cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

从这两个方程中消去 t，得到炮弹的轨道方程

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1 + \mathrm{tg}^2\alpha) \qquad (1)$$

要使这些轨道通过目标，为此令当 $x = a + b$ 时 $y = 0$

$$0 = (a+b)\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{g(a+b)^2}{2v_0^2}(1 + \mathrm{tg}^2\alpha) \qquad (2)$$

从(2)式得出 v_0 式，再代入(1)式中，得到通过目标的轨道方程

$$y = x\left(1 - \frac{x}{a+b}\right)\mathrm{tg}\,\alpha \qquad (3)$$

取 α 为从0到 $\frac{\pi}{2}$ 范围内的不同值，得到图1-45所示的一切轨道，而当 $\mathrm{tg}\,\alpha = 1\left(\alpha = \frac{\pi}{4}\right)$ 时得到标出的轨道

$$y = x\left(1 - \frac{x}{a+b}\right) \qquad (4)$$

现在阐述，在什么条件下这条轨道从山的上方通过，为此求当轨道上 $x = a$ 这点的高度 h_1

$$h_1 = a\left(1 - \frac{a}{a+b}\right) = \frac{ab}{a+b}$$

由此可见，如果山高 h 小于 h_1，则所求的轨道由(4)式确定，而与它对应的初速度 v_0 容易得到，只要方程(2)中令 $\mathrm{tg}\,\alpha = 1$

$$v_{0\min} = \sqrt{g(a+b)}$$

这就是初速度与最大的水平射程之间的一般关系式。

如果山高于标出的轨道：$h > h_1$，就得重新确定所求的轨道。在此情况下需要求通过山顶的轨道，即令当 $x = a$ 时(3)式中 $y = h$

$$h = a\left(1 - \frac{a}{a+b}\right)\mathrm{tg}\alpha_1$$